Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti

O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filiali

Gent “Analiz va xususiy hosilali tenglamalar” markazi (Belgiya)

“Science and innovation” xalqaro ilmiy jurnali

MATEMATIK FIZIKANING ZAMONAVIY USULLARI VA ULARNING TADBIQLARI

akademik Sh.A. Alimov tavalludining 80 yilligiga bag‘ishlangan respublika ilmiy anjumani

Toshkent shahri, 22-24-aprel, 2025 yil

MA’RUZALAR TEZISLARI

I TOM

======== ♢ ========

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте

Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Бельгия)

Международный научный журнал “Science and innovation”

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова

Ташкент, 22–24 апреля, 2025 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ТОМ I

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 +517.968 + 519.6.

«Современные методы математической физики и их приложения»: Тезисы докладов республиканской научной конференции посвященной 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова (22–24 апреля 2025 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во «Маърифат». 2025. 310 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения» по следующим направлениям: Спектральная теория дифференциальных операторов, Краевые задачи для уравнений математической физики, Дифференциальные уравнения дробного порядка, Современные проблемы алгебры и геометрии, Теория функций, Теория вероятностей и математическая статистика, Математическое моделирование и вычислительная математика.

Данная конференция организована на основании распоряжения 72–Ф Кабинета Министров Республики Узбекистан от 13 февраля 2025 года, приказом №490 министра высшего образования, науки и инновациям Республики Узбекистан от 27 декабря 2024 года и приказом №01–23 ректора Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека от 22 января 2025 года.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

профессор **Арипов М.М.**	профессор **Ашуров Р.Р.**
профессор **Зикиров О.С.**	профессор **Артикбаев А.**
профессор **Джамалов С.З.**	профессор **Файзиев Ю.Э.**
профессор **Халмухамедов А.Р.**	профессор **Хаётов А.Р.**
профессор **Фаязов К.С.**	профессор **Шоимкулов Б.А.**

Ответственные за выпуск:

д.ф.-м.н., доцент **Собиров З.А.**
к.ф.-м.н., доцент **Эшимбетов М.Р., Хушвактов Н.Х., Шокиров А.А.**

За содержание и оригинальность тезисов, представленных в данном сборнике, ответственность несут авторы этих работ.

© *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2025*

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Маджидов И.У. – председатель, ректор НУУз.,
Аюпов Ш.А. – сопредседатель, директор ИМ АН РУз.,
Ашуров Р.Р. – зам. председателя, зав. отделом ИМ АН РУз.,
Зикиров О.С. – зам. председателя, декан Математического Факултета НУУз.

Члены организационного комитета

Арипов М.М. (Узбекистан), Ашыралиев А. (Туркменистан),
Бердышев А.С.(Казакстан), Ворисов А.К. (Узбекистан),
Джамалов С.З. (Узбекистан), Исломов Б.И. (Узбекистан),
Карачик В.В. (Россия), Касимов Ш.Г. (Узбекистан),
Мамадалиев Н. (Узбекистан), Маматов М.Ш. (Узбекистан),
Мирсабуров М. (Узбекистан), Рахимов А.А. (Узбекистан, Малайзия),
Рузиев М. (Узбекистан), Садыбеков М.А. (Казакстан),
Тахиров Ж.О. (Узбекистан), Турметов Б.Х. (Казакстан),
Хасанов А.К. (Узбекистан), Хасанов А.Б. (Узбекистан).
Хашимов А.Р. (Узбекистан).

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:

Алимов Ш.А. – академик АН РУз. (Ташкент, Узбекистан),

Заместители председателя:

Халмухамедов А.Р. – зав. кафедрой, НУУз (Ташкент, Узбекистан),
Сайдаматов Э.М. – исполнительный директор, Филиал МГУ в г.Ташкенте (Ташкент, Узбекистан),
Ружанский М.В. – профессор, Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Гент, Бельгия),

Члены программного комитета

Азамов А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Гольдман М.Л. – профессор (Россия),
Икромов И.А. – профессор (Узбекистан),
Ишанкулов Т.М. – профессор (Узбекистан),
Кабанихин С.И. – член-корреспондент РАН (Россия),
Кальменов Т.Ш. – академик НАН РК (Казахстан),
Каримов Э.Т. – профессор (Узбекистан),
Кожанов А.И. – профессор (Россия),
Лакаев С.Н. – академик АН РУз (Узбекистан),
Ломов И.С. – профессор (Россия),
Мирахмедов Ш.А. – профессор (Узбекистан),
Отелбаев М. – академик НАН РК (Казахстан),
Псху А.В. – профессор (Россия),
Раджабов Н.Р. – академик АН Таджикистана (Таджикистан),
Розиков У.А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Садуллаев А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Собиров З.А. – доцент (Узбекистан),
Солдатов А.П. – профессор (Россия),
Умаров С.Р. – профессор (США, Узбекистан),
Уринов А.К. – профессор (Узбекистан),
Фаязов К.С. – профессор (Узбекистан),
Хаджиев Дж. Х. – академик АН РУз (Узбекистан),
Хусанбаев Я.М. – профессор (Узбекистан),
Часовских А.А. – профессор (Россия),
Шарипов О.Ш. – профессор (Узбекистан),
Ягола А.Г. – профессор (Россия).

Секретариат конференции

Файзиев Ю.Э., Шералиев Ш.Н., Дехканов Ф.Н., Мухиддинова О.Т.,
Шакарова М.Д., Сулаймонов И.А., Абдуллаева Ф.С., Жумаева Ш.Ф., Фаязова З.

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз.;

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте;

Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Бельгия);

Международный научный журнал “Science and Innovation”.

КОНФЕРЕНЦИЯ ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

Математического общества Узбекистана;

Central Asian University;

Сеть супермаркетов «Корзинка».

СОДЕРЖАНИЕ

Академик Алимов Шавкат Арифджанович 20

СЕКЦИЯ 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
SECTION 1. SPECTRAL THEORY OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Abdivokhidov A.A.
Integration Of The Negative Order Modified Korteveg-De Vries-Liouville Equation With An Additional Term In The Class Of Periodic Infinite-Gap Functons 26

Abdullaev J.I., Ergashova Sh.H.
Eigenvalues Of The Schrödinger Operator Of The Three Fermions System On A Lattice 28

Arzikulov A.U.
On Eigen-And-Associated Functions Of A Nonlocal Spectral Problem For The Harmonic Equations 30

Babadjanova A.K., Urazboev G.U., Atanazarova Sh.E.
Explicit Solution For The Matrix Negative Order Modified Korteweg-De Vries Equation Via Matrix Triplet 32

Babadjanova A.K., Atanazarova. Sh.E., Axmadjonov M.
On The Matrix Negative Order Modified Korteweg-De Vries Equation With A Source 33

Bazarkhanov D. B.
Quantitative Analysis Of Some Classes Of Integral Operators 35

Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.
On The Stability Of The Problem Of Function Reconstruction From Incomplete X-Ray Data In Four-Dimensional Space 36

Eshbekov R.Kh.
On The Hirota-Type Equation With A Self-Consistent Source In Integral Form 37

Kadirkulov B.J., Ergashev O.T.
On The Spectral Problem Of Bitsadze-Samarskii Type And Its Application To Solving The Boundary Value Problem For A Degenerate Elliptic Equation Of Fractional Order 39

Kaiyrbek Zh.A., Madibaiuly Zh.
Limiting Information Acquisition System In The Case Of Connecting Rods 41

Kanguzhin B.E.
Spectral Properties Of The Laplace-Beltrami Operator On Stratified Sets Composed Of Punctured Circles And Segments 42

Khamidov Sh.I., Ibrogimov U.
The Number And Location Of Eigenvalues Of Two Particle Schrödinger Operators On A Lattice 43

Khasanov M., Azimov D., Matyakubova S.
A Generalized-Expansion Method For The Loaded Modified Korteweg-De Vries Equation With Variable Coefficients 45

Khasanov A.B., Boymuratov D.
On the Negative Order Modified Korteweg-de Vries–Cosine Gordon Equation 46

Kuliev K., Turaqulov T.
New Equivalent Conditions For Discrete Hardy Type Inequality With Oinarov's Kernel 50

Lakaev S.N., Kurbanov Sh.Kh.
The Existence Of Eigenvalues Of The Generalized Friedrichs Model 52

Kurbonov O.I., Madatova F.A.
On Spectrum Of The Discrete Trilaplacian With Small Range Perturbation 54

Latipova D.A., Akhmadova M.O.
Spectral Properties Of The Two-Particle Schrödinger Operators On The Two-Dimensional Lattices 56

Nurakhmetov D.B.
Isospectral Problems For Euler-Bernoulli Beams 57

Oinarov R., Kalybay A. A.
Oscillatory And Spectral Properties Of A Class Of Fourth Order Differential Operators Via A New Hardy Type Inequality 58

Rakhimov A.A.
On The Summability Of The Fourier Laplace Series 59

Suragan D.
New Advances In Eigenvalue Lower Bounds For Laplacians 61

Tobakhanov N.
On The Critical Behavior For Inhomogeneous Semilinear Biharmonic Heat Equations On Exterior Domains 61

Torebek B.T.
Fujita-Type Results For The Semilinear Heat Equations Driven By Mixed Local-Nonlocal Operators 62

Tuxtamurodova T.M.
On The Existence Of The Efimov Effect For A Partial Integral Operator Of The Fredholm Type 63

Boltayev A.T., Ulashov S.S.
The Existence Of Bound States Of The Two-Particle Schrödinger Type Operator On A Lattice 65

Абдуллаев Ж.И., Муйдинова Ш.Н.
О Существовании Трехчастичного Собственного Значения Оператора Шредингера Системы Трех Бозонов 67

Балтаева И.И., Атаназарова Ш.Э., Раззакберганова С.Г.
Модифицированное Уравнение Кортевега-Де Фриза Отрицательного Порядка Со Специальным Источником 68

Будак А.Б.
О Некоторых Свойствах Спектральной Функции Оператора Штурма- Лиувилля С Разрывными Коэффициентами С Минимальными Условиями На Коэффициенты 70

Журакулова Ф.М.
О Дискретном Спектре Операторной Матрице Третьего Порядка 72

Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.
К Построению Безусловного Базиса Из Элементов Системы Корневых Векторов Оператора Кратного Дифференцирования С Линейным Вхождением Спектрального Параметра В Краевое Условие 74

Кадиркулов Б.Ж., Бегимкулов Ф.Х.
О Решении Спектралным Методом Нелокальной Задачи Для Вырождающегося Эллиптического Уравнения С Сингулярным Коэффициентом 76

Кальменов Т.Ш., Садыбеков М.А.
Спектральные Краевые Задачи Для Гиперболических Операторов 77

Лакаев Ш.С.
Спектральный И Пороговый Анализ Возмущения Малого Ранга Дискретного Оператора Лапласа 79

Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Баяндиев Е.Н.
Оценки Собственных И Сингулярных Чисел Резольвенты Одного Класса Линейных Дифференциальных Операторов Типа Кортевега-Де Фриза И Полнота Её Корневых Векторов 80

Пирматов Ш.Т.
Необходимые Условия Разложимости По Собственным Функция Оператора Шредингера С Сингулярным Потенциалом 81

Рахимов Д.Г., Ахмаджанова Д., Мелиев З.М.
Обобщенные Жордановы Цепочки Специального Вида Линейной Оператор-Функции Спектрального Параметра 82

Турметов Б.Х.
О Разрешимости Некоторых Обратных Задач Для Псевдопараболического Уравнения С Множественной Инволюцией 84

Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Матякубова С.К.
Интегрирование Нелинейного Уравнения Шредингера Отрицательного Порядка С Интегральным Источником В Классе Периодических Функций 86

Халмухамедов А.Р., Аликулов Т.Н.
О Спектральных Разложениях Эллиптического Дифференциального Оператора С Сингулярным Коэффициентом В Банаховом Пространстве 88

Abdulayev J. I., Eshniyozov A. I.
Uch Bozonli Sistemaga Mos Shryodinger Operatorining Invariant Qism Fazolari 90

Abdullayev J.I., Toshturdiyev A.M.
Cheksiz Potensialli Diskret Shryodinger Operatorining Xos Qiymatlari Haqida 92

Abduraimova Sh.
Barenblatt-Jeltov-Kochina Tipidagi Tenglamalarda Boshlang‘ich Shartni Topish Bo‘yicha Teskari Masala 95

Abdurashidova M.U., Buvayev K.T.
Sobolev Sinfidagi Uzluksiz Funksiyalarni Shryodinger Operatorining Xos Funksiyalari Bo‘yicha Yoyilmasi Haqida 96

Buvayev K.T., Davirova G.N.
Ikki Karrali Furye Qatorlarining Ba’zi Bir Elliptik Qismiy Yig‘indisi Uchun Umumlashgan Lokalizatsiya 97

Xasanov A.B., Mannonova Sh.A.
Yuklangan Hadli Hirota Tipidagi Tenglamani Cheksiz Zonali Davriy Funksiyalar Sinfida Integrallash 99
Xalmuxamedov A.R., Sharifova G.B.
Nuqtada Singulyar Potensialli Shryodinger Operatori Bilan Bog‘liq Spektral Yoyilmalarining Yaqinlashishi Haqida 103
Xalxo‘jayev A.M., Boymurodov J.H.
Panjaradagi Uch Zarrachali Shryodinger Operatori Xos Qiymatlarining Mavjudlik Shartlari 104
Xalxo‘jayev A.M., Xujamiyorov I.A.
Panjaradagi Kuchli Tasirlashuvchi Uchta Zarrachali Sistemaga Mos Shryodinger Operatori Spektri Haqida 106
Xalxo‘jayev A.M., Mahmudov H.Sh.
Panjaradagi Ikki Zarrachali Diskret Shryodinger Operatori Xos Qiymatlari Uchun Asimptotika 108
Xayitova X.G‘.
Panjaradagi Itarishuvchi Potensialli Uch Zarrachali Shryodinger Operatori Spektri 110

СЕКЦИЯ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
SECTION 2. BOUNDARY PROBLEMS FOR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Abdullaev O. Kh., Sobirjonov A. O.
Inverse Problem For A Fractional-Order Loaded Diffusion Equation With Involution Perturbation 112

Alieva A.R., Kozubekova G.S.
The Cauchy Problem For The Equation With A Differential Operator Of The Full Time Derivative Type 113

Alimov Sh.A., Kosimova M.Sh.
On The Solvability Of Hypersingular Equation Of Peridynamics In Three Dimensions 115

Alimov Sh.A., Qudaybergenov A.K.
On Poisson Type Integrals 117

Alimov Sh.A., Yormatov A.
On The Solvability Of Hypersingular Equation Of Peridynamics In Toroidal Space 119

Artykbaev A., Kholmurodova G. N.
Applying Of The Surface Theory Of Non-Euclidean Space To The Solution Of The Monge-Ampere Equation 120

Ashyralyev A., Sadybekov M. A.
Well-Posedness Of The Nonlocal Boundary Value Problem For Elliptic Equations With Samarskii–Ionkin Condition I 121

Assanova A. T.
On The Integral Problem For System Of Hyperbolic Equations With Generalized Piecewise-Constant Argument 122

Atajanova N. Q., Jalolova G. F., Eshimbetov M. R.
The Method Of Unified Transformation For The Schrödinger Equation On A Simple Metric Graph 124

Begulov U.U., Khaydarov A.T., Toshtemirov J.M.
Cauchy Problem For A Parabolic Equation Describing The Heat Propagation Process In A Non-Divergent Form Under The Influence Of An Exponentially Varying Density 125

Berdimuradov M.
Comparative Analysis of Maximum Likelihood Estimation and Bayesian Estimation under Right-Censoring Conditions 127

Boborakhimova M. I., Jamoldinova Sh. M.
Stability Analysis of Modified Parabolic Systems in Population Competition Models 129

Borikhanov M.B.
Behavior Of Solutions To Semilinear Evolution Inequalities In An Annulus 131

Dekhkonov F. N.
On One Time-Optimal Control Problem For A Fourth Order Parabolic Equation Involing Involution 131

Durdiev U.D., Odinaev R.R.
The Inverse Problem Of The Source For The Equation Of Forced Vibrations Of Beams 133
Eshimbetov M. R., Jalolova G. F.
The Fokas' Method For Inverse Control Problem For Heat Equation On Simple Metric Graph 134
Fayazov K. S., Juraeva D. Sh.
Inverse Problem For A System Of Mixed-Type Second-Order Differential Equations 135
Fayazov K.S., Rahimov D.I.
Nonlocal Problem For Pseudo-Parabolic Equation Of The Third Order 136
Bazargeldy Hudaykuliyev
Existence of Nonnegative Solutions of the Elliptic Equation with a Singular Potential in a Domain with a Conic Point 137
Ismoilova Sh. L., Atajanova N. Q.
The Unified Transformation Method For Heat Transfer Equation On General Metric Graphs 138
Jokhadze O., Kharibegashvili S.
On The Influence Of Lower Terms On The Correctness Of The Statement Of The Characteristic Dirichlet Problem For A Third-Order Linear Hyperbolic Equation 139
Popivanov N.I.
Nonlocal Regularization Of Protter-Morawetz BVP For The 3-D Tricomi Equation 140
Kamolova Z.D., Azizov M.S.
Initial Boundary Value Problem For Degenerate Beam Equation 141
Khajiev I. O., Shobdarov E. B.
Regularization Of The Boundary Value Problem For An Inhomogeneous High-Order Parabolic Equation With One Degeneracy Line 142
Koilyshov U. K., Beisenbayeva K. A.
Solution of multilayer problems for the heat conductivity equation by the Fourier method 143
Komilova N.J.
Cauchy problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind with the two lines and identical order of degeneracy 145
Kuliev K., Kulieva G.
Some Oscillation Conditions For Half-Linear Second Order Differential Equations 147
Makovetsky V. I.
Analogue Of The Sturm-Liouville Equation And An Effective Approach To The Inverse Problem 149
Muxammadjonov A.A.
Optimal Pursuit Differential Game Problem with Integral Constraints in Hilbert Space l_2 151
Nishonova Sh. T., Murodov S. X.
Nonlocal Boundary Value Problem For Fourth-Order Partial Differential Equations With Double Characteristics 152

Nuratdinov K.D., Jumaniyazova G.
On The Regularization Method For The Cauchy Problem For The Laplace Equation In The Stripe 153
Orifjonova Q. M., Azizov M. S.
An Initial Boundary Value Problem For A Loaded Heat Equation 155
Sattorov E. N., Pulatov O. U.
Carleman's Formula For A Two-Dimensional Gravitational Field In A Bounded Domain 156
Sobirov Z. A., Rakhimov K. U.
Inverse Source Problem For The Time-Fractional Airy Equation On The Metric Star Graph 158
Rasulov M. S., Norov A. Q.
On A Stefan Problem For A Predator-Prey System With Nonlinear Prey-Taxis 160
Rakhimov A.M.
Mixed Problem For One-Dimensional Poroelasticity Dynamic System 161
Sattorov E.N., Rustamov S.U.
Quaternionic Cauchy Integral Formula For α -Huperholomorphic Functions In Boundary Domain 163
Sartabanov Zh. A., Aitenova G. M., Abdikalikova G. A., Omarova B. Zh., Zhumagaziyev A. Kh.
Investigation Of A Periodic Boundary Value Problem For Voltaire Integro-Differential Systems By The Extended Differentiation Operator Method 165
Sattorov E.N., Ermamatova Z.E.
Carleman's Formula Of A Solutions Of The Poisson Equation 167
Shakir Aidos
An Inverse Problem For Pseudoparabolic Equation With Memory Term And Damping 169
Nishonova Sh.T., Sodiqova M.S.
On The Uniqueness Of The Solution Of A Boundary Value Problem For An Elliptic-Hyperbolic Equation 170
Toshtemirov B. H., Mamanazarov A. O.
Mixed Problem for Time-Fractional Equations with Variable Coefficients 171
Tursunov F.R., Shodiev D.S.
Regularization Of The Cauchy Problem For The Biharmonic Equation In A Three-Dimensional Unbounded Domain 172
Yergaliyev M. G.
Classes Of Solvability For Initial-Boundary Value Problems For Strongly Degenerate Hyperbolic Equations 174
Yeskermessuly A.
Very Weak Solutions Of The Heat Equation For Sturm-Liouville Operator With Singular Propagation And Potential 175
Yuldasheva A.V.
Solvability Of Singular Peridynamic Equation Of Static 176
Аббасова М.О.
Задача Со Смешанными Граничными Условиями Для Многомерного Уравнения Лапласа В Частях Шара 177

Ажмолдаев Г. Ф., Бекмаганбетов К. А., Чечкин Г. А., Чепыжов В. В.
Об Усреднении Аттракторов Уравнений Реакции-Диффузии В Области С Шероховатой Границей 179
Сатторов Э. Н., Актамов Х. С.
О Продолжении Магнитного Потенциала В Двумерной Области 181
Аллакова Ш. И.
Задача Со Смещением На Внутренних Характеристиках Для Одного Класса Уравнением Со Смещением 182
Апаков Ю. П., Меликузиева Д. М.
О Решение Краевой Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка, Содержащее Третью Производную По Времени В Полуограниченной Области 183
Арзикулов З., Хасанов А., Эргашев Т.Г.
Конфлюэнтные Гипергеометрические Функции И Их Применение К Решению Задачи Дирихле Для Уравнения Гельмгольца С Тремя Сингулярными Коэффициентами 185
Баротов Б. Х., Кожанов А. И.
Обыкновенные Интегро-Дифференциальные Уравнения Второго Порядка С Вырождением 187
Ван Минь
Нелокальные Задачи Для Эллиптических И Псевдоэллиптических Уравнений 188
Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф.
Об Эллиптическом Псевдодифференциальном Уравнении В Трехгранном Угле 188
Джамалов С. З., Худойкулов Ш. Ш.
О Линейной Двухточечной Обратной Задаче Для Многомерного Волнового Уравнения С Нелокальными Граничными Условиями 190
Джамалов С. З., Туракулов Х. Ш.
Об Одной Линейной Обратной Задаче Для Трехмерного Уравнения Чаплыгина С Полупериодическими Краевыми Условиями В Неограниченном Параллелепипеде 191
Джамалов С. З., Халхаджаев Б. Б.
Об Одной Линейной Обратной Задачи Для Многомерного Уравнения Смешанного Типа Второго Рода, Четвертого Порядка 192
Джамалов С. З., Шакиров А. А.
Об Одной Коэффициентной Обратной Задаче С Полунелокальными Краевыми Условиями Для Трехмерного Уравнения Трикоми В Параллелепипеде 193
Дурдиев Д. К.
Коэффициентная Обратная Задача Для Уравнения Смешанного Параболо-Гиперболического Типа С Нелокальными Условиями 194
Елгондиев К.К., Бекиев А.Б.
Разрешимость Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка С Импульсным Воздействием 196

Эргашева С. Б., Аманов Б. Б., Мирсабурова У. М.
О Единственности Задачи С Комбинированным Локальным И Нелокальным Условиями На Одной Граничной Характеристике Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа 198

Эрмаматова Ф.Э.
О Продолжении Решений Обобщенной Системы Коши-Римана В Многомерной Пространственной Области По Их Значениям На Куске Границы Этой Области 200

Эшонкулов А. Ю., Кожанов А. И.
Нелокальные Задачи С Условиями Интегрального Вида Для Вырождающихся Уравнений 201

Жураев Ф. М.
Краевые Задачи С Разрывными Условиями Для Нагруженного Уравнения Смешанного Типа, Вирождающегося Внутри Области 202

Зикиров О.С., Рахматов Н.Б.
О Некоторых Задачах С Интегральными Условиями Для Нагруженного Уравнения Третьего Порядка 205

Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М.
Смешанные Задачи С Интегральными Условиями Для Уравнения Третьего Порядка 206

Зуннунов Р. Т., Эргашев А. А., Худаёров А. А.
Об Одной Нелокальной Задаче Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода, В Области Эллиптическая Часть Которой - Прямоугольник 207

Иброхимов Х. К.
Решение Краевой Задачи Для Вязко-Трансзвукового Уравнения С Несимметричными Условиями По Времени 208

Исламов Н.Б.
Нелокальная Задача С Условием Франкля На Разных Частях Краев Разреза Вдоль Отрезка Линии Вырождения Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода 210

Исломов Б. И., Аликулов Е. К.
Краевая Задача Для Нагруженного Уравнения Смешанного Типа Третьего Порядка В Бесконечной Трехмерной Области 212

Исломов Б.И., Холбеков Ж.А.
Об Одной Нелокальной Краевой Задачи Для Нагруженного Параболо-Гиперболического Уравнения С Тремя Линиями Изменения Типа, Когда Нагруженная Часть Содержит Интегральный Оператор Дробного Порядка 214

Исмоилов А. И.
Обратная Задача Опеделения Источника Уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу 217

Карачик В. В.
Функция Грина Одной Задачи Для 3-Гармонического Уравнения 218

Каримов К. Т., Орипов Д. Д.
Начально-Краевая Задача Для Одного Вырождающегося Уравнения В Частных Производных Высокого Четного Порядка 219

Каримов Ш. Т., Тулашева Ё. И.
Задача Коши Для Неоднородного Уравнения Колебания Балки С Оператором Бесселя 220

Кылышбаева Г.К.
Краевая Задача С Разрывными Условиями Склеиваниями Для Уравнения Третьего Порядка С Эллиптико-Гиперболическим Оператором В Прямоугольной Области 222
Кожанов А.И., Бердимуродов А.Ж.
Краевые Задачи Для Гиперболических Уравнений С Двумя Временными Переменными В Нецилиндрических Областях 224
Кошанов Б.Д., Сматова Г.Д., Шыныбаева Н.М.
Разрешимость Краевых Задач С Общими Условиями Для Тригармонического Уравнения В Шаре 225
Кошанов Б., Султангазиева Ж., Оралбекова Н.
О Корректности Нелокальных Краевых Задач С Интегральным Условием Для Квазигиперболических Уравнений Высокого Порядка 227
Кожанов А.И.
Некоторые Классы Обратных Коэффициентных Задач Для Вырождающихся Дифференциальных Уравнений 229
Кожобеков К.Г., Сопуев А.А.
Об Одной Нелокальной Задаче Для Уравнения Смешанного Параболо-Гиперболического Типа Третьего Порядка С Линией Сопряжения $x = 0$ 229
Жамалов К.Н., Реимова Л.Ж., Бекиева А.А.
Разрешимость Краевой Задачи Для Неоднородного Вырождающегося Уравнения Четвертого Порядка 230
Мадрахимов У. С., Ражапова А. М., Матёкубова С. Ш.
О Полноте Системы Ортонормированных Собственных Векторов Четырёхмерного Оператора Дирака В Классах Соболева 232
Маматов Ж. А., Кожанов А. И.
Нелокальные Задачи С Интегральными Условиями Для Уравнений Фоккера-Планка 234
Мамажонов С. М.
О Второй Краевой Задаче По Времени Для Неоднородного Уравнения Четвертого Порядка С Переменными Коэффициентами 234
Маманазаров Д. С.
Нелокальные Краевые Задачи Для Квазипараболических Уравнений Третьего Порядка С Вырождением 236
Мирсабуров М., Маматмуминов Д.Т.
Задача С Недостающим Условием Смещения На Граничных Характеристиках Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа С Различными Порядками Вырождения 237
Махмудов К.О., Махмудов О.И.
Задача Коши Для Бигармонического Уравнения Теплопроводности 239
Мирзаев Ф.С., Тураев Р. Н.
Задача В Неограниченной Области С Условием Бицадзе-Самарского На Части Граничной Характеристике И Параллельной Ей Внутренней Характеристики Для Уравнения Геллерстедта С Сингулярными Коэффициентами 241
Мукумов А.Х.
Единственной Решение Обратной Задачи Об Источнике Для Уравнение Хопфа 243

Насирова Д. А., Исломов Б. И.
Аналог Задачи Трикоми Для Нагруженного Уравнения Параболо-Гиперболического Типа Второго Рода, Вырождающегося Внутри Области 244
Ниёзов И. Э., Махмудов О. И.
Задача Коши Для Бигармонического Уравнения В R^3 246
Одинаев Р.Р., Дурдиев У.Д.
Обратная Задача Определения Правой Части Дифференциального Уравнения Четвертого Порядка 247
Оспанов К. Н.
Условия Корректности Дифференциального Уравнения Третьего Порядка С Неограниченными Коэффициентами 248
Отарова Ж.А., Бекиев А.Б.
Разрешимость Одной Краевой Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка 249
Отелбаев М., Кошанов Б.
Оценка Решений Одного Класса Конечномерных Нелинейных Уравнений 251
Пятков С. Г.
Обратные Задачи Об Определении Источников 258
Попов Н. С.
Разрешимость Нелокальных Интегро-Дифференциальных Краевых Задач Многомерных Псевдогиперболических Уравнений 259
Попов С. В., Попова М. Н.
Краевые Задачи Для Операторно-Дифференциальных Уравнений Смешанного Типа И Их Приложения 260
Радкевич Е. В., Васильева О. А., Филиппов Г. А.
Обобщенное Распределение Максвелла И Стабилизация Решений Кинетического Уравнения Бродвелла 262
Рузиев М. Х., Казакбаева К. Б.
Краевая Задача Для Одного Класса Уравнений Смешанного В Области Эллиптическая Часть Которой-Полуполоса 265
Мирсабурова Д.М., Рузиева З.Ф.
Задача С Аналогом Условия Франкля На Отрезке Линии Вырождения И Смещения На Частях Граничних Характеристик Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа 266
Сафаров Ж. Ш., Файзуллаев Ш. М.
Об Одной Обратной Задаче С Интегральным Условием Переопределения 268
Ситник С. М., Муравник А. Б., Половинкин И. П.
Некоторые Задачи Современной Теории Дифференциальных Уравнений 270
Сопуев А., Нуранов Б.Ш.
О Краевой Задаче Для Смешанного Параболо-Гиперболического Уравнения Третьего Порядка С Младшими Членами С Линией Изменения Типа $x = 0$ 275
Сраждинов И. Ф.
Разрешимость Смешанной Задачи Для Одной Системы Составного Типа 276
Токторбаев А.М., Бекешов Т.О.
О Решении Системы Неклассических Интегральных Уравнений Вольтера 1- Рода 278

Турдиев Х.Х., Мирсабуров М.
Задача Франкля С Условием Хольмгрена На Нестандартном Отрезке Линии Вырождения 280
Турсунов Д. А., Шакиров К. К.
Задача Дирихле Для Кольца С Промежуточным Пограничным Слоем 282
Узакбаева Д.Е., Кадиркулов Б. Ж.
О Нелокальных Задачах Для Вырождающегося Уравнения Смешанного Типа Четвёртого Порядка 284
Умаров Р. А.
О Построение Решения Несимметричной Краевой Задачи Для Уравнения Третьего Порядка С Переменными Коэффициентами 285
Усмонова Ю. Ч., Жураев Б. Б.
Краевая Задача Для Одного Неклассического Уравнения Третъего Порядка С Кратними Характеристиками 287
Фаязова З.К.
Краевая Задача Для Дифференциального Уравнения Типа Соболева Четвертого Порядка Смешанного Типа 288
Фаязов К.С., Худайберганов Я.К.
Краевые Задачи Для Дифференциальных Уравнений Смешенного Типа Первого И Второго Порядка По Временной Переменной 289
Халхаджаев Б. Б.
О Слабом Обобщенном Решении Полунелокальной Краевой Задачи Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода Четвертого Порядка 290
Хамитов А. А., Апаков Ю. П.
О Решение Краевой Задачи Для Неоднородного Уравнения Третьего Порядка С Несимметричными Условиями В R^3 292
Хасанов М. М., Исмоилов О. Б.
Интегрирование Нагруженного Модифицированного Уравнения Кортевега-Де Фриза С Самосогласовнным Интегральным Источником 294
Хашимов А. Р.
Энергетические Оценки Специального Вида Для Решений Первой Краевой Задачи В Неограниченных Областях 296
Хошимов Д.З.
Задача О Равновесии Упругого Тела С Двумя Жёсткими Включениями 298
Хубиев К. У.
О Нелокальной Задаче Для Одного Характеристически Нагруженного Уравнения Гиперболо-Параболического Типа 299
Чориева С.Т., Юлдошева Ч.Т.
Об Одной Смешанной Задаче 300
Юсупов Ш.Б.
О Слабом Обобщенном Решении Нелокальной Краевой Задачи Периодического Типа Для Уравнения Трикоми Четвертого Порядка 301
Baltayeva U.I., Xasanov B.M., Egamberganova Z.A.
Yuklangan Hadli Bessel Operatorli Umumlashgan Kleyn-Gordon-Fok Tenglamasi Uchun Koshi Masalasi 302
Eshimbetov M. R., Ismoilova Sh. L.
Metrik Graflarda Issiqlik Tarqalish Tenglamasi Uchun δ' Ulanish Shartli Koshi Masalasi 304

Xolboyev.S B., Mamaradjabova.H R.
Uchinchi Tartibli Karrali Harakteristikali Tenglama Uchun Nolokal Chegaraviy Masala Yechimining Mavjudligi Haqida 305
Sadullayeva G. U., Eshimbetov J. R., Saparbayev Z. S.
Uchinchi Tartibli Karrali Xarakteristikaga Ega Bo'lgan Tenglamalar Uchun Metrik Graflarda Chegaraviy Masalalar 307
Sadullayeva G. U., Eshimbetov J. R.
Eyri Tipidagi Uchinchi Tartibli Tenglama Uchun Yulduzsimon Metrik Grafda Boshlang'ich-Chegaraviy Masala 308
Xalmuxamedov A.R., Kuchkorov E.I., Xudoyberdiyev A.A.
Bussinesk Tipidagi Differensial Tenglama Uchun Nolokal Masalaning Yechimi Haqida 310



Академик
ШАВКАТ АРИФДЖАНОВИЧ АЛИМОВ

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

2 марта 2025 года исполняется 80 лет со дня рождения известного ученого–математика, специалиста по спектральной теории дифференциальных операторов, математической физики и функционального анализа, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Государственной премии им. Беруни, организатора, внесший большой вклад в развитие и организацию науки и высшего образования, видного общественного и государственного деятеля, академика Шавката Арифджановича Алимова.

Биография

С 1952 по 1962 год учился в школе в г. Ташкенте. Окончив в 1962 году ташкентскую школу №88 с золотой медалью, поступил на физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который окончил в 1968 году по кафедре математики, получив диплом с отличием. С 1968 по 1970 год обучался в аспирантуре по этой же кафедре под научным руководством профессора В.А. Ильина.

Кандидат физико-математических наук (1970, ИПМ АН СССР), доктор физико-математических наук (1973, МГУ).

В мае 1970 года начал трудовую деятельность на открывшемся в марте этого же года факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, с 1974 года по 1984 год работал профессором кафедры общей математики данного факультета.

В сентябре 1984 года перешел на работу в Ташкентский государственный университет в должности профессора.

С 1985 по 1992 год работал заместителем директора Института математики АН Узбекистана, ректором Самаркандского государственного университета, ректором Ташкентского государственного университета, министром высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан.

После провозглашения независимости Узбекистана работал заместителем министра иностранных дел, чрезвычайным и полномочным послом Республики Узбекистан в Китайской Народной Республике.

С сентября 2000 года по июнь 2001 года работал исследователем (Visiting Researcher) в Калифорнийском технологическом институте (Caltech), США.

С 2012 года по 2017 года возглавлял лабораторию прикладной математики Малайзийского института микроэлектронных систем (MIMOS) в технопарке Куала-Лумпура, являясь одновременно главным ученым (Chief Scientist) этого института.

В настоящее время профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Научная деятельность

Основная научная деятельность Ш.А. Алимова связана со спектральной теорией дифференциальных уравнений с частными производными и

с теорией краевых задач для уравнений математической физики.

В семидесятых годах «20-го» века Ш.А. Алимовым было проведено исследование вопросов сходимости и суммируемости спектральных разложений, связанных с эллиптическими операторами произвольного порядка с гладкими коэффициентами. Им был, в частности, построен первый пример функции из L_p, средние Рисса спектрального разложения которой расходятся в каждой точке[2].

Ш.А. Алимовым по предложению А.В. Бицадзе изучались также вырождающиеся краевые задачи с наклонной производной для эллиптических уравнений второго порядка. Им был найден точный порядок потери гладкости решения в зависимости от степени вырождения векторного поля, определяющего граничные условия.[7]

Начиная с 2000-х годов Ш.А. Алимовым изучалась проблема граничного управления процессом теплообмена. В частности, им были найдены условия, обеспечивающие получение заданной средневзвешенной температуры в ограниченном объеме, и дана оценка минимально необходимого для этого времени в зависимости от мощности и расположения источников тепла или холода.[16]

В работах Ш.А. Алимова исследовались также математические аспекты теории перидинамики, связанные с механикой твёрдого тела.

После появления Covid-19 Ш.А. Алимовым проводились исследования, связанные с совершенствованием математических моделей процесса распространения пандемии.[20]

Имеет свыше 150 опубликованных научных и учебно-методических работ.

В 1978-1984 годах являлся ученым секретарем комиссии по школьным учебникам и учебным программам Отделения математики Академии наук СССР, которую возглавлял академик А.Н. Тихонов, одним из авторов учебников алгебры и начал анализа для средней школы, публиковавшихся издательством «Просвещение» с 1979 по 2019 гг.

Награды и звания

1973 – лауреат премии Ленинского комсомола за исследования по спектральной теории уравнений математической физики.

1984 – член-корреспондент АН Узбекской ССР.

1985 – лауреат Государственной премии Узбекской ССР имени Беруни.

2000 – академик АН Республики Узбекистан.

2019 – Орден «Мехнат шухрати» («Трудовая Слава»).

Избранные научные публикации Ш.А. Алимова

1. Sh. A. Alimov, V. A. Il'in. Condition exactes de convergence uniforme des developpements spectraux et de leurs moyennes de Riesz pour une extension autoadjoint arbitraire de l'operateur de Laplace. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, Serie A, t.237, 461- 464, 1970.

2. Ш. А. Алимов. О суммировании в L_p рядов по собственным функциям. Дифференц. уравнения, 6, №1, 164-171, 1970.

3. Ш. А. Алимов. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций. *Дифференц. уравнения*, 8, №9, 1609-1626, 1972.

4. Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никишин. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. *Успехи математ. наук*, 31, №6, 27-82, 1976.

5. Ш. А. Алимов. О спектральных разложениях функций из H_p^α. *Математический сборник*, 101, №1, 3-20, 1976.

6. Ш. А. Алимов. О разложимости непрерывных функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа. *Сибирский математический журнал*, 19, №4, 721-734, 1978.

7. Ш. А. Алимов. Об одной задаче с наклонной производной, *Дифференц. уравнения*, 17, №10, 1738-1751, 1981.

8. Ш. А. Алимов. О принадлежности градиента гармонической функции классу С.М.Никольского. *Труды МИАН СССР*, т. 180, 25-27, 1987.

9. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov, A. K. Pulatov. Multiple Fourier Series and Fourier Integrals. *Encyclopedia Math. Sci.*, vol.42, 1-95. Berlin-Heidelberg, Springer Verlag, 1991.

10. Sh. A. Alimov. On the spectrum of the Schrödinger operator for some many-particle systems. *Journ. of Phys. A: Math. Gen.*, 25, L615-L616, 1992.

11. Sh. A. Alimov. On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function. *J. of Fourier Analysis and Applications*, Birkhauser Boston, vol. 9, №1, 67-76, 2003.

12. Sh. A. Alimov. Sets of uniform convergence of Fourier expansions of piecewise smooth functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 10, Number 6, pp.635-644, 2004.

13. Ш. А. Алимов. О зависимости множества сходимости спектральных разложений от геометрии разрывов разлагаемой функции, *Математические заметки*, **79**:2 (2006), 178–193.

14. S. Albeverio, Sh. A. Alimov. On some integral equations in Hilbert space with an application to the theory of elasticity. *Integral Equations and Operator Theory*, 55, 2006, pp. 153-168.

15. Sh. A. Alimov. Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential, *Eurasian Math. Journal*, №2, 2007, 4-11.

16. S. Albeverio, Sh. A. Alimov. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, 2008, vol. 57, є 1, 58-68.

17. Sh. A. Alimov,Y. Cao, O. A. Ilhan. On the problems of peridynamics with special convolution kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*, Vol. 26, №. 3, 2014, pp. 301-321.

18. Sh. A. Alimov, M-L. Tham, .S. F. Chien, D. W. Holtby. Energy-Efficient Power Allocation for Distributed Antenna Systems With Proportional Fairness. IEEE Transactions on Green Communications and Networking, 2017, Volume: 1, Issue: 2, 145 – 157.

19. Sh. A. Alimov, S. Sheraliev. On the solvability of the singular equation of peridynamics, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, 64:5, pp. 873-887.

20. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov. Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation, *Journal of Inverse and Ill-Posed problems*, 2020, v. 28, No 5, 651-658.

21. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov. Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 8, №. 4, 1-8 (2022) .

22. Ш. А. Алимов, Н. М. Комилов. Об определении параметров, задающих тепловой режим, по выходным данным, *Дифференциальные уравнения*, 2022, том 58, №1, с. 23–36.

23. Sh. A. Alimov, A. Yuldasheva. Solvability of Singular Equations of Peridynamics on Two-Dimensional Periodic Structures. *J. Peridyn. Nonlocal Model.* **5**, 241–259 (2023).

24. Sh. A. Alimov, Sh. T. Pirmatov. On the Pinsky Phenomenon for B-Elliptic Operators, *Differential Equations*, 2023, Vol. 59, №. 5, pp. 606–617.

25. Sh. A. Alimov, A. Qudaybergenov. Determination of temperature at

the outer boundary of a body, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 274, №. 2, August, 2023, pp.159-171.

26. Sh. A. Alimov, S. T. Pirmatov. On the Smoothness of a Function at the Convergence Point of its Spectral Expansion Associated with B-elliptic Operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, Vol. 44, №. 8, pp. 3206–3216. 2023.

27. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov. On the Cauchy problem for Laplace equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2023, Volume 67, Issue 2, pp. 5-16.

28. Sh. A. Alimov, Sh. T. Pirmatov. On eigenfunction expansions of continuous functions associated with B-elliptic operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, Vol. 45, №. 9, pp. 4448–4458.

29. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov. Determining the steady-state temperature in an infinite layer, Differential Equations, 2024, Vol. 60, №. 8, pp. 1028–1041.

30. Sh. A. Alimov, G. I. Ibragimov. Time optimal control problem with integral constraints for the heat transfer process, Eurasian Mathematical Journal, Vol. 15, Number 1, 2024, 08-22.

СЕКЦИЯ 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
SECTION 1. SPECTRAL THEORY OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Integration Of The Negative Order Modified Korteveg-De Vries-Liouville Equation With An Additional Term In The Class Of Periodic Infinite-Gap Functons

Abdivokhidov A.A.

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
azamatabdivoxidov@mail.ru

Abstract. In this work, the mixed problem for negative order modified Korteweg-de Vries-Liouville(nmKdV-L) equation with an additional term is considered. Integrability of nmKdV-L equation with an additional term is proved in the class of periodic infinite-gap functions using the inverse spectral problem for periodic Dirac operator.

In 1977, Olver [1] proved a general theorem about recursion operators for symmetries of an evolution equation. Such an operator creates a new symmetry generator when applied to a known symmetry generator. John Verosky [2] proved the extended theorem about symmetries of nonlinear equations, defined a recursion operator for the symmetries of KdV equation and obtained the KdV equation of order negative one. After that, research on negative-order hierarchies of evolutionary equations intensified. Note that the negative order KdV equation, negative order mKdV equation, negative order AKNS equation and negative order mkDV-Liouville equation were studied in [3]–[7].

In this work, we consider a mixed problem for the negative order modified Korteweg-de Vries–Liouville (nmKdV–L) equation with an additional term of the form

$$\begin{cases} b(t)\left(u_{xt}-e^{2u}\right)-a(t)\left(u_{xxxt}-\left(2u_x\mu_{xt}\right)_x\right)+\mathrm{c}(t)u_{xx}=0, \\ \mu_{xx}=u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

with conditions

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x), \quad u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^5(\mathbb{R}) \\ u(x,t)\big|_{x=0}=\alpha(t),\ \mu_x(x,t)\big|_{x=0}=\beta(t) \\ [u_{xt}(x,t)-\mu_{xt}(x,t)]\big|_{x=0}=\gamma(t) \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions with respect to x satisfying the following smoothness conditions

$$u(x,t)\in C^{4,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0), \mu(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0) \tag{3}$$

Here $a(t), b(t), c(t) \in C[0;\infty)$ and $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ are given continuous differentiable bounded functions.

For simplicity, we study equation (1), in the case of $b(t)=1$.

We propose an algorithm for constructing periodic infinite-gap solutions $u(x,t), \mu(x,t), x\in\mathbb{R}, t>0$ of the mixed problem (1)–(3) by reducing it to the inverse spectral problem for a self-adjoint periodic Dirac operator of the form:

$$\mathcal{L}(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y, \quad x\in\mathbb{R}, \tau\in\mathbb{R}, t>0 \tag{4}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u_x(x,t) \\ u_x(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

The main result of this paper is contained in the following theorem.

Theorem 1. Let $(u(x,t), \mu_x(x,t)), x \in \mathbb{R}, t > 0$ be a solution of the mixed problem (1)–(3). Then the boundaries of the spectrum $\lambda_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ of the operator $\mathcal{L}(\tau,t)$ do not depend on τ and t, that is, $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, satisfy the first and second systems of Dubrovin differential equations, respectively:

$$1.\ \frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\xi_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{5}$$

$$2.\ \frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))g_n(\xi(\tau,t)), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{6}$$

In addition, the following initial conditions are satisfied:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{7}$$

where $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are spectral parameters of the Dirac operator $\mathcal{L}(\tau,0)$,

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau,t))} \cdot f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4a(t)\xi_n^2}\left[\frac{1}{\xi_n}e^{2u} + 2a(t)\xi_n(u_{\tau t} + \mu_{\tau t}) + c(t)\xi_n\right], \tag{8}$$

$$\xi \equiv \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots), \sigma \equiv \sigma(\tau,t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), \ldots).$$

The following trace formulas hold:

$$u(\tau,t) = \alpha(t) + \int_0^\tau \left\{ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} (-1)^{k-1}\sigma_k(s,t)h_k(\xi(s,t)) \right\} ds, \tag{9}$$

$$\mu_t(\tau,t) = \beta(t) + \int_0^\tau u_t^2(s,t)ds. \tag{10}$$

Lemma 1. The functions $(u(\tau,t), \mu_\tau(\tau,t)), \tau \in \mathbb{R}, t > 0$, constructed using the Dubrovin system of differential equations (6), (7) and formulas (9)-(10) satisfy equation (1).

Thus, we have proved the following theorem.

Theorem 2. If a periodic infinite-gap function $u_0(x)$ satisfies the condition $u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R})$ and $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ are bounded functions, then there exists a uniquely determined global solution $(u(x,t), \mu_x(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0)$ of the mixed problem (1)-(3), which is determined by formula (9) and (10), respectively, and belongs to the smoothness class (3).

References

1. Peter J. Olver. Evolution equations possessing infinitely many symmetries J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, №6. P. 1212–1215.

2. John M. Verosky. Negative powers of Olver recursion operators J. Math. Phys. 1991. Vol. 32, №7. P. 1733-1736.

3. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Boltaeva I.I. Integration of the negative order Korteweg-de Vries equation with a special source Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. Vol. 44, P. 31–43.

4. Urazboev G.U., Yakhshimuratov A.B., Khasanov M.M. Integration of negative-order modified Korteweg-de Vries equation in a class of periodic functions Theoretical and Mathematical Physics. 2023. Vol. 217, P. 1689–1699.

5. Sen-yue Lou, Wei-zhong Chen. Inverse recursion operator of the AKNS hierarchy Phsyics Letters A. 1993. Vol. 179. P. 217–274.

6. Ji Jie, Zhao Song-Lin, Zhang Da-Jun. Soliton Solutions for a Negative Order AKNS Equation Communications in Theoretical Physics. 2008. Vol. 50, №5. P. 1033–1035.

7. Khasanov A.B., Abdivokhidov A.A., Eshbekov R.Kh. Negative order modified Korteweg-de Vries-Liouville (nmKdV–L) Equation in the Class of Periodic Infinite-gap Functions Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, №12, P. 6380–6397.

Eigenvalues Of The Schrödinger Operator Of The Three Fermions System On A Lattice

Abdullaev J.I.[1], **Ergashova Sh.H.**[2]

[1,2] Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan ;
jabdullaev@mail.ru, sh.ergashova@mail.ru

In this work we consider Hamiltonian of a system of three fermions with mass 1, with interacting neighboring nodes potentials $\mu > 0$ on a lattice In the momentum representation the total three-body Hamiltonian appears to be decomposable (see, e.g. [1],[2])

$$H_\mu = \int\limits_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K)dK.$$

The fiber Hamiltonian $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$ depends parametrically on the total quasimomentum $K \in \mathbb{T}$. The corresponding three-particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$$

acts in Hilbert space

$$L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(p,q) = -f(q,p) = -f(p, K-p-q) = -f(K-p-q, q)\},$$

as

$$(H_0(K)f)(p,q) = E_K(p,q)f(p,q),$$

$$E_K(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K-p-q), \varepsilon(p) = 1 - \cos p,$$

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos(q-s)f(p,s)ds,$$

$$(V_2f)(p,q)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\cos(p-s)f(s,q)ds,$$

$$(V_3f)(p,q)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\cos(p-s)f(s,p+q-s)ds.$$

Two-particle Schrödinger operator $h_\mu(k)=h_0(k)-\mu v$ corresponding two fermions acts in

$$L_2^o(\mathbb{T}):=\{f\in L_2(\mathbb{T}):\ f(-p)=-f(p)\}$$

as follows ([2],[3]):

$$(h_\mu(k)f)(q)=\varepsilon_k(q)f(q)-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\sin q\sin sf(s)ds,$$

where $\varepsilon_k(q)=\varepsilon(\frac{k}{2}+q)+\varepsilon(\frac{k}{2}-q)=2-2\cos\frac{k}{2}\cos q$.

Theorem 1. Let $\mu>1$. Then for all $k\in\mathbb{T}$ the operator $h_\mu(k)$ has a unique simple eigenvalue

$$z_\mu(k)=2-\mu-\frac{\cos^2\frac{k}{2}}{\mu} \tag{1}$$

lying to the left of essential spectrum.

The essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$ coincides [1] with the union of the range of functions $z_\mu(K-p)+\varepsilon(p)$ and $E_K(p,q)$, i.e.

$$\sigma_{ess}(H_\mu(K))=[\Lambda_{min}(\mu,K),\Lambda_{max}(\mu,K)]\cup[E_{min}(K),E_{max}(K)], \tag{2}$$

where

$$\Lambda_{min}(\mu,K)=\min_{p\in\mathbb{T}}\{z_\mu(K-p)+\varepsilon(p)\},\ \ \Lambda_{max}(\mu,K)=\max_{p\in\mathbb{T}}\{z_\mu(K-p)+\varepsilon(p)\},$$

$$E_{min}(K)=\min_{p,q\in\mathbb{T}}E_K(p,q),\quad E_{max}(K)=\max_{p,q\in\mathbb{T}}E_K(p,q).$$

The intervals $[\Lambda_{min}(\mu,K),\Lambda_{max}(\mu,K)]$ and $[E_{min}(K),E_{max}(K)]$ are called "two particle branch" and "three particle branch" of the essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$, respectively.

For the case when $K=0$ from (1) follows that

$$\Lambda_{min}(\mu,0)=2-\mu-\frac{1}{\mu}\ \text{ and }\ \Lambda_{max}(\mu,0)=4-\mu.$$

One can see that

$$E_{min}(0)=0,\quad E_{\max}(0)=\frac{9}{2}.$$

Hence equality (2) takes the following form

$$\sigma_{ess}(H_\mu(0))=\left[2-\mu-\frac{1}{\mu},\ 4-\mu\right]\cup\left[0,\ \frac{9}{2}\right].$$

Operator $H_\mu(K)$ does not have eigenvalues on the right of $E_{max}(K)$.

Theorem 2. *There exists μ_0 such that for any $\mu > \mu_0$ the operator $H_\mu(0)$ has unique simple eigenvalue below the essential spectrum. Moreover, the corresponding eigenfunction belongs to the subspace*

$$L_2^{as,o}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^2) : f(-p,-q) = -f(p,q)\}.$$

References

1. Abdullaev Zh.I. Finiteness of the discrete spectrum for non-trivial values of the full quasi-momentum in the system of three bosons on a lattice Russian Mathematics Surveys. 2007. Vol. 62, №1. P. 175–177.

2. Khalkhuzhaev A.M. The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice Russian mathematics. 2017. Vol. 61. №9. P. 67–78

3. Abdullaev J.I. and Ergashova Sh.H. Eigenvalues of the Schŕodinger operator corresponding to a system of three fermions on a lattice Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45. №8. P. 3821–3834.

On Eigen-And-Associated Functions Of A Nonlocal Spectral Problem For The Harmonic Equations

Arzikulov A.U.

Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan;
a.arziqulov@mail.ru

Abstract. In this work, Dirichlet conditions are specified on part of the boundary, and a nonlocal connection with the values of the solution inside the domain is specified on the remaining part.

Nonlocal problems for the Laplace equation were first proposed and studied for the case of a rectangle in the fundamental work of A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii. The development of this study was continued in the work of A. V. Bitsadze, where the Laplace equation in the unit circle is considered. Some generalizations of this problem are studied in the works of D. G. Gordeziani, Ya. A. Roytberg and Z. G. Sheftel, M. Otelbaev and A. N. Shinibekov, A. L. Skubachevsky, Sh. A. Alimov and A. K. Pulatov and others.

The study of the spectrum, eigenfunctions and associated functions of nonlocal problems is the subject of research by a number of mathematicians, among them we note the works [1]–[4].

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be the unit ball and $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}, 0 < r < 1$ the sphere and let $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ be continuous functions defined on $\partial\Omega$.

In this paper we will consider the following spectral problem

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \lambda\alpha(x)u(rx) + \beta(x)\frac{\partial u(rx)}{\partial v_x}, x \in \partial\Omega, 0 < r < 1,$$

Defintion 1. If there exists a (complex-valued) function $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ that is not identically equal to zero and satisfies conditions (1), (2), then a complex number λ is called an eigenvalue of problem (1), (2) and the function $u(x)$ is called an eigenfunction of problem (1), (2).

Definition 2. Let $u_0(x)$ be an eigenfunction of problem (1), (2) corresponding to the eigenvalue λ. We will say that the functions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ are associated with u_0 if $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ and the equalities are satisfied

$$\Delta u_k(x) = 0, x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u_k(x)}{\partial n_x} = \lambda\alpha(x)u_k(rx) + \beta(x)\frac{\partial u_k(rx)}{\partial v_x} + \alpha(x)u_{k-1}(rx), x \in \partial\Omega, 0 < r < 1, k = 1, 2, \ldots, m.$$

The following statement holds.

Theorem 1. Let $\alpha(x) > 0$. Then problem (1), (2) has a countable number of eigenvalues λ_k, which can be numbered in order of increasing absolute values:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_{\mathrm{K}}| \leq \ldots$$

For any $\varepsilon > 0$, there are at most finitely many eigenvalues outside the angle $\{z \in C : |\arg z| < \varepsilon\}$.

In order to formulate the result on the completeness of the system of eigen- and associated functions, we introduce the space $H^s(\Omega)$, where $s > 0$. Namely, we will say that a (complex-valued) function $f \in H^s(\Omega)$ if f is harmonic in Ω and belongs to the Sobolev class $W_2^s(\Omega)$. The space $H^s(\Omega)$ will be considered as a subspace of $W_2^s(\Omega)$.

Theorem 2. If $\alpha(x) > 0$, then the system of eigen-and associated functions of problem (1), (2) is complete in the space $H^{1/2}(\Omega)$, and the eigenvalues asymptotically approach the real axis.

We find a solution to the spectral problem (1), (2) in the form of a simple layer potential

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \alpha(y)\frac{\sigma_n}{|x-y|^{n-2}}\varphi(y)ds(y), \tag{3}$$

where φ is the density of the simple layer potential,$S = \partial\Omega$.

The proof of Theorems 1 and 2 is based on reducing problem (1), (2) to an equivalent integral equation and on the subsequent application of M.V. Keldysh's theorem [5].

Literature

1. Alimov Sh.A. On one spectral problem of Bitsadze-Samarskii type // Dokl. Akad. Nauk USSR. 1986. Vol. 287, №. 6. P. 1289–1290.

2. Alimov Sh.A., Pulatov A.K. On one non-local problem of Bitsadze-Samarskii // Izv.Akad. Nauk USSR. Ser. Math-phys. 1988. Vol. 2. P. 6–11.

3. Alimov Sh.A., Pulatov A.K. On one spectral problem of Bitsadze-Samarskii // Uzb. Math. Journal. 1991. Vol. 2. P. 3–5.

4. Arzikulov A.U. On the Eigenfunctions and Associated Functions of a Nonlocal Spectral Problem for a Biharmonic Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, №. 1. P. 364–369.

5. Keldysh M.V. On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint operators // Russian Mathematical Surveys. 1971. Vol.26, №. 4. P. 15–41.

Explicit Solution For The Matrix Negative Order Modified Korteweg-De Vries Equation Via Matrix Triplet

Urazboev G U.[1,2], **Babadjanova A. K.**[1,2], **Atanazarova Sh. E.**[2]

[1]Urgench State University, Urgench,Uzbekistan;
gayrat71@mail.ru, aygul.babadjanova1987@gmail.com
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Urgench, Uzbekistan
atanazarova94@gmail.com

The negative order Korteweg-de Vries equation was firstly constructed by J.M. Verosky in 1991 [1]. This discovery has become foundation for constructing many other meaningfully systems and investigating their important properties [2]-[3].

In this study, we consider the integration of the following matrix negative order modified Korteweg-de Vries equation (mnmKdV)

$$\begin{cases} \omega_{xx}(x,t) = \upsilon^2(x,t) \\ \upsilon_{xt}(x,t) + \upsilon(x,t)\omega_{xt}(x,t) + \omega_{xt}(x,t)\upsilon(x,t) + \alpha\upsilon(x,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

under the initial condition

$$\upsilon(x,t)|_{t=0} = \upsilon_0(x). \tag{2}$$

and the boundary conditions for all $t > 0$

$$\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty}[(1+|x|)\,\|\upsilon(x,t)\| + \|\upsilon_{xt}(x,t)\|]dx < \infty \\ \begin{cases} \omega(0,t) = 0_m, \;\; \omega_x(x,t) \to 0_m, & x \to \infty \\ \omega_{xx}(x,t) \to 0_m, \;\; \omega_{xt}(x,t) \to 0_m, & x \to \pm\infty. \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

where $\upsilon(x,t)$ and $\omega(x,t)$ are $(m \times m)$ square matrices and the matrix norm is defined as $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|$. Besides, let the matrix $\upsilon_0(x)$is a real and symmetric $(m \times m)$ matrix having the following properties:

- $$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,\|\upsilon_0(x)\|\,dx < \infty; \tag{4}$$

- Matrix operator $L(0) = -iJ\frac{d}{dx} - V_0(x)$ does not have spectral singularities, as well as, it possesses exactly $2N$ simple eigenvalues $\lambda_1(0)$, $\lambda_2(0)$, ..., $\lambda_{2N}(0)$, such that $Im(\lambda_k(0)) > 0$, $\lambda_{N+k}(0) = -\lambda_k(0)$, $k = 1, 2, ..., N$.

  Here $V_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\upsilon_0(x) \\ i\upsilon_0(x) & 0 \end{pmatrix}$.

As the system (1) is completely integrable, the system can be written in terms of Lax pairs by the following compatible condition

$$L_t = [L, B] \tag{5}$$

where

$$L(t) = -iJ\frac{d}{dx} - V(x,t), \tag{6}$$

$$B(t) = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{i\alpha}{2}J + iW_{xt}J\right) + \frac{V_t}{2\lambda}. \tag{7}$$

Here $V(x,t) = i\begin{pmatrix} 0_m & \upsilon(x,t) \\ \upsilon(x,t) & 0_m \end{pmatrix}$ and $W(x,t) = \begin{pmatrix} \omega(x,t) & 0_m \\ 0_m & \omega(x,t) \end{pmatrix}$ are $2m \times 2m$ matrices, where $\upsilon = \upsilon(x,t)$ and $\omega = \omega(x,t)$ are real symmetric $m \times m$ matrices and $J = \begin{pmatrix} I_m & 0_m \\ 0_m & -I_m \end{pmatrix}$, I_m and 0_m are unit and zero matrices, respectively.

In the work [3], the negative order modified KdV equation with a self-consistent source was considered by applying the inverse scattering transform method and the explicit representations of soliton solution were derived using matrix triplet (A, B, C). In this work, we employ matrix triplet method for finding the explicit form of the matrix function $\upsilon(x,t)$ in the aforementioned sense.

Reference

1. Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators// J. Math. Phys. 1991. Vol.32. pp. 1733-1735.

2. Urazboev G.U., Baltaeva, I.I. Babadjanova, A.K. //Soliton solutions of the negative-order nonlinear Schrödinger equation. 2024. Vol.219. pp.761–769.

3. Urazboev G. U., Baltaeva I.I., Atanazarova Sh.E. //Analysis of the solitary wave solutions of the negative order modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source// 2025. Vol.13. pp. 101108.

On The Matrix Negative Order Modified Korteweg-De Vries Equation With A Source

Babadjanova A. K.[1,2], Atanazarova Sh. E.[2], Axmadjonov M.[1]

[1]Urgench State University, Urgench,Uzbekistan;
aygul.babadjanova1987@gmail.com,murodbekaxmadjonov7@gmail.com
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Urgench, Uzbekistan
atanazarova94@gmail.com

We consider the negative-order modified Korteweg-de Vries equation[1,2] in the matrix case with a self-consistent source[3], which is given via the following system of equations

$$\begin{cases} \rho_{xx} = q^2 \\ q_{xt} + \alpha q + 2\rho_{xt}q = \sum_{k=1}^{2N}\left(\Phi_{k1}^2 + \Phi_{k2}^2\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \mathrm{t} \geq 0, \\ L\Phi_k = \xi_k\Phi_k, \quad k = 1, 2, \ldots 2N, \end{cases} \tag{1}$$

under the initial condition

$$q(x,0) = q_0(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

where $q(x,t)$ and $\rho(x,t)$ are $(m \times m)$ square matrices and α is real number. In addition, let the matrix $q_0(x)$ is a real and symmetric $(m \times m)$ matrix having the following properties:

- $$\int_{-\infty}^{\infty}(1 + |x|)\,\|q_0(x)\|\,dx < \infty; \tag{3}$$

- Matrix operator $L(0) = -iJ\frac{d}{dx} - V_0(x)$ possesses exactly $2N$ simple eigenvalues $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots \xi_{2N}(0)$ such, that $Im\xi_k(0) > 0$, $\xi_{N+k}(0) = -\xi_k(0)$, $k = 1, \ldots, N$ and has no spectral singularities. Here, $V_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & iq_0(x) \\ iq_0(x) & 0 \end{pmatrix}$.

$\Phi_k = (\Phi_{k1}(x,t), \Phi_{k2}(x,t))^T$ is an eigenvector-function of the operator L corresponding to the eigenvalue ξ_k. Furthermore, the function $q = q(x,t)$ is sufficiently smooth matrix function of x and t, for all $t \geq 0$ satisfying the requirement

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|q(x,t)|\,dx < \infty, \\ \rho_{xt}(x,t) \to 0,\ q_{xt}(x,t) \to 0, \quad x \to \pm\infty. \end{cases} \tag{4}$$

It is also assumed that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{k1}\Phi_{k2}dx = d_k(t)I_m, k = 1, 2, \ldots 2N \tag{5}$$

where $d_k(t)$ is given continuous nonzero functions satisfying the conditions $d_k(t) = d_n(t)$ for $\xi_k = -\xi_n$. The main aim of this work is using IST method for the operator L for finding the set of solutions $\{q(x,t),\ \rho(x,t), \Phi_k(x,t), k = 1, 2, ..., N\}$ of the problem (1)-(5). Therefore, we need the time evolution of the scattering data $\left\{R(\lambda),\ \lambda_j,\ \Gamma_j,\ j = \overline{1,N}\right\}$ of $L(t)$, which is given by the following main theorem.

Theorem. If the set of functions $\{q(x,t), \rho(x,t), \Phi_j(x,t),\ j = \overline{1,N}\}$ satisfies the problem (1)-(5), then the scattering data $\{R(\lambda),\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_N,\ \Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_N\}$ of $L(t)$ fulfill the following differential equations

$$\dot{\lambda}_j(t) = 0,\ \dot{\Gamma}_j(t) = -\frac{i}{2\lambda_j}\Gamma_j(t) - \Gamma_j(t)d_j(t), \quad j = \overline{1,N}$$

$$\dot{R}(\lambda,t) = -\frac{i}{2\lambda}R(\lambda,t).$$

For representing the explicit soliton solutions of the matrix negative-order mKdV with a self-consistent source we rely on the triplet matrix method. The relations between the scattering data and triplet matrices (A, B, C) are well given in the work [4]. Using this method we observe that the kernel $\Omega(x,t)$ can be written in the form

$$\Omega(x+y,t) = Ce^{D_j(t)}e^{-\frac{t}{2}A^{-1}}e^{-A(x+y)}B,$$

with $D_j(t) = \int_0^t d_j(\tau)d\tau I_m$, then solving Marchenko equation

$$K_2(x,y) - \Omega^T(x+y) + \int_x^\infty \int_x^\infty K_2(x,\nu)\Omega(\nu+z)\Omega^T(z+y)d\nu dz = 0_m$$

we find that

$$K_2(x,x,t) = B^T F^{-1}(x,t)C^T,$$

and

$$q(x,t) = -2B^T F^{-1}(x,t)C^T,\ \rho_{xx}(x,t) = q^2(x,t)$$

where

$$F(x,t) = e^{D(t)+2A^T x+\frac{t}{2}(A^T)^{-1}} + Qe^{-2Ax-D(t)-\frac{t}{2}(A)^{-1}}N$$

$$Q = \int_0^\infty e^{-A^T\nu} C^T C e^{-A\nu} d\nu,$$
$$N = \int_0^\infty e^{-Az} B B^T e^{-A^T z} dz.$$

Using the following integral representation for the Jost solution of $LY = \xi Y$

$$\psi(x,\lambda,t) = e^{i\lambda x} \begin{bmatrix} 0_m \\ I_m \end{bmatrix} + \int_x^\infty e^{i\lambda y} \begin{pmatrix} K_2(x,y,t) \\ K_4(x,y,t) \end{pmatrix} dy,$$

we can compute $\Phi_j(x,t)$ by (5).

Literature

1. Qiao Z., Strampp,W. Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system // Physica A. 2002; 313; 365-380.

2. Wazwaz A.M. Negative-order integrable modified KdV equations of higher order // Nonlinear Dyn. 2018;93; 1371–1376.

3. Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Atanazarova S.E. Analysis of the solitary wave solutions of the negative order modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. Volume 13, March 2025, 101108

4. Demontis F. Exact solutions of the modified Korteweg-de Vries equation. // Theor. Math. Phys. 2011; 886-897.

Quantitative Analysis Of Some Classes Of Integral Operators

Bazarkhanov D. B.[1]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
dauren.mirza@gmail.com

We consider integral operators $\mathbb{K}$ with kernels $K : \mathbb{T}^{m+n} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ of the form

$$g(x) = \mathbb{K}(f,x) = \int_{\mathbb{T}^n} K(x,y) f(y) dy$$

(here $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — $k-$dimensional torus, $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{T}^m$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{T}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$).

We fix the numbers $k \in \mathbb{N} : k \le m$ and $l \in \mathbb{N} : l \le n$, the vectors $\mathtt{m} = (m_1,\dots,m_k) \in \mathbb{N}^k$ and $\mathtt{n} = (n_1,\dots,n_l) \in \mathbb{N}^l$ such that $m_1 + \dots + m_k = m$, $n_1 + \dots + n_l = n$, as well as the "partitions" $x = (x^1,\dots,x^k) \in \mathbb{T}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{T}^{m_k}$ and $y = (y^1,\dots,y^l) \in \mathbb{T}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{T}^{n_l}$ of variables $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{T}^m$ and $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{T}^n$ respectively.

Further, we consider the product Nikol'skii – Besov spaces $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$, $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $B^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ and the product Lizorkin – Triebel spaces $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{(m+n)})$, $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $L^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ (of function/distribution), as well as the Lebesgue spaces $L_r(\mathbb{T}^m)$ (here $S = (S_1,\dots,S_{k+l}) \in \mathbb{R}^{k+l}$, $S^1 = (S_1,\dots,S_k), S^2 = (S_{k+1},\dots,S_{k+l})$; $s = (s_1,\dots,s_k) \in \mathbb{R}^k$, $t = (t_1,\dots,t_l) \in \mathbb{R}^l$, $P = (P_1,P_2)$, $Q = (Q_1,Q_2)$, $1 \le P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2,\ p,\ q,\ r,\ u \le \infty$).

Definitions of $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ can be found in [1] (the spaces $B^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$, $L^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ are defined analogously). The spaces $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$ and $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{(m+n)})$ are defined similarly

to $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ and $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ respectively, only the norms $\|\cdot\,|\,L_p(\mathbb{T}^m)\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_q(\mathbb{N}_0^k)\|$ should be replaced by the mixed norms $\|\cdot\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_Q(\mathbb{N}_0^{k+l})\|$ (here the norms $\|\cdot\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_Q(\mathbb{N}_0^{k+l}\|$ are defined as follows : for a function $f:\mathbb{T}^{m+n}\to\mathbb{C}$ and a sequence $\mathrm{C}=(c_{(k,l)})_{k\in\mathbb{N}_0^k,l\in\mathbb{N}_0^l}\subset\mathbb{C}$,

$$\|f\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\| = \|\|f(x,y)\,|\,L_{P_1,x}(\mathbb{T}^m)\|\,|\,L_{P_2,y}(\mathbb{T}^n)\|,$$

$$\|\mathrm{C}\,|\,\ell_Q((\mathbb{N}_0^{k+l})\| = \|\|c_{(k,l)}\,|\,\ell_{Q_1,k}(\mathbb{N}_0^k)\|\,|\,\ell_{Q_2,l}(\mathbb{N}_0^l)\|.$$

In the talk, we will discuss the weak asymptotics of the approximation numbers and the Kolmogorov widths of integral operators $\mathbb{K}$ with kernels K belonging to $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$ or $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$, acting from $B^{t\,\mathtt{n}}_{u\,v}(\mathbb{T}^n)$ or $L^{t\,\mathtt{n}}_{u\,v}(\mathbb{T}^n)$ into $L_r(\mathbb{T}^m)$, as well as into $B^{s\,\mathtt{m}}_{r\,w}(\mathbb{T}^m)$ or $L^{s\,\mathtt{m}}_{r\,w}(\mathbb{T}^m)$ for a number of relations between the parameters of kernel spaces, function spaces, and target spaces.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant №. BR20281002).

References

1. Bazarkhanov D. B. Optimal Cubature Formulas on Classes of Periodic Functions in Several Variables // Proc. Steklov Inst. Math. 2021. P.312. P. 16–36.

On The Stability Of The Problem Of Function Reconstruction From Incomplete X-Ray Data In Four-Dimensional Space

Begmatov A.Kh.[1], Ismoilov A.S.[2]

[1]Joint Belarus-Uzbek Intersectoral Institute of Applied Technical Qualifications, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: begmatov59@gmail.com
[2]Uzbek-Finnish Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: alisher_8778@mail.ru

We consider an inverse problem of integral geometry in $\mathbb{R}^4$ with incomplete data, associated with reconstructing a function from the values of its X-ray transform along straight lines emanating from a fixed point in a limited set of directions. A uniqueness theorem is established and a logarithmic stability estimate is obtained, based on harmonic measure and analysis in two-dimensional sections.

Let $f(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ and let $B\subset\mathbb{R}^4$ be a bounded domain with smooth boundary, where f is defined and vanishes identically outside B. Let $x_0\in\mathbb{R}^4\setminus\overline{B}$ be a fixed point and let $\Gamma\subset\mathbb{S}^3$ be an open set of directions such that for every $\omega\in\Gamma$, the line $\ell_{x_0,\omega}=\{x_0+s\omega\}$ intersects B. The integrals of f along these lines are assumed to be known:

$$Rf(\omega)=\int_{\ell_{x_0,\omega}\cap B} f(x)\,ds,\quad \omega\in\Gamma.$$

The aim is to estimate the norm of f under small perturbations in Rf. It is shown that under appropriate geometric coverage, a logarithmic stability estimate holds:

$$\|f\|_{L^2(B)}\le\frac{C}{|\ln\varepsilon|^\alpha},\quad \varepsilon\to 0,$$

where $\varepsilon = \|Rf\|_{C(\Gamma)}$, and the constants $C > 0$, $\alpha > 0$ depend only on the geometry of the problem. The method is based on reduction to a problem of analytic continuation in planar sections using harmonic measure, as developed in [1, 4]. The uniqueness theorem follows classical approaches as in [3], with generalizations proposed in [2].

Literature

1. Begmatov A.Kh. Some problems of integral geometry with incomplete data // Siberian Mathematical Journal. – 2001. – Vol. 42, №. 3. – P. 428–434.

2. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. – Moscow: Nauka, 1980. – 286 pp.

3. Gelfand I., Graev M., Vilenkin N. Generalized Functions, Vol. 5: Integral Geometry and Representation Theory.– AMS, 1966.

4. Waters A. Stability and Uniqueness for X-ray Transforms... // Inverse Problems. – 2015. – 31(10).

On The Hirota-Type Equation With A Self-Consistent Source In Integral Form

Eshbekov R.Kh.

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; rayxonbek@mail.ru

Abstract. In this work, the Cauchy problem is proposed for the Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form in the class of periodic infinite-gap functions.

In many scientific disciplines, including biology, plasma physics, fluid mechanics, chemical physics, optical fibers and others, nonlinear evolutionary equations are frequently employed as models to explain physical phenomena. In addition, integrating nonlinear partial differential equations using the method of inverse spectral problem is one of the greatest scientific discoveries of the last century and has many practical applications. The first breakthrough in this direction was made by Gardner, Green, Kruskal and Miura in 1976 [1]. They found a general solution to the Cauchy problem for the famous Korteweg-de Vries (KdV) equation using the inverse spectral problem method of scattering theory for the Sturm-Liouville operator.

In 1973, Hirota [2] obtained the exact $N-$ envelope-soliton solutions of the following equation, which is a combination of the complex mKdV(cmKdV) and NLS equations and was later called the Hirota equation:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + i3\alpha|\psi|^2\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + i\gamma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \delta|\psi|^2\psi = 0,$$

where $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. The Hirota equation explains the behavior of nonlinear waves in some physical systems and is also used in the study of fiber optic systems and in the mechanics of telecommunications. In papers [3]-[5], the following convenient form of the Hirota equation is studied from various perspectives:

$$iu_t + \alpha(u_{xx} \pm 2|u|^2u) + i\beta(u_{xxx} \pm 6|u|^2u_x) = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

In this work, we consider the following Cauchy problem for a Hirota-type equation with a self-consistent source in integral form:

$$\begin{cases} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6p_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[-q_{xx} + 2q\left(p^2+q^2\right)\right] - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu,t)s_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-\right)d\mu, \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6q_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[p_{xx} - 2p\left(p^2+q^2\right)\right] + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu,t)s_1(\pi,\mu,t)\left(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-\right)d\mu, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \\ q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions in x :

$$\begin{cases} p(x+\pi,t) = p(x,t),\ q(x+\pi,t) = q(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ p(x,t), q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{cases} \tag{3}$$

Here $a(t), b(t) \in C([0;\infty))$ are given continuous bounded functions and $\delta(\mu,t)$ is a given real continuous function with the following uniform asymptotes

$$\delta(\mu,t) = O\left(\frac{1}{1+\mu^2}\right),\ \mu \to \pm\infty. \tag{4}$$

In addition, the function $\psi^{\pm}(x,\mu,t) = \left(\psi_1^{\pm}(x,\mu,t), \psi_2^{\pm}(x,\mu,t)\right)^T$ are Floquet solution, normalized by the condition $\psi_1^+(0,\mu,t)$, of the following Dirac equation

$$\mathcal{L}(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5}$$

and defined as follows:

$$\psi(x,\mu,t) = c(x,\mu,t) + \frac{s_2(\pi,\mu,t) - c_1(\pi,\mu,t) \mp \sqrt{\Delta^2(\mu)-4}}{2s_1(\pi,\mu,t)} \cdot s(x,\mu,t), \tag{6}$$

where $c(x,\mu,t) = (c_1(x,\mu,t), c_2(x,\mu,t))^T$ and $s(x,\mu,t) = (s_1(x,\mu,t), s_2(x,\mu,t))^T$ are solutions of equation (4) with initial conditions $c(0,\mu,t) = (1,0)^T$ and $s(0,\mu,t) = (0,1)^T$ respectively, the function $\Delta(\mu,t) = c_1(\pi,\mu,t) + s_2(\pi,\mu,t)$ is called the Lyapunov function for equation (4).

The main result of this work is contained in the following theorem.

Theorem. If the initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ satisfy the conditions

$$p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),\ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

then there exists a uniquely determined global solution $p(\tau,t), q(\tau,t)$ of the problem (1)-(3) belonging to the class $C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$, which are determined by the sum of the following series, respectively:

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t)\right),$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)).$$

Literature

1. Gardner S., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, №. 19. P. 1095-1098.

2. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14, P. 805-809.

3. Xi-Hu Wu, Yi-Tian Gao, Xin Yu. On a Hirota equation in oceanic fluid mechanics: Double-pole breather-to-soliton transitions // Chaos, Solitons and Fractals. 2024. Vol.183, 114874.

4. Yaning Tang, Zaijun Liang, Meiling Zhou. New exact travelling solutions of the generalized Hirota equation // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. 2021. Vol. 4. P. 100-112.

5. Khasanov A.B., Eshbekov R.Kh., Khasanov T.G. Integration of a Non-Linear Hirota Type Equation with Additional Terms // Izvestiya: Mathematics. 2025. Vol. 89. №.1, 196-219 (2025).

On The Spectral Problem Of Bitsadze-Samarskii Type And Its Application To Solving The Boundary Value Problem For A Degenerate Elliptic Equation Of Fractional Order

Kadirkulov B.J.[1], **Ergashev O.T.**[2]

[1]Department of Mathematics and Physics, Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan; V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; b.kadirkulov@afu.uz

[2]V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; okiljonergashev@gmail.com

In this paper, a nonlocal boundary value problem is studied for a degenerate elliptic equation of fractional order, where the boundary condition for the spatial variable x is given in the form of a nonlocal condition of the Bitsadze-Samarskii type. Consequently, the corresponding differential operator is non-self-adjoint, which raises challenges in examining the completeness and basis properties of the root functions of such operators. The solution is constructed as a series sum over the eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem.

Let $\alpha\in(0,1]$, $\varphi(t)$ be differentiable function on the interval $(0,T)$, $T>0$ and let ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}$ be the Caputo integro-differential operator, defined by the formula

$${}^{C}D^{\alpha}_{0+}\varphi(t)=I^{1-\alpha}_{0+}\varphi'(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds.$$

The sequential derivative of order $k\alpha, k\in N$ of the function $\varphi(t)$ is defined by the formula

$$D^{k\alpha}\varphi(t)=D^{\alpha}D^{(k-1)\alpha}\varphi(t), k=2,3,...,$$

where D^{α} is the Riemann-Liouville or Caputo fractional-order operator. Note that the concept of sequential derivative was introduced in [1], and various properties of these operators were studied in [2], [3].

Let $\Omega = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < 1;\ t > 0\}$ and $\bar{\Omega} = \{(x,t) \in R^2 : 0 \le x \le 1;\ t \ge 0\}$ are a half-strip and a closed half-strip, respectively. In the domain Ω consider the equation

$$D_t^{2\alpha} u(x,t) + t^{2\beta} u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

where $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \beta > -\alpha$, $D_t^{2\alpha} = D_t^{\alpha} D_t^{\alpha}$, $D^{\alpha}\varphi(t) = {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\varphi(t)$ and D_t^{α} means that the operator D^{α} acts by the variable t.

Note that for $\alpha = 1$ we have $D_t^1 = \frac{d}{dt}, D_t^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ and $D_t^2 u + t^{2\beta} u_{xx} = u_{tt} + t^{2\beta} u_{xx}$. From this and Equation (1) for $\beta = 0$ we obtain the Laplace equation, while for $\beta > 0$ and $-\frac{1}{2} < \beta < 0$, we arrive at the well-known equations of Gellerstedt and Karol [4], respectively.

Definition. A regular solution of Equation (1) is defined as a function $u(x,t)$ belonging to the class

$$u \in C(\bar{\Omega}), u_x \in C(\Omega \cup ((0,t), t \ge 0), D_t^{\alpha} u, D_t^{2\alpha} u, u_{xx} \in C(\Omega).$$

In the domain Ω consider the following problem:

Problem BS**.** Find a regular solution of Equation (1) in the domain Ω, satisfying the following boundary value conditions:

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0, \text{uniformly in } 0 \le x \le 1,$$

$$u_x(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = u\left(x_0, t\right), t \ge 0, \tag{2}$$

where $\varphi(x)$ is a given function, x_0 is a real number from the interval $0 < x_0 < 1$.

It is worth noting that condition (2) in Problem BS represents a nonlocal condition of the Bitsadze-Samarskii type.

Literature

1. Miller K.S. and Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993.

2. Kilbas A.A. and Srivastava H.M. and Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science, 2006.

3. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego, CA: Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc. 1999.

4. Lerner M. E. and Repin O. A. On FranklKє-type problems for some elliptic equations with degeneration of various types (in Russian) //Differ. Uravn. 1999. Vol . 35, №. 8. P. 1087–1093.

Limiting Information Acquisition System In The Case Of Connecting Rods

Kaiyrbek Zh. A.[1], **Madibaiuly Zh.**[2]
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
kaiyrbek.zhalgas@gmail.com
ALT Mukhamedzhan Tynyshpaev University, Almaty, Kazakhstan;
zhumabaymadibaiuly@gmail.com

In engineering theories of rod bending, three-dimensional equations of elasticity theory are reduced to one-dimensional models. This reduction is based on a number of physical assumptions [1,2]. Engineering theories are successfully used in engineering calculations. However, the issue of the adequacy of one-dimensional models to real objects has not yet been fully studied. There are many ways of asymptotic analysis of elastic rod theories. Often, the efficiency of the method depends on which asymptotic structure of the solution the researcher chooses. The choice of the asymptotic structure plays the same role as the physical hypotheses mentioned [3,4,5,6]. When more accurate information is required on the behavior of the solution with a thinning rod diameter, more in-depth research must be carried out. One cannot limit oneself to only the initial terms of the asymptotic solution. But in this case, overstated conditions are usually required from the right-hand sides.

In the future, it is necessary that the geometric characteristics of the horizontal sections decrease indefinitely to zero. To model such situations, a small parameter h is introduced. It is convenient to consider the compression of sections by a factor of h. Thus, the situation is modeled when a thin curved rod tends to its axis.As a result, we pass to equations on the arcs of the graph G. A more complex question: what conditions are satisfied at the non-boundary vertices of the limit graph? Such conditions are sometimes called conjugation or gluing conditions. As a rule, gluing conditions are the so-called Kirchhoff conditions. For second-order differential equations, this means, first, continuity at each non-boundary vertex. Second, preservation of the flow balance. Details on gluing conditions can be found in [3, 4]. As noted in [5, 6, 7, 8], Kirchhoff conditions do not always arise in the limit. When the shrinkage rate of the volume of the junction neighborhood is lower than the cross-sectional area of the guides, a more complex energy-dependent or separating condition may arise.

In the works of S.A. Nazarov [8] it is noted that in the limit problem algebraic unknowns appear and some of the equations are projected onto subspaces of functions with zero mean. In addition, non-local gluing conditions arise at some nodes.

Acknowledgments

The work was carried out with the support of grant funding of projects by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grants №. P-P19175972 and №. AP19678089).

Reference

1. Komkov V. Theory of adaptive control of vibration damping of simple elastic systems. Moscow: 1975.

2. Sokolnikov I. S. Mathematical theory of elasticity. McGraw-Hill, New York, 1956.

3. Galaktionov E. V., Tropp E. A. Asymptotic method for calculating thermoelastic stresses in a thin rod // Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Series: Phys. 1976, Vol. 40, №. 7, pp. 1399-1406.

4. Eliseev V. V., Orlov S. G. Asymptotic pinch in a spatial problem of linear elasticity for stretching bodies.

5. Nazarov S. A. Justification of the asymptotic theory of thin rods. Integral and flow estimates // Problems of mathematical analysis. SPb: SPbU Publishing House.1997. Issue 17, pp. 101-152.

6. Sanchos-Hubert J., Sanchos-Palencia E. Couplage bending-torsion-traction in anisotropy of les poutres in a heterogeneous section // C.R. Acad. sciences. Paris. Ser. 2. 1991. Vol. 312. Pp. 337-344.

7. Kondratiev V.A., Oleinik O.A. Boundary value problems for elasticity theory systems in unbounded domains. Korn's inequality // Uspekhi matem.nauk. 1988. Vol. 43, №5. Pp. 55-98.

8. Nazarov S.A. Korn's inequality asymptotically sharp for thin domains // Vestnik of SPbU. Ser.mat., mekh., astro. 1992. №8. P. 19-24.

Spectral Properties Of The Laplace-Beltrami Operator On Stratified Sets Composed Of Punctured Circles And Segments

Kanguzhin B. E.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
kanguzhin53@gmail.com

1. Introduction

The first part of the report considers well-posed boundary value problems for the Laplace-Beltrami operator on the space of square-summable functions defined on punctured circles. The main attention is paid to the conditions of correctness and existence of solutions of such problems. The importance of correctly setting the problems to ensure the existence and uniqueness of solutions in the space of functions with good analytical properties is shown.

2. Well-Solvable Boundary Value Problems for the Laplace-Beltrami Operator on Stratified Sets

A class of well-solvable boundary value problems for the Laplace-Beltrami operator acting on stratified sets composed of punctured circles and segments is introduced. A formalization of boundary conditions and a representation of the Laplace-Beltrami operator in this context are given. The influence of the structure of these sets on the well-posedness of the problems and conditions on the boundary functions is analyzed.

3. The structure of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator

The structure of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator for the specified boundary value problems is considered. It is shown how the features of stratified sets affect the properties of the resolvent, its analytical nature and the spectral characteristics of the operator.

4. Spectral properties of the Laplace-Beltrami operator

In conclusion of the report, based on the analysis of the analytical nature of the resolvent, the spectral properties of the Laplace-Beltrami operator on stratified sets are

presented. The main results on the spectrum of the operator, its stability and possible applications of these results in the theory of differential equations and mathematical physics are considered.

The Number And Location Of Eigenvalues Of Two Particle Schrödinger Operators On A Lattice

Khamidov Sh. I.[1], **Ibrogimov U.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
shoh.hamidov1990@mail.ru
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
utkir_ibrogimov1996@mail.ru

Let $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ be a one dimensional torus and let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}$.

The discrete Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}$, is a self-adjoint operator in $L^2(\mathbb{T})$ and defined as

$$H_{\lambda\mu}(K) := H_0(K) + V_{\lambda\mu},$$

where $H_0(K)$ is the unperturbed operator and $V_{\lambda\mu}$ is the perturbation operator. The unperturbed operator H_0 is the multiplication operator by a function $\mathcal{E}_K$:

$$\mathcal{E}_K(p) := \varepsilon(p) + \gamma\varepsilon(K-p) = 2 + 2\gamma - 2\cos p - 2\gamma\cos(K-p),$$

where $\gamma > 0$. The perturbation operator $V_{\lambda\mu}$ is defined by the integral:

$$(V_{\lambda\mu}f)(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v_{\lambda\mu}(p-q)f(q)\dot{q} = \tag{1}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)\dot{q} + \frac{\mu}{\pi}\cos p\int_{\mathbb{T}}\cos q f(q)\dot{q} + \frac{\mu}{\pi}\sin p\int_{\mathbb{T}}\sin q f(q)\dot{q}.$$

Since the operator $V_{\lambda\mu}$ is compact, according to Weyl's theorem [1], for any $K \in \mathbb{T}$ the essential spectrum $\sigma_{\mathbf{ess}}(H_{\lambda\mu}(K))$ of the operator $H_{\lambda\mu}(K)$ coincides with the spectrum of the operator $H_0(K)$, i.e.,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\lambda\mu}(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\min}(K)].$$

Let $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$ be subspaces of $L^2(\mathbb{T})$. These subspaces consist of even and odd functions, respectively. Let $K = 0$. The interaction operator $V_{\lambda\mu}$ has the from given in equation (1), denoting by $V^e_{\lambda\mu}$ and $V^o_{\lambda\mu}$ the part of $V_{\lambda\mu}$ acting on $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$, respectively.

From the above expressions, we can conclude that

$$H_{\lambda\mu}(0)\big|_{L^{2,e}(\mathbb{T})} = H^e_{\lambda\mu}(0) := H_0(0) + V^e_{\lambda\mu}$$

and

$$H_{\lambda\mu}(0)\big|_{L^{2,o}(\mathbb{T})} = H^o_{\lambda\mu}(0) := H_0(0) + V^o_{\lambda\mu}.$$

To formulate the main theorem we introduce the regions G_2^+, G_1^+, G_0^+, G_2^-, G_1^- and G_0^- as follows:

$$G_2^+ = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} - \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} > 0,\ \ \mu > 1+\gamma\},$$

$$G_1^+ = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} - \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} < 0\},$$

$$G_0^+ = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} - \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} > 0,\ \ \mu < 1+\gamma\},$$

$$G_2^- = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} > 0,\ \ \mu < -(1+\gamma)\},$$

$$G_1^- = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} < 0\},$$

$$G_0^- = \{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}} + \frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}} > 0,\ \ \mu > -(1+\gamma)\}.$$

Theorem1

(i) Assume $(\lambda,\mu)\in G_{02} = G_0^-\cap G_2^+$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has no eigenvalues below the essential spectrum and it has two eigenvalues above the essential spectrum.

(ii) Assume, $(\lambda,\mu)\in G_{01} = G_0^-\cap G_1^+$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has no eigenvalues below the essential spectrum and it has one eigenvalue above the essential spectrum.

(iii) Let, $(\lambda,\mu)\in G_{11} = G_1^-\cap G_1^+$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has one eigenvalue below the essential spectrum and it has one eigenvalue above the essential spectrum.

(iv) Assume, $(\lambda,\mu)\in G_{10} = G_1^-\cap G_0^+$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has one eigenvalue below the essential spectrum and it has no eigenvalues above the essential spectrum.

(v) Assume, $(\lambda,\mu)\in G_{20} = G_2^-\cap G_0^+$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has two eigenvalues below the essential spectrum and it has no eigenvalues above the essential spectrum.

Theorem2 Assume, $\mu\in\mathbb{R}$. Then for the $H^o_\mu(0)$ operator following relations are true:

(i) If $\mu > 2+2\gamma$, then $H^o_\mu(0)$ operator has a unique eigenvalue in $(\mathcal{E}_{\max}(0),\ +\infty)$, and it has no eigenvalue in $(-\infty,\ \mathcal{E}_{\min}(0))$.

(ii) If $\mu\in[-2-2\gamma;\,2+2\gamma]$, then $H^o_\mu(0)$ operator has no eigenvalue in $\mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0),\ \mathcal{E}_{\max}(0)]$.

(iii) If $\mu < -2-2\gamma$, then $H^o_\mu(0)$ operator has a unique eigenvalue in $(-\infty,\ \mathcal{E}_{\min}(0))$, and it has no eigenvalue in $(\mathcal{E}_{\max}(0),\ +\infty)$.

Literature

1. M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. N.Y.: Academic Press, 1979.

2. Lakaev S.N. , E. Özdemir E. The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices //Hacettepe J. Math. Stat. 2016 . Vol . 45, P. 1693–1703.

A Generalized-Expansion Method For The Loaded Modified Korteweg-De Vries Equation With Variable Coefficients

Khasanov M.[1], **Azimov D.**[1], **Matyakubova S.**[1]

Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni, Urgench, Uzbekistan;
hmuzaffar@mail.ru

Keywords: solution, the loaded modifed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients, expansion method.

This paper is dedicated to find the solutions of the equation of the loaded modi?ed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. It is shown to find the solutions via (G'/G) - expansion method that is one of the most effective ways of finding solutions.

Consider the following loaded modifed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients

$$u_t - a(t)\left(u_{xxx} - 6u^2u_x\right) - 4d(t)\,u_x - f(t)\,(u + u_x) + \gamma(t)\,u(0,t)\,u_x = 0, \qquad (1)$$

where $d(t), a(t)$, ,and $f(t)$ are differentiable functions of t, $x \in R$, $t \geq 0$,$\gamma(t)$ - is the given real continuous function.

Description of the generalized (G'/G) - expansion method

For a given NLEE with independent variables $X = (x, y, z, t)$ and dependent variabli u, we consider the partial differential equation (PDE)

$$F(u, u_x, u_y, u_t, u_z, u_{xt}, u_{yt}, u_{zt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{zz}, ...0) = 0. \qquad (2)$$

The solution of (2) can be expressed by a polynomial in as (G'/G) follows:

$$u(X) = \alpha_0(X) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(X)\,(G'/G)^i, \alpha_m(X) \neq 0, \qquad (3)$$

where $G = G(\xi)$ satisfies (1) while $\xi = \xi(X)$ and $\alpha_i(X)$ are all functions of X to be determined later. To determine $u(X)$ explicitly, we take the following footsteps:

Step1. Determine the integer m by balancing the highest-order nonlinear term(s) and the highest-order partial derivatives of $u(X)$ in (2).

Step2. Substitute (3) along with (1) into (2) and collect all terms with the same order of (G'/G) together. The left-hand side of (2) is converted into a polynomial in (G'/G). Then set each coefficient of this polynomial to zero to derive a set of over-determined differential equations for $\alpha_0(X)$, $\alpha_i(X)$, and ξ .

Step3. Solve the system of over-determined differential equations obtained in Step 2 for $\alpha_i(X)$ and ξ by using the software mathematical.

Step4. Since the solutions of (1) have been well known for us, using the results obtained in above steps to derive a series of fundamental solutions of (2) depending on (G'/G), we can obtain the exact solutions of (2).

Referance

1. A. Bekir, Application of the (G'/G)–expansion method for nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A*, 372, 3400 (2008).

2. S. Zhang, J. L. Tong, W. Wang, A generalized (G'/G)–expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, *Phys. Lett. A*, 372, 2254 (2008).

3. M. Wang, X. Li, J. Zhang, The (G'/G)–expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A*, 372, 417 (2008).

4. Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Rakhimov I.D., A generalized–expansion method for the loaded Korteweg–de Vries equation, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 24, p. 139 (2021).

5. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M., Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg–de Vries Equation, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 41, 85–95 (2022).

6. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Rakhimov I.D., Generalized (G'/G)–expansion method and its applications to the loaded Burgers equation, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 13(2), 248–257 (2023).

On the Negative Order Modified Korteweg-de Vries–Cosine Gordon Equation

Khasanov A.B.[1], **Boymuratov D.**[2]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; ahasanov2002@ mail.ru

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; dostonbekbaymurotov@gmail.com

Abstract. In this work, the negative order modified Korteweg-de Vries–cosine Gordon equation (nmKdV–coshG) in the class of periodic infinite-gap functions is integrated using the inverse spectral problem method. It is demonstrated that the mKdV–coshG equation is satisfied by the sum of the uniformly convergent functional series constructed by solving the Dubrovin differential equation system. Furthermore, it is proved that a global solution to the mixed problem for the negative order modified Korteweg-de Vries–cosine Gordon equation exists for sufficiently smooth initial data.

In this work, we consider a mixed problem for the negative order modified Korteweg-de Vries–cosine Gordon equation (nmKdV–coshG) of the form

$$\begin{cases} a(t)\left(u_{xt} - \cosh(2u)\right) - b(t)\left(u_{xxxt} - \left(2u_x\mu_{xt}\right)_x\right) = 0, \\ \mu_{xx} = u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

under the following conditions

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)|_{x=0} = \alpha(t), \quad \mu_x(x,t)|_{x=0} = \beta(t), \\ \left[u_{xt}(x,t) - \mu_{xt}(x,t)\right]|_{x=0} = \zeta(t) \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic in x functions satisfying the smoothness conditions

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{4,1}(t>0) \cap C(t \geq 0), \;\; \mu(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Here $a(t), b(t) \in C[0;\infty)$ and $\alpha(t), \beta(t), \zeta(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ are given continuously differentiable bounded functions.

For simplicity, we study the equation (1), in the case $a(t) = 1, b(t) \neq 0$, $B_1 \leq b(t) \leq B_2, B_1 > 0, t \geq 0$.

Inverse spectral problems play a significant role in integrating some important evolution equations of mathematical physics and are one of the most important achievements of the last century. An important breakthrough was made in the paper by Gardner, Green, Kruskal and Miura [1] in 1967, where they discovered a deep connection between the well-known nonlinear Korteweg-de Vries (KdV) equation and the spectral theory of the Sturm–Liouville operator. In [2], Lax proved the universality of the inverse scattering method (ISM) and generalized the KdV equation by introducing the concept of a higher KdV equation. In their work [3], Zakharov and Shabat showed that the nonlinear Schrodinger equation (NLS) can also be included in the Inverse spectral method. Soon Wadati [4], using the ideas of Zakharov and Shabat, proposed a method for solving the Cauchy problem for the modified KdV equation (mKdV).

It is well known that finding an explicit formula for solving a nonlinear evolution equation in the class of periodic functions depends significantly on the number of nontrivial gaps in the spectrum of the periodic Sturm–Liouville operator and the Dirac operator. In this regard, it is convenient to split the class of periodic functions into two sets:

1) the class of periodic finite-gap functions;

2) the class of periodic infinite-gap functions.

In [5]–[7], mKdV–cosine Gordon, mkdV–Liouville and negative order mkDV–Liouville equations are integrated in the class of periodic infinite gap functions.

We propose an algorithm for constructing periodic infinite-gap solutions $u(x,t), \mu_x(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ of the mixed problem (1)–(3) by reducing it to an inverse spectral problem for a self-adjoint periodic Dirac operator of the form:

$$\mathfrak{L}(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \;\; x,\tau \in \mathbb{R}, \; t > 0, \tag{4}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u'(x,t) \\ u'(x,t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

Let us denote by $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ and $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ solutions of the equation (4) with initial conditions $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ and $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$, respectively. The function $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ is called the *Lyapunov function* for equation (4). The spectrum of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau,t)$ in (4) is purely continuous:

$$\sigma(\mathfrak{L}) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R}\backslash\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})\right).$$

The intervals $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, are called gaps, where λ_n are the roots of the equation $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. They coincide with the eigenvalues вЃЌКвЃЌКof the periodic or antiperiodic $(y(0,\tau,t) = \pm y(\pi,\tau,t))$ problem for equation (4). It is easy to prove that

$\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$, that is, $\lambda = 0$ is a double eigenvalue of the periodic problem for equation (4).

The roots of the equation $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ are denoted by $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, while $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. They coincide with the eigenvalues вЃ Кв Ґ Кof the Dirichlet problem for system (4) with boundary conditions $y_1(0, \tau, t) = 0$, $y_1(\pi, \tau, t) = 0$.

Definition 1. Numbers $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and signs $\sigma_n(\tau, t) = \operatorname{sgn}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\} = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are called *the spectral parameters* of the operator $\mathfrak{L}(\tau, t)$. The spectral parameters $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the spectral boundaries $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, are called *the spectral data* of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau, t)$.

Definition 2. The problem of reconstructing the coefficient $\Omega(x, t)$ of the operator $\mathfrak{L}(\tau, t)$ from the spectral data is called *the inverse problem.*

The main result of this paper is contained in the following theorem.

Theorem 1. Let $u(x, t), \mu_x(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ be solutions of the mixed problem (1)–(3). Then the boundaries of the spectrum $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, of the operator $\mathfrak{L}(\tau, t)$ do not depend on parameters τ and t, that is, $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the spectral parameters $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, satisfy the first and second systems of Dubrovin differential equations, respectively:

$$1.\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)h_n(\xi(\tau, t))\xi_n(\tau, t), \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{5}$$

$$2.\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau, t)h_n(\xi(\tau, t))g_n(\xi(\tau, t)), \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{6}$$

In addition, the following initial conditions are satisfied:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \ \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{7}$$

where $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are the spectral parameters of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau, 0)$.

The sequences $h_n(\xi)$ and $g_n(\xi), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, in equation (6) are defined by the formulas:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \cdot f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)}\left[\frac{e^{2u}}{2\xi_n(\tau, t)} + 2b(t)\xi_n(\tau, t)(u_{\tau t} + \mu_{\tau t})\right], \tag{8}$$

where $\xi \equiv \xi(\tau, t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \ldots)$, $\sigma \equiv \sigma(\tau, t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \ldots)$.

The following formula holds:

$$u(\tau, t) = \alpha(t) + \int_0^\tau \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(s, t)h_k(\xi(s, t))\right\} ds, \tag{9}$$

$$\mu_\tau(\tau, t) = \beta(t) + \int_0^\tau u_\tau^2(s, t)ds.$$

As a result of the change of variables

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ \ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

the Cauchy problem (6) can be written as a single equation in the Banach space $\mathbb{K}$:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\ x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau)\in\mathbb{K},$$

where

$$\mathbb{K}=\{x=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots):$$

$$\|x(\tau,t)\|=\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\left(\frac{1}{|n|^2}+1\right)|x_n(\tau,t)|<\infty\Bigg\}.$$

$$H(x)=(\ldots,H_{-1}(x),H_1(x),\ldots),\ \ H_n(x)=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)f_n(x(\tau,t))g_n(x(\tau,t)).$$

Lemma 1. If a periodic infinite-gap function $u_0(x)$ satisfies the condition $u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^2(\mathbb{R})$ and $\alpha(t),\beta(t),\zeta(t)\in C([0;\infty))$ are continuously differentiable bounded functions, then the vector function $H(x(\tau,t))$ satisfies the Lipschitz condition in the Banach space $\mathbb{K}$, that is, there exists a constant $L>0$ such that for arbitrary elements $x(\tau,t),y(\tau,t)\in\mathbb{K}$, the following inequality holds

$$||H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))||\leq L||x(\tau,t)-y(\tau,t)||,$$

where

$$L=C\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\gamma_n}{|n|}\left(\frac{1}{|n|^2}+1\right)<\infty. \tag{10}$$

Remark 1. It is directly verified that if $u_0(x)\in C^5(\mathbb{R})$, then the functional series that are formed in the process of proving that the function $u(x,t)$ found using formula (9) satisfies equation (1), will be uniformly convergent.

Remark 2. Theorem 1 and Lemma 1 give an algorithm for finding a solution of the mixed problem (1)–(3):

1. First, we find the spectral data $\lambda_n,\xi_n^0(\tau),\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau,0)$. Let us denote the spectral data of the operator $\mathfrak{L}(\tau,t)$ by $\lambda_n,\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)=\pm1,n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$;
2. Now, having solved the Cauchy problem (6)–(7) for an arbitrary value of τ, we find $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t),n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$;
3. From the formula (9) we define the functions $u(\tau,t),\mu_\tau(\tau,t),\tau\in\mathbb{R},\ t>0$, that is, solutions of the mixed problem (1)–(3).

Literature

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. and Miura R.M. A method for solving the Korteweg-de Vries equation. Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. P. 1095–1098.

2. Lax P.D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. Vol. 21, №. 5. P. 467–490.

3. Zakharov V.E., Shabat A.B. Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1970. Vol. 34. P. 62–69.

4. Wadati M. The Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation. Journal of the Physical Society of Japan. 1972. Vol. 32, №. 6. P. 1681–1681.

5. Khasanov A.B., Normurodov K.N. and Khudaerov U.O. Integrating the Modified Korteweg-de Vries–Sine-Gordon Equation in the Class of Periodic Infinite-Gap Functions. Theoretical and Mathematical Physics. 2023. Vol. 214. P. 170–182.

6. Khasanov A., Khudayarov U. and Khasanov T. The Cauchy Problem for the Modified Korteeg-de Vries–Liouville(mKdV–L) Equation in the class of periodic infinite-gap functions. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2024. Vol. 50, №. 1. P. 78–95.

7. Khasanov A.B., Abdivokhidov A.A. and Eshbekov R.Kh. Negative order modified Korteweg–de Vries–Liouville (nmKdV–L) Equation in the Class of Periodic Infinite-gap Functions. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, №. 12. P. 6380–6397.

New Equivalent Conditions For Discrete Hardy Type Inequality With Oinarov's Kernel

Kuliev K.[1], **Turaqulov T.**[2]

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
[1] : komilkuliev@gmail.com, [2]: turakulov1992@inbox.ru

Let $1 \leq p, q < \infty$ and $u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ be positive sequences of real numbers, which we in the sequel call weighted sequences. Let us consider the following discrete weighted Hardy inequality with kernel for nonnegative sequence $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in the form

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^p f_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

where $\{a_{n,k}\}$ is a nonnegative triangular matrix (i.e., $a_{n,k} \geq 0, n \geq k \geq 1$ and $a_{n,k} = 0, k > n \geq 1$) is called kernel of the inequality, and C is a constant independent of f.

In 2024, A. Kalybay and S. Shalginbayeva [1] gave estimates for the best constant of the inequality (1) with *Oinarov's kernel*, i.e., $a_{n,k}$ is increasing by "n"and decreasing by "k"and there exists $h \geq 1$ such that

$$a_{n,k} \leq h\,(a_{n,s} + a_{s,k})$$

holds for all $n \geq s \geq k \geq 1$, in the case when $1 < p \leq q < \infty$.

This paper presents new equivalent conditions for the validity of the inequality (1) and

lower and upper estimates for the best constant of the inequality. Let us denote:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1(s) &= \left(\sum_{n=s}^{\infty} a_{n,s}^q u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{s-1} v_n^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}};\\
\tilde{A}_2(s) &= \left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{s-1} a_{s,n}^{p'} v_n^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}};\\
B_1(s) &= \left(\sum_{n=s}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,n}^q u_k^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'q}} \left(\sum_{n=1}^{s} v_n^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'q'}};\\
B_2(s) &= \left(\sum_{n=s}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{k,n} u_k^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q\right)^{-\frac{1}{q'}};\\
B_3(s) &= \left(\sum_{n=1}^{s} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{s} v_n^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p}};\\
B_4(s) &= \left(\sum_{n=1}^{s} u_n^q \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{qp'}} \left(\sum_{n=s}^{\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{qp}}.
\end{aligned}$$

Theorem 1. Let $1 < p \le q < \infty$ and $\{a_{n,k}\}$ be Oinarov's kernel. Then the inequality (1) holds if and only if

$$B_1 = \sup_{s\in\mathbb{N}} B_1(s) < \infty, \quad B_2 = \sup_{s\in\mathbb{N}} B_2(s) < \infty.$$

Moreover, the best constant of the inequality (1) satisfies

$$\max\left\{\sup_{s\in\mathbb{N}}\left[\tilde{A}_1^{p'q}(s) + B_1^{p'q}(s)\right]^{\frac{1}{p'q}}, \sup_{s\in\mathbb{N}}\left[\tilde{A}_2^{p'}(s) + B_2^{p'}(s)\right]^{\frac{1}{p'}}\right\} \le C \le X.$$

where X is a positive solution of the corresponding nonlinear equation

$$X^q - h^{q-1} q B_2 X^{q-1} = h^{q-1} q^{\frac{p'+1}{p'}} (q')^{\frac{q-1}{p'}} B_1^q \quad \text{if } 1 < q \le 2, \tag{2}$$

$$X^{q'} - h(qB_2)^{q'-1} X = h q^{\frac{p'+1}{p'(q-1)}} (q')^{\frac{1}{p'}} B_1^{q'} \quad \text{if } q \ge 2.$$

Theorem 2. Let $1 < p \le q < \infty$ and $\{a_{n,k}\}$ be Oinarov's kernel. Then the inequality (1) holds if and only if

$$B_3 = \sup_{s\in\mathbb{N}} B_3(s) < \infty, \quad B_4 = \sup_{s\in\mathbb{N}} B_4(s) < \infty.$$

Moreover, the best constant of the inequality (1) satisfies

$$\max\left\{\sup_{s\in\mathbb{N}}\left[\tilde{A}_1^q(s+1) + B_3^q(s)\right]^{\frac{1}{q}}, \sup_{s\in\mathbb{N}}\left[\tilde{A}_2^{p'q}(s+1) + B_4^{p'q}(s)\right]^{\frac{1}{p'q}}\right\} \le C \le X,$$

where X is a positive solution of the corresponding nonlinear equation

$$X^{p'} - h^{p'-1}p'B_3X^{p'-1} = h^{p'-1}(p')^{\frac{q+1}{q}}p^{\frac{p'-1}{q}}B_4^{p'} \qquad if \quad 1 \le p' \le 2,$$

$$X^{p} - h(p'B_3)^{p-1}X = hp^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{q+1}{q(p'-1)}}B_4^{p} \qquad if \quad p' \ge 2.$$

Literature

1. A. Kalybay, S. Shalginbayeva. Estimate of the best constant of discrete Hardy-type inequality with matrix operator Satisfying the Oinarov condition. // Eu.Math. J. 2004, №.2. 42 - 47 .

2. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. The Hardy Inequality: About Its History and Some Related Results. Pilsen: Vydavatelski servis, 2007.

3. A. Kufner, K. Kuliev, G. Kulieva, M. Eshimova. New equivalent conditions for Hardy-type inequalities. // Mathematica Bohemica. 2024, №.1, 57-73.

4. K.Kuliev, G.Kulieva, M. Eshimova. On estimates for norm of an integral operator with Oinarov kernel. // Uzb. Math. J. 2021, 117-127.

5. K. Kuliev, G. Kulieva, M. Eshimova. On estimates for norm of some integral operators in weighted Lebesgue spaces. // Math. Ineq. and Appl. 2023. №.1, 27-37.

6. K. Kuliev. On Estimates for Norms of Some Integral Operators with Oinarov's Kernel. // Eu. Math. J. 2023, 67-81.

The Existence Of Eigenvalues Of The Generalized Friedrichs Model

Lakaev S. N.[1], **Kurbanov Sh. Kh.** [2]

Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
slakaev@mail.ru
Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan
kurbanov-shaxzod@mail.ru

We consider a family of the generalized Friedrichs model $H_{\mu_1\mu_2}(p), \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1^2+\mu_2^2 \neq 0, p \in \mathbb{T}^2$ with perturbation of rank 2, which is a generalization of the family of two-particle Schrödinger operators $H_{\mu_1\mu_2}(p), p \in \mathbb{T}^2 = (-\pi, \pi]^2$ associated with a system of two arbitrary (identical) quantum mechanical particles moving on the two dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ and interacting via zero range attractive or repulsive potential as follows:

$$H_{\mu_1\mu_2}(p) = H_0(p) + \mu_1V_1 + \mu_2V_2, \ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \ \mu_1^2 + \mu_2^2 > 0,$$

where $H_0(p), p \in \mathbb{T}^2$ is a multiplication operator by a real-analytic function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$ defined on $(\mathbb{T}^2)^2$, i.e.,

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^2)$$

and $V_i : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ is the perturbation operator of the form

$$(V_if)(q) = \varphi_i(q)(f, \varphi_i), \ i = 1, 2,$$

where $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ and $(\cdot,\cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T}^2)$.

The perturbation $V := \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2$ of the non-perturbed operator $H_0(p), p \in \mathbb{T}^2$ is an operator of rank two. Consequently, by the well-known Weyl theorem [1. Theorem XIII.14] on the compact perturbations

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu_1\mu_2}(p)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p)) = [m(p),\, M(p)],$$

where

$$m(p) = \min_{q\in\mathbb{T}^2} w_p(q),\; M(p) = \max_{q\in\mathbb{T}^2} w_p(q).$$

The following hypothesis will be needed throughout the paper.

Hypothesis. The functions $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ and $w(\cdot,\cdot)$ used in the definition of the operator $H_{\mu_1\mu_2}(p)$ satisfy the following conditions:

(i) $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ are non-trivial, real-analytic on $\mathbb{T}^2$ and $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$;

(ii) $w(\cdot,\cdot)$ is a real-analytic function on $(\mathbb{T}^2)^2 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, and it has a unique non-degenerate minimum at $(p_{\min}, q_{\min}) \in (\mathbb{T}^2)^2$ and a unique non-degenerate maximum at $(p_{\max}, q_{\max}) \in (\mathbb{T}^2)^2$.

Hypothesis implies the existence of a δ-neighborhood $U_\delta(p_{\min}) \subset \mathbb{T}^2$(resp. $U_\delta(p_{\max}) \subset \mathbb{T}^2$) of the point $p_{\min} \in \mathbb{T}^2$ (resp. $p_{\max} \in \mathbb{T}^2$) and an analytic function $q_{\min} : U_\delta(p_{\min}) \to \mathbb{T}^2$ (resp. $q_{\max} : U_\delta(p_{\max}) \to \mathbb{T}^2$) that for any $p \in U_\delta(p_{\min})$ (resp. $p \in U_\delta(p_{\max})$) the point $q_{\min}(p) \in \mathbb{T}^2$ (resp. $q_{\max}(p) \in \mathbb{T}^2$) is a unique non-degenerate minimum (resp. maximum) of the function $w_p(\cdot)$.

We define the sets B^- and B^+ on $\mathbb{R}^2$, in the cases $p \in U_\delta(p_{\min})$ and $p \in U_\delta(p_{\max})$ respectively as:

$$B^- := \Big\{(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \mu_1 < 0 \text{ and } \mu_2 < 0\Big\},$$

$$B^+ := \Big\{(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \mu_1 > 0 \text{ and } \mu_2 > 0\Big\}$$

Theorem. Let Hypothesis holds.

(i) If $|\varphi_1(q_{\min}(p))|^2 + |\varphi_2(q_{\min}(p))|^2 \neq 0$ for some $p \in U_\delta(p_{\min})$ then for any $(\mu_1,\mu_2) \in B^-$ and for that $p \in U_\delta(p_{\min})$ the operator $H_{\mu_1\mu_2}(p)$ has at least one eigenvalue lying below the essential spectrum of $H_{\mu_1\mu_2}(p)$.

(ii) If $|\varphi_1(q_{\max}(p))|^2 + |\varphi_2(q_{\max}(p))|^2 \neq 0$ for some $p \in U_\delta(p_{\max})$ then for any $(\mu_1,\mu_2) \in B^+$ and for that $p \in U_\delta(p_{\max})$ the operator $H_{\mu_1\mu_2}(p)$ has at least one eigenvalue lying above the essential spectrum of $H_{\mu_1\mu_2}(p)$.

The generalized Friedrichs model also considered in [2,3].

Literature

1. M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators, Academic Press, N.Y: (1978)

2. Sh. Kh. Kurbanov and S. T. Dustov// Puiseux Series Expansion for Eigenvalue of the Generalized Friedrichs Model with the Perturbation of Rank One. Labochevskiy Journal of Mathematics **4**, 1365–1372 (2022).

3. S. Lakaev , M. Darus and Sh. Kurbanov// Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Friedrichs model with perturbation of rank one. J. Phys. A: Math. Theor. **46**, (2013) 205304.

On Spectrum Of The Discrete Trilaplacian With Small Range Perturbation

Kurbonov O. I.[1], **Madatova F. A.**[2]
Chirchik state pedagogical university, Chirchik city, Uzbekistan;
oybekq330@gmail.com
National university of Uzbekistan, Tashkent city, Uzbekistan;
fotimamadatova2@gmail.com

Abstract In this work, we consider a non-local discrete Schrödinger operator of the third order $\widehat{h}_\mu = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\delta}_{x,0}$ in a one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$. Here $\widehat{\Delta}$ is the discrete Laplacian operator, and $\hat{\delta}_{x,0}$ is the delta potential of a concentrated Kroneker at zero. It has been proved that there is a single eigenvalue to the left of the essential spectrum for any $\mu > 0$ and to the right of the essential spectrum for $\mu < 0$. In addition, the asymptotes of $z(\mu)$ as $\mu \nearrow 0$ and $\mu \searrow 0$ are found.

Introduction. In this thesis, we discuss the spectral features of the family

$$\widehat{h}_\mu := \widehat{h}_0 - \mu\widehat{\delta}_{x,0},\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

of self-adjoint bounded discrete Schrödinger operators in the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{Z})$ of square collabsible complex-valued functions defined on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$. Here $\widehat{h}_0$ is the third-order discrete Laplacian, i.e., $\widehat{h}_0 = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}$, where

$$(\widehat{\Delta}\widehat{f})(x) = -\frac{1}{2}\left(\widehat{f}(x+1) + \widehat{f}(x-1) - 2\widehat{f}(x)\right), \quad \widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

and $\widehat{\delta}_{x,0}$ is a rank-one operator

$$(\widehat{\delta}_{x,0}\widehat{f})(x) = \begin{cases} \widehat{f}(0), & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

this forme can be considered as a discrete Schrödinger operator on $\mathbb{Z}$, associated to a system of one particle, whose dispersion relation has degenerate bottom. Recall that $\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0, 2]$. Thus, from the spectral theory $\sigma(\widehat{h}_0) = \sigma_{ess}(\widehat{h}_0) = [0, 8]$ and hence, by the compactness of $\widehat{\delta}_{x,0}$ and the Weyl Theorem,

$$\sigma_{ess}(\widehat{h}_\mu) = \sigma_{ess}(\widehat{h}_0) = [0, 8] \tag{2}$$

for any $\mu \in \mathbb{R}$.

Let $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, be the standard Fourier transform with the inverse $\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ The operator $h_\mu = \mathcal{F}^{-1}\widehat{h}_\mu\mathcal{F}$, called the momentum representation of $\widehat{h}_\mu$, can be written as

$$h_\mu = h_0 - \mu V, \tag{3}$$

where $h_0 := \mathcal{F}^{-1}\widehat{h}_0\mathcal{F}$ is the multiplication operator in $L^2(\mathbb{T})$ by $\mathfrak{e}(q) = (1 - \cos q)^3$, and $V := \mathcal{F}^{-1}\widehat{\delta}_{x,0}\mathcal{F}$ is the rank-one integral operator

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(q)\,dq. \tag{4}$$

The main result of the thesis is the following.

Theorem. For any $\mu \neq 0$, the operator h_μ has a unique eigenvalue $z(\mu)$ outside the essential spectrum with the associated eigenfunction

$$f_\mu(p) = \frac{1}{\mathfrak{e}(p) - z(\mu)}. \tag{5}$$

Moreover:

[a] $z(\mu) < 0$ for any $\mu > 0$ and $z(\mu) > 8$ for any $\mu < 0$;

[b] the function $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto z(\mu)$ is real-analytic, strictly decreasing, strictly convex in $(-\infty, 0)$ and strictly concave in $(0, \infty)$ with asymptotics $\lim\limits_{\mu \to \pm\infty} \frac{z(\mu)}{\mu} = 1$ and

$$\lim_{\mu \nearrow 0} \frac{z(\mu) - 8}{\mu^2} = \frac{1}{24}, \quad \lim_{\mu \searrow 0} \frac{z(\mu)}{\mu^{6/5}} = -\frac{2}{3\sqrt[5]{12}}; \tag{6}$$

We start with the following lemma in which we get an equation for eigenvalues of h_μ.

Lemma 1. A number $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 8]$ is an eigenvalue of h_μ if and only if $\Delta(\mu; z) = 0$, where

$$\Delta(\mu; z) := 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dq}{\mathfrak{e}(q) - z}.$$

Lemma 2. For any $z \in \mathbb{R} \setminus [0, 8]$,

$$I(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dq}{\mathfrak{e}(q) - z} = -\frac{\operatorname{sign}(z)}{3\sqrt[6]{|z|^5}} \left(\frac{1}{\sqrt{|\sqrt[3]{z} - 2|}} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt[3]{z}^2 + 2\sqrt[3]{z} + 4} + \operatorname{sign}(z)(\sqrt[3]{z} + 1)}{\sqrt[3]{z}^2 + 2\sqrt[3]{z} + 4}} \right). \tag{7}$$

References

1. Lakaev S.N., Kholmatov Sh. Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with zero range potential.// Izv. Math. 2012. –76. p. 946–966.

2. Kholmatov Sh., Pardabaev M. On Spectrum of the Discrete Bilaplacian with Zero-Range Perturbation.// Lobachevskii J. Math. 2021. 42(6), –6. p. 1286–1293.

3. Muminov Z.I., Alladustov Sh.U., Lakaev Sh.S. Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete laplacian.// Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2021. 496(2) –2. 124827.

4. Muminov Z.I., Alladustov Sh.U., Lakaev Sh.S. Threshold analysis of the three dimensional lattice Schrödinger operator with non-local potential.// Lobachevskii J. Math. 2020. 41(6), –6. p. 1094–1102.

5. Lakaev Sh.S., Ismoilov G.I., Kurbonov O.I. The spectrum of a non lokal discrete Schrödinger operator with a delte potential on the one dimentional lattice.// Lobachevskii J. Math. 2023. 44(2), –2. p. 606–612.

6. Kurbonov O.I., Akhralov Kh.Z. On the negative eigenvalues of the discrete Laplacian with potential in three-dimensional case.// ACTA NUUz. 2024. –2(1.1), p. 72–81.

7. Kurbonov O.I. About the negative eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with non-local potential in d-dimensional case.// Uzbek Mathematical Journal. 2024. 68(3), –3. p. 113–122.

Spectral Properties Of The Two-Particle Schrödinger Operators On The Two-Dimensional Lattices

Latipova D.A.[2], **Akhmadova M.O.**[2]
Uzbekistan-Finland pedadodical institute, 140104, Samarkand, Uzbekistan
dildoral@mail.ru
Samarkand State University, 140104, Samarkand, Uzbekistan
mukhayyo.akhmadova@mail.ru

The operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ is a self-adjoint operator on $L^{2,e}(\mathbb{T}^2)$ of the form

$$H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0) = H_0(0) + V^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}$$

where $H_0(0)$ is the operator of multiplication by the function

$$\mathcal{E}_0(p) := 2\sum_{i=1}^{2}\Big(1-\cos p_i\Big),$$

and the operator $V^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}$ reads as

$$\begin{aligned}(V^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}f)(p) &= \frac{\gamma}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(q)\,\mathrm{q} + \frac{\lambda}{8\pi^2}(\cos p_1+\cos p_2)\int_{\mathbb{T}^2}(\cos q_1+\cos q_2)f(q)\,\mathrm{q} \\ &+ \frac{\mu}{8\pi^2}(\cos 2p_1+\cos 2p_2)\int_{\mathbb{T}^2}(\cos 2q_1+\cos 2q_2)f(q)\,\mathrm{q} \\ &+ \frac{\mu}{2\pi^2}\cos p_1\cos p_2\int_{\mathbb{T}^2}\cos q_1\cos q_2 f(q)\,\mathrm{q}\end{aligned} \tag{1}$$

Depending on $\gamma,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ the rank of $V^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}$ varies but never exceeds four. Hence, by the classical Weyl theorem, the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0))$ of the fiber Schrödinger operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ coincides with the spectrum of $H_0(0)$.*i.e.*

$$\sigma_{\text{ess}}(H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)) = \sigma(H_0(0)) = [0,8].$$

Since $V^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}$ has rank at most four, the operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ can have at most four eigenvalues outside the essential spectrum. Next theorem states a sufficiently conditions for the parameters $\gamma,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, such that the operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ has exactly four eigenvalues outside the essential spectrum.

Theorem 2. The following statements hold:

i. If $\gamma<-12$, $\lambda<-12$ and $\mu<-12$ then the operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ has exactly four eigenvalues lying below the essential spectrum;

ii. If $\gamma>12$, $\lambda>12$ and $\mu>12$ then the operator $H^{\text{ees}}_{\gamma\lambda\mu}(0)$ has exactly four eigenvalues lying above the essential spectrum.

References

1. S.N. Lakaev, A.K. Motovilov and S.Kh.Abdukhakimov. Two-fermion lattice Hamiltonian with first and second nearest-neighboring-site interactions, J. Phys. A: Math. Theor. **56**,id 315202 (2023).

2. S. Lakaev, Sh. Kholmatov and Sh. Khamidov. Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case, J.Phys.A: Math. Theor. **54**, id 245201 (2021).

Isospectral Problems For Euler-Bernoulli Beams

Nurakhmetov Daulet Bagdatuly[1,2]
Astana International University, Astana, Kazakhstan;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
nurakhmetov@math.kz

In this talk, we consider two types of isospectral problems:
1st case. The differential equation of the non-uniform beam on a variable Winkler foundation is

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(J(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+k(x)w+\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, x\in(0,\ell), t>0, \tag{1}$$

the differential equation of the uniform beam on a constant Winkler foundation is

$$EJ_0\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+k_0 v+\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, x\in(0,1), t>0 \tag{2}$$

with some boundary conditions.
2nd case. The differential equation of the non-uniform beam on a constant Winkler foundation is

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(J(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+k_0 w+\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, x\in(0,\ell), t>0, \tag{3}$$

the differential equation of the uniform beam on a variable Winkler foundation is

$$EJ_0\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+k(x)v+\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, x\in(0,\ell), t>0 \tag{4}$$

with some boundary conditions.

Here A_0, J_0, k_0, E, ρ are constants. Main question: What properties must functions $J(x)$, $A(x)$, $k(x)$ have so that problems generated with equations (1) and (2) or (3) and (4) with some boundary conditions are isospectral problems [1]? The isospectral properties of equations (1) and (2) with some boundary conditions for $k(x)=0$ were studied in [2].

The research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant number AP19579114

References

1. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. 2nd edition. Kluver Academic: New York, NY, USA, 2005.

2. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams // Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 185(4). P. 703-716.

Oscillatory And Spectral Properties Of A Class Of Fourth Order Differential Operators Via A New Hardy Type Inequality

Oinarov R.[1], **Kalybay A. A.**[2]
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan;
oryskul@mail.ru
KIMEP University, Almaty, Kazakhstan;
kalybay@kimep.kz

Let $T > 0$, $I = (T, \infty)$ and $1 < p, q < \infty$. Let r, υ and u be nonnegative functions such that r is continuously differentiable, u and υ are locally summable on the interval I. In addition, let $r^{-1} \equiv \frac{1}{r} \in L_1^{loc}(I)$, $\upsilon^{-p'} \in L_1^{loc}(I)$ and $p' = \frac{p}{p-1}$.

Let $D_r^2 f(t) = \frac{d}{dt} r(t) \frac{df(t)}{dt}$ and $C_0^\infty(I)$ is the set of compactly supported functions infinitely time continuously differentiable on I. Assume that $D_r^1 f(t) = r(t) \frac{df(t)}{dt}$.

We will investigate the oscillatory properties of the differential equation

$$D_r^2\big(\upsilon(t) D_r^2 y(t)\big) - u(t) y(t) = 0, \ t > T, \tag{1}$$

and the spectral properties of the differential operator L, which is generated by the differential expression

$$Ly(t) = \frac{1}{u(t)} D_r^2\big(\upsilon(t) D^2 y(t)\big), \tag{2}$$

using the results on the inequality

$$\left(\int_T^\infty \big| u(t) f(t) \big|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \le C_T \left(\int_T^\infty \big| \upsilon(t) D_r^2 f(t) \big|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ f \in C_0^\infty(I). \tag{3}$$

Two points t_1 and t_2 such that $t_1 \neq t_2$ of the interval I are called conjugate with respect to equation (1), if there exists a solution y of equation (1) such that $y(t_1) = y_2(t_2) = 0$ and $D_r^1 y(t_1) = D_r^1 y(t_2) = 0$. Equation (1) is called oscillatory at infinity, if for any $T \in I$ there exist conjugate points with respect to equation (1) to the right of T. Otherwise, equation (1) is called non-oscillatory at infinity.

A series of works study the oscillatory properties of fourth- and higher-order equations using three methods. The first method treats these equations as perturbations of Euler-type equations with known solutions. The second method relies on reducing the equations to Hamiltonian systems. The third method, applicable only to symmetric equations, analyzes their oscillatory properties using variational principle, which requires establishing inequality (3).

Property BD (see [1]), which refers to the boundedness from below and the discreteness of the spectrum of the operator L generated by differential expression (2), is related to the non-oscillation of differential equation (1). The estimate of the first eigenvalue of L follows from the estimate of the least constant in inequality (3). Furthermore, since differential equation (1) is symmetric, the variational principle (see [2]) establishes a connection between its oscillatory properties and inequality (3).

Thus, in this work, we discuss three interconnected problems, analyzing them based on the degree of singularity of the functions $\upsilon^{-p'}$ and r^{-1} at infinity.

We consider equation (1) with the parameter $\lambda > 0$

$$D_r^2\Big(v(t)D_r^2y(t)\Big) - \lambda u(t)y(t) = 0,\ t \in I. \tag{4}$$

Equation (4) is called strong oscillatory (non-oscillatory) at infinity, if it is oscillatory (non-oscillatory) for all $\lambda > 0$ at infinity.

Lemma 1. Let C_T be the least constant in (3).

(i) Equation (4) is strong non-oscillatory at infinity if and only if $\lim\limits_{T\to\infty} C_T = 0$.

(ii) Equation (4) is strong oscillatory at infinity if and only if $C_T = \infty$ for any $T > 0$.

Let the minimal differential operator $L_{\min}$ be generated by differential expression (2) in the space $L_{2,u} \equiv L_2(u; I)$ with inner product $(f, g)_{2,u} = \int\limits_0^\infty f(t)g(t)u(t)dt$, i.e., $L_{\min}y = Ly$ is an operator with the domain $D(L_{\min}) = C_0^\infty(I)$.

It is known that all self-adjoint extensions of the minimal differential operator L have the same spectrums (see [2]).

Let us consider the problem of boundedness from below and discreteness of the spectrum of the operator L.

The relation between the oscillatory properties of equation (4) and spectral properties of the operator L is given in the following statement.

Lemma 2 ([2]). The operator L is bounded from below and has the discrete spectrum if and only if equation (4) is strong non-oscillatory.

First, we establish criteria for inequality (3) to hold in terms of the functions r, v and u, providing a two-sided estimate for the best constant C_T. Then, using Lemma 1 and Lemma 2, we successively derive the criteria for the strong non-oscillation of equation (4) and the corresponding spectral properties of the operator L.

References

1. Hinton, D.B.; Lewis, R.T., Discrete spectra criteria for singular differential operators with middle terms. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, 1975, 337–347.

2. Glazman, I.M., Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators; Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit.: Moscow, Russia, 1963.

On The Summability Of The Fourier Laplace Series

Rakhimov A.A.

International Islamic University Malaysia ;
abdumalik@iium.edu.my

In the current research we investigate issues relating to the summability of the Fourier-Laplace series on the unit sphere.

Let S^N is N dimensional sphere in R^{N+1} :

$$S^N = \Big\{x = (x_1, x_2, ..., X_{N+1}) \in R^{N+1} : \sum_{n=1}^{N+1} x_n^2 = 1\Big\}$$

For any two point x and y in S^N by $\gamma = \gamma(x,y)$ denote spherical distance between these two points which is radial value of an angle between vectors x and y. It is clear that $\gamma \leq \pi$.

Denote by Δ_s be Laplace-Beltrami operator on S^N which has the following expression in the spherical coordinates $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{N-1}, \zeta)$ as:

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin^{N-1}\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\Big(\sin^{N-1}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\Big) + \frac{1}{\sin^2\xi_1\sin^{N-2}\xi_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\Big(\sin^{N-2}\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}\Big) + \ \ldots . +$$

$$+\frac{1}{\sin^2\xi_1\sin^2\xi_2\ \ldots\sin^2\xi_{N-1}}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}.$$

Consider this operator as a formal differential operator with domain of definition $C^\infty\big(S^N\big)$. It is a symmetric, non negative and essentially selfadjoint. Thus its closure $\overline{-\Delta_s}$ is a selfadjoint operator in $L_2\big(S^N\big)$. Its eigenfunctions Y^k are known as spherical harmonics and they are complete and orthogonal system in $L_2\big(S^N\big)$.

For the any function $f \in L_2\big(S^N\big)$ its Fourier series by spherical harmonics $\big\{Y_j^k\big\}\Big|_{j=1}^{a_k}$ is called Fourier-Laplace series on sphere:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} f_{k,j}Y_j^k(x), \tag{1}$$

where $f_{k,j} = \int_{S^N} f(y)Y_j^k(y)d\sigma(y)$, and $a_k = \frac{(N+k)!}{N!k!} - \frac{(N+k-2)!}{N!(k-2)!}$ is a frequency of the corresponding eigenvalues $\lambda_k = k(k+N-1)$. Equality (1) should be understood in the sense $L_2(S^N)$.

A partial sum of the series (1) can be written as follows

$$E_n f(x) = \int_{S^N} f(y)\Theta(x,y,n)d\sigma(y),$$

where $\Theta(x,y,n)$ is called a spectral kernel and has a form:

$$\Theta(x,y,n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{a_k} Y_j^k(x)Y_j^k(y). \tag{2}$$

In the present paper we will study the problems of the summability of the Fourier-Laplace series of distributions depending integrable properties of the distributions. The problems of the spectral expansions in the spaces of the distributions of the spectral expansions associated with the Laplace operator for the first time studied by Alimov Sh. A. in [1]. These questions for the Fourier Laplace series studied by A.K.Pulatov [2] and for the distributions in [3].

References

1. Sh.A. Alimov 1993. On the spectral expansions of distributions. Doclades of Russian Acad. Science, 331(6), 661-662.

2. A.K. Pulatov 1981. On the uniformly convergence and localization of arithmetic means of Fourier-Laplace series. J. Soviet Doclads, v. 258:3, pp.554-556.

3. A.A. Rakhimov 2016. On the Uniform Convergence of Fourier Series, Malaysian Journal of Mathematical Sciences, v. 10, pp.55-60.

New Advances In Eigenvalue Lower Bounds For Laplacians

Suragan D.

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan;
durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we present new results concerning lower bounds on the first eigenvalue for the Laplace operators, especially under variable-component Robin boundary conditions. Our analysis focuses on convex domains, where we not only derive novel results for the Robin Laplacian, but also significantly improve existing bounds over those for the Dirichlet Laplacian. The methodology adopted in our study is further extended to establish new lower bounds on the first eigenvalue of the polyharmonic Dirichlet operator. In addition, we discuss a simple and elegant proof of the PoincarГк inequality specific to Robin Laplacians, based on an equality framework. The key ingredients in our proofs are taken from [1]-[3].

The goal of this talk is to present these advances, providing a deeper understanding and expanding the existing knowledge base in the field of eigenvalue lower bound problems. This talk is based on our joint work with Rupert L. Frank (Caltech and LMU Munchen) and Ari Laptev (Imperial College London).

References

1. Frank R. L. and Larson S. Two Consequences of DaviesвГЄ Hardy Inequality // Funct. Anal. Its Appl. 2021. Vol. 55. P. 174–177.

2. Kovarik H. and Laptev A. Hardy inequalities for Robin Laplacians // J. Funct. Anal. 2012. Vol. 262(12) P. 4972–4985.

3. Ozawa T. and Suragan D. Sharp remainder of the Poincare inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2020. Vol. 148(10). P. 4235–4239.

On The Critical Behavior For Inhomogeneous Semilinear Biharmonic Heat Equations On Exterior Domains

Nurdaulet Tobakhanov

Nazarbayev University, Kazakhstan

Abstract: This report is devoted to the existence and nonexistence of global weak solutions to the inhomogeneous semilinear heat equations with forcing terms on exterior domains

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = |u|^p + f(x), & \text{in } D^c \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{in } D^c, \end{cases} \tag{1}$$

where $p > 1$ is a constant, Δ is the Laplace operator, and $D = \overline{B_1}$ is the closed unit ball, and D^c is its complement in $\mathbb{R}^N$.

We investigate the critical behavior of solutions to the semilinear biharmonic heat equation with forcing term $f(x)$, under six homogeneous boundary conditions. By employing a method of test function, we derive the critical exponents p_{Crit} in the sense of Fujita. Moreover, we show that $p_{Crit} = \infty$ if $N = 2, 3, 4$ and $p_{Crit} = \frac{N}{N-4}$ if $N \geq 5$. The impact of the forcing term on the critical behavior of the problem is also of interest, and thus a second critical exponent in the sense of Lee-Ni, depending on the forcing term is introduced. We also discuss the case $f \equiv 0$, and present the finite-time blow-up results for the subcritical and critical cases.

Keywords: Exterior problem, Fujita critical exponent, nonexistence, existence.

Fujita-Type Results For The Semilinear Heat Equations Driven By Mixed Local-Nonlocal Operators

Torebek B. T.[1]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
torebek@math.kz

This work explores the critical behavior of the semilinear heat equation

$$u_t + \mathcal{L}_{a,b}u = |u|^p + f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2,$$

considering both the presence and absence of a forcing term $f(x)$. The mixed local-nonlocal operator

$$\mathcal{L}_{a,b} = -a\Delta + b(-\Delta)^s,\ a,\ b \in \mathbb{R}_+,\ s \in (0,1),$$

incorporates both local and nonlocal Laplacians. We determine the Fujita-type critical exponents:

$$p_{Crit} = \begin{cases} 1 + \frac{2s}{d}, & \text{if, } f \equiv 0, \\ \\ \frac{d}{d-2s}, & \text{if, } f \not\equiv 0, \end{cases}$$

by considering the existence or nonexistence of global solutions. Interestingly, the critical exponent is determined by the nonlocal component of the operator and, as a result, coincides with that of the fractional Laplacian.

In the case without a forcing term, our results improve upon recent findings by Biagi et al. [Bull. London Math. Soc. (2024), 1–20] and Del Pezzo et al. [Nonlinear Analysis, 255 (2025), 113761]. When a forcing term is included, our results refine those of Wang et al. [J. Math. Anal. Appl., 488 (1) (2020), 124067] and complement the work of Majdoub [La Matematica, 2 (2023), 340–361].

On The Existence Of The Efimov Effect For A Partial Integral Operator Of The Fredholm Type

Tuxtamurodova T. M.

National University of Uzbekistan, University str. 4, 100174, Tashkent, Uzbekistan
mirzayevatilloxon13@gmail.com

The Efimov Effect is a phenomenon that occurs in three-body quantum systems, where weak two-body interactions lead to the formation of an infinite series of bound states (Efimov states). This effect was theoretically predicted in 1970 by Vitaly Efimov. The Efimov Effect is utilized in the study of ultracold atomic systems, molecular interactions, and nuclear physics.

The discrete spectrum of Schrodinger operators is the most intensively studied object in operator theory. One of the important issues of the spectral analysis of Schrodinger operators is to study the infinity of the number of eigenvalues located outside the essential spectrum, that is, the existence of the Efimov effect in this model. This effect was first discovered by Efimov [1] for three partial Schrodinger operators in continuous space. A rigorous mathematical proof of the existence of the Efimov effect was carried out in [1], then in [2,3], etc.

The resolvent set, spectrum, essential spectrum and discrete spectrum of self-adjoint operator are denoted by $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ and $\sigma_{disc}(\cdot)$ respectively.

Number

$$E_{\min}(H) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(H)\}$$

is called lower edge (or lower boundary) of the essential spectrum of the operator H.

Let the boundary point λ of the essential spectrum of the operator H be isolated on the left (right). If for all $n \in N$ there exists a sequence $\{\lambda_n\}$ of eigenvalues of the operator H satisfying the conditions $\lambda_n < \lambda$ ($\lambda_n > \lambda$), then we say that there is an Efimov effect to the left (right) of the point λ of the essential spectrum of the operator H.

Let $\Omega_1 = [a,b]^{\nu_1} \subset R^{\nu_1}$, $\Omega_2 = [c,d]^{\nu_2} \subset R^{\nu_2}$ $(\nu_1, \nu_2 \in N)$. In the Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, let's we consider a bounded self-adjoint partial integral operator (PIO) H. The operator H is defined by the following formulas:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2). \tag{1}$$

Here, the actions H_0, T_1 and T_2 are defined by the equalities:

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \quad f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} \sum_{k \in N} \alpha_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f(s,y) d\mu_1(s),$$

$$T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} \sum_{k \in N} \beta_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} f(x,t) d\mu_2(t),$$

where $\sum_k {\beta_k}^2 < \infty, \sum_k {\alpha_k}^2 < \infty$, k_0 is an arbitrary real-valued continuous function on $\Omega_1 \times \Omega_2$, and $\{\varphi_k(\cdot)\}$ and $\{\psi_k(\cdot)\}$ are classes of mutually orthonormal functions in Ω_1, Ω_2 respectively, i.e.

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{\Omega_1}\varphi_i(\xi)\overline{\varphi_j(\xi)}d(\xi)=\begin{cases}0, & \text{if} \quad i\neq j\\ 1, & \text{if} \quad i=j\end{cases}$$

$$(\psi_i,\psi_j)=\int_{\Omega_2}\psi_i(\xi)\overline{\psi_j(\xi)}d(\xi)=\begin{cases}0, & \text{if} \quad i\neq j\\ 1, & \text{if} \quad i=j\end{cases}$$

Here and henceforth we will assume that $ds=d\mu_1(s)$, $dt=d\mu_2(t)$ and $\mu_1(\Omega_1)=\mu_2(\Omega_2)=1$, $\mu_j(\cdot)$ is Lebesgue measure on Ω_j, $j=1,2$.

Discrete Schrodinger operators of the form (1), associated with a system of three particles on a three-dimensional lattice , which are represented by a partially integral operator H, were studied in [4,5,6].

Let's define a matrix Λ with positive elements $\xi_{i,j}$:

$$\xi_{i,j}=\int_{\Omega_1}u(x)\cdot|\varphi_i(x)|^2dx\cdot\int_{\Omega_2}v(y)\cdot|\psi_j(y)|^2dy$$

Theorem. a) Let $\alpha_1\geq\beta_1$. If the following condition is satisfied for each number $j\in N$ and some number $i\in\mathbb{N}$

$$\xi_{i,j}<\alpha_i+\beta_j-\alpha_1, \tag{2}$$

then there is an Efimov effect below the lower edge of the essential spectrum of the operator;

b) Let $\beta_1\geq\alpha_1$. If the following condition is satisfied for each number $i\in N$ and some number $j\in\mathbb{N}$

$$\xi_{i,j}<\alpha_i+\beta_j-\beta_1, \tag{3}$$

then there is an Efimov effect below the lower edge of the essential spectrum of the operator.

References

1. V.I. Efimov, Weakly coupled states of three resonantly interacting particles // Cores. physics. 12:5, 1080–1091, (1970).[in Russian]

2. Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal, Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect// Ann. Phys., 123:2, 274–295, (1979).

3. H. Tamura, The Efimov effect of three-body Schrodinger operators// Funct. Anal., 95:2, 433-459, (1991).

4. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov, On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices // Russ. J. of Math. Phys., 14:4,377–387, (2007).

5. T. H. Rasulov, Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // Theoret. and Math. Phys., 163:1, 429–437, (2010).

6. Yu. Kh. Eshkabilov, R. R. Kucharov, Essential and discrete spectra of the three-particle Schrodinger operator on a lattice //Theoret. and Math. Phys., 170:3, 341–353, (2012).

The Existence Of Bound States Of The Two-Particle Schrödinger Type Operator On A Lattice

Boltayev A. T.[1], **Ulashov S. S.**[2]
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
atboltaev@mail.ru
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;
sobirulashov19@gmail.com

We assume that $\mathbb{Z}^3$ is a three dimensional cubic lattice and $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ is the Hilbert space of square-summable functions defined on $\mathbb{Z}^3$. Let $\mathbb{T}^3$ be a three dimensional torus, $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$.

The discrete Schrödinger type operator $H_A(k)$, $A < 0$ of the system of two particles associated with the $s-d$ exchange model with a fixed quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^3$, is an operator on $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ and has the following form:

$$H_A(k) = H_0(A,k) + \frac{A}{2}V.$$

Here, the (unperturbed) operator $H_0(A,k)$ is the convolution operator given by

$$\left(H_0(A,k)f\right)(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^3} \varepsilon_k(A, x-y)f(y), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^3),$$

where

$$\varepsilon_k(A,x) = \frac{1}{e}\varepsilon(x) + \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x)}\varepsilon(x) - AS\delta_{0x},$$

with $e > 0$ and $m > 0$ are the electron and magnon masses, $S > 0$, δ_{0x} is the Kronecker symbol, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$, $(k,x) := \sum\limits_{n=1}^{3} k_n x_n$ and

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 6, & x = 0 \\ -1, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad |x| = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

The interaction potensial V is the operator of multiplication by a function v,

$$\left(Vf\right)(x) = v(x)f(x), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^3),$$

where v be a non-negative function with a support consisting of two points, i.e. $\mathrm{supp}(v) := \{s_1, s_2\}$.

Let $L^2(\mathbb{T}^3)$, be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^3$. The operator $\widehat{H}_0(A,k) := \mathcal{F}H_0(A,k)\mathcal{F}^{-1}$, acting in $L^2(\mathbb{T}^3)$, is the operator of multiplication by a continuous real function $\hat{\varepsilon}_k(A,\cdot)$ defined in $\mathbb{T}^3$, where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform. It therefore has only an essential spectrum:

$$\sigma(H_0(A,k)) = \sigma(\widehat{H}_0(A,k)) = \sigma_{ess}(\widehat{H}_0(A,k)) = [\hat{\varepsilon}_{\min}(A,k), \hat{\varepsilon}_{\max}(A,k)],$$

where $\hat{\varepsilon}_{\min}(A,k) := \min\limits_{q\in\mathbb{T}^3} \hat{\varepsilon}_k(A,q)$, $\hat{\varepsilon}_{\max}(A,k) := \max\limits_{q\in\mathbb{T}^3} \hat{\varepsilon}_k(A,q)$.

The perturbation operator V is compact. Hence, as follows from the Weyl theorem, the essential spectrum of $H_A(k)$ coincides with the essential spectrum of $H_0(A,k)$

$$\sigma_{ess}(H_A(k)) = \sigma_{ess}(H_0(A,k)) = \sigma(H_0(A,k)).$$

We denote

$$a_{ij}(A,k,z) := v^{\frac{1}{2}}(s_i)v^{\frac{1}{2}}(s_j)\frac{-A}{2(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p,s_i-s_j)}dp}{\hat{\varepsilon}_k(A,p)-z},\ z\le\hat{\varepsilon}_{\min}(A,k),\ i,j=1,2.$$

Let $k=0$, $A=-1$, $z=\hat{\varepsilon}_{\min}(-1,0)$ and

$$A_1 := \frac{-2}{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4(a_{12})^2}}, A_2 := \frac{-2}{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4(a_{12})^2}},$$

where $a_{ij} := a_{ij}(-1,0,\hat{\varepsilon}_{\min}(-1,0))$, $i,j=1,2$. We note that $A_2<A_1<0$.

The main observations is that the eigenvalues of the Schrödinger type operator $H_A(0)$ are generated by *the coupling constants thresholds*.

Theorem. Let $k=0$ and v be a nonnegative function with $\mathrm{supp}(v) := \{s_1,s_2\}$. Then the following assertions are true:

(i) For any $A\in(A_1,0)$ the bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$ is a regular point of the essential spectrum of $H_A(0)$ and it has no eigenvalues below the bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$.

(ii) For any $A\in(A_2,A_1)$ the bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$ is regular point of the essential spectrum of $H_A(0)$ and the operator $H_A(0)$ has a unique eigenvalue satisfying the inequality $E_1(A)<\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$.

(iii) For any $A\in(-\infty,A_2)$ the bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$ is regular point of the essential spectrum of $H_A(0)$ and the operator $H_A(0)$ has two simple eigenvalues satisfying the inequalities $E_1(A)<E_2(A)<\hat{\varepsilon}_{\min}(A,0)$.

(iv) The bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A_i,0)$ is a singular point (a resonance or eigenvalue) of the essential spectrum of $H_{A_i}(0)$, $i=1,2$ and $H_{A_i}(0)$ has $i-1$ eigenvalues below the bottom $\hat{\varepsilon}_{\min}(A_i,0)$.

The definition of regular point and singular point of the essential spectrum are given in [1].

Literature

1. Lakaev S. N., Boltaev A. T. Threshold phenomena in the spectrum of the two–particle Schrödinger operators on a lattice// Theor. Math. Phys.2019. **198** (3), 363–375 .

2. Mogilner. A. I. Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results, in: Many-Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering// Adv. Sov. Math., **5**, 139–194 (1991).

О Существовании Трехчастичного Собственного Значения Оператора Шредингера Системы Трех Бозонов

Ж.И. Абдуллаев[1], **Ш.Н. Муйдинова**[2]

[1,2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан;
e-mail1: jabdullaev@mail.ru
e-mail2: shodiya94.com@gmail.com

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]-$ одномерный тор, $L_2^s(\mathbb{T}^m)-$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^m, m = 2, 3$, и симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В импульсном представлении системы двух и системы трех одинаковых частиц (бозонов) с парным контактным потенциалом действуют соответственно в гильбертовых пространствах $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^s(\mathbb{T}^3)$ по формулам [1]-[2]:

$$(h_\mu f)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \mu \int_{\mathbb{T}^2} \delta(k_1 + k_2 - k_1' - k_2')f(k_1', k_2')dk_1'dk_2'.$$

$$(H_\mu f)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3)-$$

$$-\mu \sum_{\alpha=1}^{3} \int_{\mathbb{T}^3} \delta(k_\alpha - k_\alpha')\delta(k_\beta + k_\gamma - k_\beta' - k_\gamma')f(k_1', k_2', k_3')dk_1'dk_2'dk_3'.$$

Здесь $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$,

$$\varepsilon(p) = 1 - cosp, \quad p \in (-\pi, \pi].$$

$\delta(k)-$ дельта-функция Дирака. На торе $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ выбрана единичная мера, т.е. $\int_{\mathbb{T}} dk = 1$.

Пусть $k = k_1 + k_2$ и $K = k_1 + k_2 + k_3-$ полные квазиимпульсы системы двух и системы трех частиц.

Операторы h_μ и H_μ разлагаются в прямые интегралы [3]

$$h_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus h_\mu(k)dk, \quad H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K)dK,$$

где ограниченные самосопряженные операторы $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}$, $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}$, действуют в гильбертовых пространствах $L(\mathbf{k}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{k} - \mathbf{p})\}$ и $L_2^s(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q})\}$, соответственно по формулам

$$h_\mu(k)f(p) = \varepsilon_k(p)f(p) - \mu \int_{\mathbb{T}} f(s)ds,$$

$$H_\mu(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int_{\mathbb{T}} [f(K - p - q, s) + f(p, s) + f(s, q)]ds.$$

Здесь $\varepsilon_k(p) = \varepsilon(k - p) + \varepsilon(p)$, $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon(K - p - q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$.

Лемма. *Для любого $\mu > 0$ и $k \in [-\pi, \pi]$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $z_\mu(k) = 2 - \sqrt{\mu^2 + 4\cos^2\frac{k}{2}}$ на полуоси $(-\infty, m(k))$.*

Собственное значение $z_\mu(k) = 2 - \sqrt{\mu^2 + 4\cos^2\frac{k}{2}}$ четна по $k \in [-\pi, \pi]$ и строго возрастает по $k \in [0, \pi]$.

$$\min_{k\in[-\pi,\pi]} z_\mu(k) = z_\mu(0) = 2 - \sqrt{\mu^2+4}, \quad \max_{k\in[-\pi,\pi]} z_\mu(k) = z_\mu(\pi) = 2 - \mu.$$

Собственное значение $z_\mu(k)$ оператора $h_\mu(k)$, как функция от μ строго убывает на полуосы $(0, \infty)$.

Как известно (см. [2]) существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из обьединения области значений двух функций $\lambda_K(q) = z_\mu(K-q) + \varepsilon(q)$ и $E_K(p,q)$, т.е.

$$\sigma_{ess}(H(K)) = [\lambda_{min}(K), \lambda_{max}(K)] \cup [\varepsilon_{min}(K), \varepsilon_{max}(K)].$$

Первая часть $[\lambda_{min}(K), \lambda_{max}(K)]$ называется двухчастичной ветвью существенного спектра трехчастичного оператора $H_\mu(K)$, вторая часть $[\varepsilon_{min}(K), \varepsilon_{max}(K)]$ совпадает со спектром невозмущенного трехчастичного оператора $H_0(K)$ и называется трехчастичной ветвью существенного спектра оператора $H_\mu(K)$.

При $\mu > 4$ существенный спектр оператора $H_\mu(0)$ состоит из обьединение двух непересекающих отрезков,т.е. (см. [1])

$$\sigma_{ess}(H_\mu(0)) = [2 - \sqrt{\mu^2+4}, 4-\mu] \cup [0, \frac{9}{2}].$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Существует $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu > \mu_1$ оператор $H_\mu(0)$ имеет ровно два собственных значения, лежащих левее существенного спектра.*

Литература

1. Abdullaev Zh.I., Lakaev S.N. Asymptotics of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Difference Operator on a Lattice//Theoret. and Math. Phys., 2003. Vol. 136, №2, P. 1096–1109.

2. Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И. Спектр разностного трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке//Матем. заметки, 2002. Т. 71 №5. С. 686–696.

3. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. New York: Academic Press, 1979.

Модифицированное Уравнение Кортевега-Де Фриза Отрицательного Порядка Со Специальным Источником

Балтаева И. И [1], Атаназарова Ш. Э.[2], Раззакберганова С. Г. [1]

[1] Ургенчский государственный университет

[2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

iroda-b@mail.ru, atanazarova94@gmail.com

Аннотация: Работа посвящена интегрированию модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) отрицательного порядка со специальным источником в классе кбыстроубывающихњ функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза отрицательного порядка, потенциал, оператор Дирака, специальный источник.

Следует отметить, что в течении последнего десятилетия уравнение КдФ отрицательного порядка получил большое развитие, которое впервые было выведено в работе [1]. Существуют важные результаты по исследованию уравнения КдФ и модифицированного уравнения КдФ отрицательного порядка, где рассматриваются солитонообразные решения данных уравнений с самосогласованным источником в различных классах [2]-[4].

В данной работе мы исследуем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \rho_{xxt} = 2uu_t - 2\sum_{k=1}^{2N} u(f_{k1}g_{k1} - f_{k2}g_{k2}) \\ u_{xt} + \alpha u + 2\rho_{xt}u = \sum_{k=1}^{2N} \frac{d}{dx}\left(f_{k1}g_{k1} - f_{k2}g_{k2}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \\ (L-\xi_k)f_k = 0, \quad (L-\xi_k)g_k = 0, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ 2N, \end{cases} \tag{1}$$

где L -оператор Дирака в виде

$$L = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u \\ -u & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а также, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ и $\rho(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$функции зависящие от x и t, $t \geq 0$ удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((1+|x|)\,|u(x,t)| + |u_t(x,t)| + |u_x(x,t)| + |u_{xt}(x,t)|\right) dx < \infty \\ \rho_{xt}(x,t) \to 0, \qquad x \to \pm\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Система (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in R, \tag{4}$$

Начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)\,|u_0(x)|\,dx < \infty.$$

2) Оператор $L(0)$ не имеет спектральных особенностей и имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0),\ \xi_2(0),\ ...,\ \xi_{2N}(0)$ таких, что $Im\xi_k(0) > 0$, $k = 1,\ldots,N$.

В рассматриваемой задаче, $f_k = (f_{k1}(x,t),\ f_{k2}(x,t))^T$ является собственной вектор-функцией оператора $L(t)$ соответствующей собственному значению ξ_k, а $g_k = (g_{k1}(x,t),\ g_{k2}(x,t))^T$ линейно независимое с f_k, решение уравнения $L(t)g_k = \xi_k g_k$, причем

$$W\{f_k,\ g_k\} \equiv f_{k1}g_{k2} - f_{k2}g_{k1} = \omega_k(t), \qquad k = 1,\ 2,\ ...,\ 2N, \tag{5}$$

Основная цель данной работы – получить представления для решений $u(x,t),\ \rho(x,t),\ f_k(x,t),\ g_k(x,t), \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ N,$ задачи (1)-(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Литература

1. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators. // J. Math. Phys. 1991. Vol. 32. pp. 1733–1736.

2. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Baltaeva I. I. Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. Vol. 44. pp. 31–43

3. Urazboev G. U., Baltaeva I. I., Atanazarova Sh. E. Soliton Solutions of the Negative Order Modified Korteweg - de Vries Equation. //The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2024. Vol. 47. pp. 63–77

О Некоторых Свойствах Спектральной Функции Оператора Штурма-Лиувилля С Разрывными Коэффициентами С Минимальными Условиями На Коэффициенты

А.Б. Будак
МГУ, ВМК, Москва, Россия
abbudak@cs.msu.ru

Рассмотрим задачу на собственные функции самосопряжҷнного полуограниченного снизу дифференциального оператора Штурма-Лиувилля

$$L(u) = \frac{1}{s(x)} \left\{ [pu']' + qu \right\}, \tag{1}$$

рассматриваемого на некотором интервале (a, b) числовой прямой. Точка x_0 этого интервала является точкой разрыва коэффициентов указанного опратора (1),

где $a < x < x_0$, $x_0 < x < b$.

Подробную постановку задачи, связанную с этим оператором, в частности, условиях на его собственные функции и собственные значения можно найти в работах [1] и [2] или в планируемых к изданию трудах нынешней конференции.

На указанные коэффициенты накладываются следующие условия A

$$p(x) = p_1(x) \in C^{(2)}(a, x_0], \ p(x) = p_2(x) \in C^{(2)}[x_0, b), \tag{A1}$$

$$q(x) = q_1(x) \in L_2^{loc}(a, x_0), \ q(x) = q_2(x) \in L_2^{loc}(x_0, b), \tag{A2}$$

$$s(x) = s_1(x) \in C^{(2)}(a, x_0) \cap L_1(a, x_0), \ s(x) = s_2(x) \in C^{(2)}(x_0, b) \cap L_1(x_0, b), \tag{A3}$$

$$\begin{array}{l} p_1(x) \geqslant \alpha_1 > 0, \quad s_1(x) \geqslant \beta_1 > 0, \quad \text{всюду на } (a, x_0), \\ p_2(x) \geqslant \alpha_2 > 0, \quad s_2(x) \geqslant \beta_2 > 0, \quad \text{всюду на } (x_0, b), \\ \alpha_j, \beta_j \ \ (j = 1, 2) — \ \text{константы}, \ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty. \end{array} \tag{A4}$$

Обозначим за $\rho_j(h)$ и $\overline{\rho}_j(|x - x_0|)$ $(j = 1, 2)$ функции, определяемые из условий

$$\begin{array}{lll} h = \int\limits_{x_0 - \rho_1(h)}^{x_0} \sqrt{\frac{s_1(\tau)}{p_1(\tau)}} d\tau, & \overline{\rho_1}(x_0 - x) = \int\limits_{x}^{x_0} \sqrt{\frac{s_1(\tau)}{p_1(\tau)}} d\tau, & \text{если } x \leqslant x_0, \\ h = \int\limits_{x_0}^{x_0 + \rho_2(h)} \sqrt{\frac{s_2(\tau)}{p_2(\tau)}} d\tau, & \overline{\rho_2}(x - x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{s_2(\tau)}{p_2(\tau)}} d\tau, & \text{если } x \geqslant x_0. \end{array} \tag{2}$$

Рассмотрим спектральную функцию рассматриваемого дифференциального оператора

$$\theta(x,y,\mu)=\sum_{\sqrt{\lambda_n}<\mu} u_n(x)\overline{u_n(y)}, \tag{3}$$

(черта над $u_n y$ означает комплексное сопряжение) и введчм функцию вида

$$\widehat{\theta}_\mu(x,x_0)=\begin{cases} a(x_0)\dfrac{\sin\mu\overline{\rho_2}(x-x_0)}{\overline{\rho_2}(x-x_0)}, & x_0\leqslant x\leqslant x_0+R_2,\\ a(x_0)\dfrac{\sin\mu\overline{\rho_1}(x_0-x)}{\overline{\rho_1}(x-x_0)}, & x_0-R_1\leqslant x\leqslant x_0, \end{cases} \tag{4}$$

где числа R_j $(j=1,2)$ достаточно малые положительные числа такие, что аргумент x функции $\widehat{\theta}_\mu(x,x_0)$ остачтся в пределах рассматриваемого компакта $K\subset(a,b)$. Вне сегмента $[x_0-R_1,x_0+R_2]$ функция $\widehat{\theta}_\mu(x,x_0)=0$,

$$a(x_0)=\frac{2}{\pi(\sqrt{p_1(x_0-0)s_1(x_0-0)}+\sqrt{p_2(x_0+0)s_2(x_0+0)})}. \tag{5}$$

Пусть на коэффициенты оператора наложены условия Б (Б1, Б2, Б3, Б4)

$$p_1(x)\in C^{(2)}[a,x_0],\quad p_2(x)\in C^{(2)}[x_0,b], \tag{Б1}$$

$$q_1(x)\in L_2(a,x_0),\quad q_2(x)\in L_2(x_0,b), \tag{Б2}$$

$$s_1(x)\in C^{(2)}[a,x_0],\quad s_2(x)\in C^{(2)}[x_0,b], \tag{Б3}$$

$$\begin{array}{l} p_1(x)\geqslant\alpha_1>0,\quad s_1(x)\geqslant\beta_1>0,\quad \text{всюду на } [a,x_0],\\ p_2(x)\geqslant\alpha_2>0,\quad s_2(x)\geqslant\beta_2>0,\quad \text{всюду на } [x_0,b],\\ \alpha_j,\beta_j\ \ (j=1,2)\ —\ \text{константы.}\end{array} \tag{Б4}$$

при этом $-\infty<a<b<+\infty$, стало быть интервал (a,b) уже становится ограниченным множеством на числовой оси. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_1(h)&=\frac{\sqrt[4]{g[x_0-\rho_1(h)]}-\sqrt[4]{g(x_0-0)}}{h},\ g(x)=g_1(x)=p_1(x)s_1(x),\ a<x<x_0,\\ \varphi_2(h)&=\frac{\sqrt[4]{g[x_0+\rho_2(h)]}-\sqrt[4]{g(x_0+0)}}{h},\ g(x)=g_2(x)=p_2(x)s_2(x),\ x_0<x<b. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть могут выполняться некоторые дополнительные условия на коэффициенты оператора вида

$$\frac{g'(x_0-0)}{s(x_0-0)}=\frac{g'(x_0+0)}{s(x_0+0)},\quad \text{при } h\to 0\quad |\varphi_j''(h)|=O(1)\ (j=1,2). \tag{7}$$

Теорема. Для любого $\mu>1$ при выполнении условий А (Б) для любых a' и b' таких что $a<a'\leqslant b'<b$ $(a\leqslant a'\leqslant b'\leqslant b)$, любых σ_1 и σ_2 таких, что $a'\leqslant\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant b'$

(в случае условий Б может быть $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = b$) справедлива следующая оценка для спектральной функции (3) *без первого ограниченя на коэффициенты оператора типа (7)*

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\theta(x, y, \mu) - \widehat{\theta}_\mu(y, x)] s(y) dy = O(\ln \mu/\mu). \tag{8}$$

Замечание. В работе [3] была доказана при дополнительных ограничениях на коэффициенты рассматриваемого дифференциального оператора в точке разрыва коэффициентов x_0 вида (7) более точная оценка, нежели (8), где вместо $O(\ln \mu/\mu)$ было $O(1/\mu)$. Связано это было с тем, что

$$b(x_0) = a(x_0)[(\sqrt{g(x_0 + \rho_2(t)}\,)'_t|_{t=0+0} - (\sqrt{g(x_0 - \rho_1(-t)}\,)'_t|_{t=0-0}]/2 \tag{9}$$

при выполнении первого из соотношений (7) будет обращаться в нуль, $a(x_0)$ определено выше соотношением (5).

Литература

1. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора, Матем. заметки, 1977, т. 22, №5, 1977, с. 679—698.

2. Будак А.Б., Денисов В.Н. О некоторых свойствах собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с разрывнвми коэффициентами, Матем. заметки, 1987, т. 42, №6, с. 819—830.

3. Будак А.Б., Денисов В.Н. О некоторых свойствах спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля с разрывнвми коэффициентами, Матем. заметки, 1991, т. 49, №6, с. 19—28.

О Дискретном Спектре Операторной Матрице Третьего Порядка

Ф.М. Журакулова

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200100 Республика Узбекистан,
e-mail: juraqulova.farangis@mail.ru, f.m.juraqulova@buxdu.uz

В данной работе операторная матрица третьего порядка, соответствующий системы с несохраняющимся и не более трех частиц на решетке [1,2], рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

Через $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ обозначим одномерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ − одномерное комплексное пространство и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ − гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$.

Рассмотрим семейства обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как 2×2 операторная матрица

$$h_\mu(k) := \begin{pmatrix} h_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$h_{00}f_0 = f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} f_1(t)dt, \quad (h_{11}(k)f_1)(y) = w(k,y)f_1(y). \tag{2}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$; а функция $w(\cdot,\cdot)$ имеет вид $w(k,y) := 3-\cos k-\cos y-\cos(k+y)$.

Семейство обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, определенное по формуле (1) с матричными элементами (2) является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Используя теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях, для существенного спектра операторной матрицы $h_\mu(k)$ имеем

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [m(k); M(k)],$$

где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом:

$$m(k) := 3 - \cos k - \sqrt{2 + 2\cos k}, \quad M(k) := 3 - \cos k + \sqrt{2 + 2\cos k}.$$

Для каждого $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ определим регулярную функцию

$$\Delta_\mu(k\,;z) := \begin{cases} 1 - z - I_\mu(k\,;z), & z < m(k), \\ 1 - z + I_\mu(k\,;z), & z > M(k), \end{cases} \quad I_\mu(k\,;z) := \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3-\cos k - z)^2 - 4\cos^2\frac{k}{2}}}.$$

в области $\mathbb{C}\backslash[m(k); M(k)]$. Функция $\Delta_\mu(k\,;\cdot)$ обычно называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_\mu(k)$.

Для определенности обозначим через $E_\mu^{(1)}(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k)$ собственные значения оператора $h_\mu(k)$, лежащих слева от $m(k)$ и справа от $M(k)$, соответственно, т.е. $E_\mu^{(1)}(k) < m(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k) > M(k)$.

Пусть $\mathcal{H}_2 := L_2^{\text{s}}(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определенных на $\mathbb{T}^2$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

где матричные элементы $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \le j$, $i, j = 0, 1, 2$ определяются по формулам

$$\mathcal{A}_{00}f_0 = af_0, \quad \mathcal{A}_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt, \quad (\mathcal{A}_{11}f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathcal{A}_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x,t)dt, \quad (\mathcal{A}_{22}f_2)(x,y) = w(x,y)f_2(x,y) \quad f_i \in \mathcal{H}_i,\ i = 0,1,2.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}$.

Можно легко проверить, что операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Вводим следующие обозначения: $\Sigma_\mu = \operatorname{Im} E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \operatorname{Im} E_\mu^{(2)}(x)$.

Пусть $I-$ единичный оператор в $\mathcal{H}_1$, $K_\mu-$ интегральный оператор в $\mathcal{H}_1$, порожденный ядром

$$K_\mu(x,y;z) := \frac{\mu^2}{2\Delta_\mu(x,z)(w(x,y)-z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu,$$

$\Delta_\mu(z)$ и $D_\mu(x,y;z)-$ соответственно определитель и минор Фредгольма оператора $I - K_\mu$.

При $\mu > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ определим регулярную функцию вида

$$\Omega_\mu(z) := \left(a - z - \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)dt}{\Delta_\mu(t\,;z)}\right)\Delta_\mu(z) + \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{v(x)v(t)D_\mu(x,t;z)}{\Delta_\mu(t\,;z)}dxdt.$$

Следующая теорема устанавливает связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и нулями функции $\Omega_\mu(\cdot)$.

Теорема 1. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда и $\Omega_\mu(z) = 0$, т.е. для дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu : \Omega_\mu(z) = 0\}.$$

Последияя теорема играет важенуго роль при дальнейщих исследованиях дискретного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Литература

1. Муминов М.Э., Бозоров И.Н., Расулов Т.Х. О числе компонентов существенного спектра одной 2×2 операторной матрицы. Известия вузов. Математика 2024, 2(7), стр 85–90.

2. Расулов Т.Х. Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц. Известия вузов. Математика 2008 12 (7), стр 59–69.

К Построению Безусловного Базиса Из Элементов Системы Корневых Векторов Оператора Кратного Дифференцирования С Линейным Вхождением Спектрального Параметра В Краевое Условие

Иманбаев Н. С.[1,2], **Садыбеков М. А.**[1]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
sadybekov@math.kz
Южно-Казахстанский педагогический университет им. О. Жанибекова, Шымкент, Казахстан;
imanbaevnur@mail.ru

Для задач, возникающих при решении (методом разделения переменных) начально-краевых задач для эволюционных уравнений, когда в краевое условие входят производные решения по временной переменной, на основе работы [1] известно, что при удалении (некоторого конечного числа) элементов, система корневых векторов уже может образовывать базис со скобками. Однако вопрос о том, образует ли система безусловный базис необходимо исследовать для каждой задачи отдельно.

Рассматривается задача на собственные значение для оператора кратного дифференцирования с линейным вхождением спектрального параметра в одно из краевых условий

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = \lambda \left(u(0) + u(1)\right). \tag{2}$$

Характеристический определитель спектральной задачи (1)-(2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1 + \cos\sqrt{\lambda}\right) + \sin\sqrt{\lambda} = \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\sqrt{\lambda}\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right).$$

Решая уравнение $\Delta(\lambda) = 0$, имеем две серии собственных значений

$$\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_k} = (2k+1)\pi \;\Rightarrow\; \lambda_k^{(1)} = \left((2k+1)\pi\right)^2; \;\; \lambda_k^{(2)} = \left((2k+1)\pi + \delta_k\right)^2.$$

$\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)}$ являются простыми (однократными) собственными значениями задачи (1)-(2). Система собственных функций задачи (1)-(2) имеет вид

$$u_k^{(1)}(x) = \cos((2k+1)\pi)x,$$

$$u_k^{(2)}(x) = \cos\left((2k+1)\pi + \delta_k\right)x, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad \text{где } \delta_k = O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{3}$$

Для достаточно больших $k >> 1$ две серии собственных функций $u_k^{(1)}(x)$ и $u_k^{(2)}(x)$ кслипаютсяь, хотя согласно результатам А.А.Шкаликова [1], эта система образует базис Рисса со скобками в $L_2(0,1)$.

Введем вспомогательную систему функций

$$y_k^{(1)}(x) = \cos(2k+1)\pi x,$$

$$y_k^{(2)}(x) = -\frac{\sin(\delta_k x)}{\delta_k}\sin(2k+1)\pi x + \frac{\cos(\delta_k x) - 1}{\delta_k}\cos(2k+1)\pi x, \;\; k = 0, 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Система функций

$$\left\{\varphi_k^{(1)}(x) = \cos(2k+1)\pi x, \;\; \varphi_k^{(2)}(x) = -x\sin(2k+1)\pi x\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{5}$$

являются собственными $\left(\varphi_k^{(1)}(x)\right)$ и присоединенными $\left(\varphi_k^{(2)}(x)\right)$ функциями задачи типа Самарского-Ионкина

$$-\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \;\; 0 < x < 1, \;\; \varphi(0) + \varphi(1) = 0, \;\; \varphi(1) = 0.$$

Как показано в [2], система (5) этой задачи образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Системы функций $\left\{y_k^{(1)}(x), y_k^{(2)}(x)\right\}$ и $\left\{\varphi_k^{(1)}(x), \varphi_k^{(2)}(x)\right\}$ являются квадратично близкими. Таким образом доказана

Теорема. *Система собственных функций (3) оператора кратного дифференцирования, соответствующего спектральной задаче (1)-(2), не образует безусловного базиса в $L_2(0,1)$. Вспомогательная система функций (4) образует безусловный базис в $L_2(0,1)$.*

Данная работа выполнена при поддержке гранта МНВО РК №23485279.

Литература

1. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. №9. С. 140–179.

2. Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ // Journal Math. Anal. Appl. 1990. V.146, №1. P. 148–191.

О Решении Спектралным Методом Нелокальной Задачи Для Вырождающегося Эллиптического Уравнения С Сингулярным Коэффициентом

Кадиркулов Б. Ж.[1], **Бегимкулов Ф. Х.**[2]

[1]Университет Альфраганус, Институт математики им. В.И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
b.kadirkulov@afu.uz

[2]Университет Перфект, Ташкент, Узбекистан;
begimkulovfkh@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - b^2 y^m u = 0 \tag{1}$$

в вертикальной полуполосе, ограниченной отрезком $OA\,(O\,(0,0)\,,\ A\,(1,0))$ и полупрямыми $OO_\infty\,(x=0)\,,\ AA_\infty\,(x=1)\,,\ y \geq 0$. Здесь p-действительное, а m и b положительные числа.

Как следует из работы [1], постановка и исследование краевых задач для уравнения (1) зависит от параметра p. Поэтому, следуя [1] в данной работе для уравнения (1) сформулированы и исследованы следующие задачи:

Задача 1(2p<1). Найти решение уравнения (1) из класса

$$u\,(x,y) \in C^0\,([0,1] \times [0,\infty)) \cap C^2\,((0,1) \times (0,\infty))\,,$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \text{ равномерно по } \ 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$u\,(0,y) = u\,(1,y)\,,\ y \geq 0, \ \ u_x\,(0,y) = 0, \ \ y > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = \tau(x), \ \ 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 2 (2p=1). Найти решение уравнения (1) из класса

$$u\,(x,y) \in C^0\,([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^2\,((0,1) \times (0,\infty))\,, \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям (2), (3) и

$$\lim_{y \to +0} \frac{u(x,y)}{\ln y} = \tau(x), \ \ 0 \leq x \leq 1.$$

Задача 3 (2p>1). Найти решение уравнения (1) из класса (4), удовлетворяющее условиям (2), (3) и

$$\lim_{y\to+0} y^{2p-1}u(x,y) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$$

где $\tau(x)$ - заданная функция.

В данной работе изучается нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом. Для решения задачи использован спектральный метод. При определенных условиях на заданные функции доказываются теоремы единственности и существования решения задачи. При доказательстве единственности решения используется полнота системы собственных функций, соответствующей одномерной спектральной задаче, а решение задачи строится в виде абсолютно и равномерно сходящегося биортогонального ряда [2].

Литература

1. Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи.// Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. №11. стр. 1565Ц1567.

2. Кадиркулов Б.Ж., Эргашев О.Т. Об одной задаче типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. // Бюллетен института Математики, 2023, Т. 6, №4, стр. 113-121.

Спектральные Краевые Задачи Для Гиперболических Операторов

Кальменов Т. Ш.[1], Садыбеков М. А.[2]

[1] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; kalmenov@math.kz

[2] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; sadybekov@math.kz

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – конечная область, ограниченная отрезком $AB : 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$ и характеристиками $AC : x - y = 0$, $BC : x + y = 1$ уравнения

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + qu = f. \tag{1}$$

Задача S_q. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$au_x + bu_y\Big|_{AB} = 0, \tag{2}$$

$$u(\Theta_0(t)) = \alpha u(\Theta_1(t)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\Theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$ и $\Theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$. Здесь α, a, b – произвольные комплексные числа.

Задачу S_q при $q = 0$ будем обозначать как задача S. Задача S_q является обобщением простейшей краевой задачи со смещением, исследованной А.М. Нахушевым [1] для $f = 0$ и $q = 0$ с неоднородными граничными условиями.

Через L_q обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора, заданного дифференциальным выражением (1) на линейном многообразии функций из класса $C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$,

удовлетворяющих краевым условиям (2) и (3). Под собственными значениями, собственными и присоединчнными функциями задачи S_q будем понимать собственные значения, собственные и присоединчнные вектора соответствующего оператора L_q. Задачу S_q будем понимать вольтерровой, если обратный оператор L_q^{-1} этой задачи является вольтерровым, т.е. вполне непрерывным квазинильпотентным оператором в $L_2(\Omega)$.

Т.Ш. Кальменовым в [2] установлен следующий результат: пусть $ab = 0$, тогда при $\alpha = 0$ задача S является вольтерровой, а при иных значениях α имеет полную систему собственных функций в $L_2(\Omega)$. Доказательство основано на продолжении решения задачи в область Ω^*, симметричную Ω относительно оси $y = 0$, и решении задачи в квадрате методом разделения переменных.

В работе Садыбекова М. и Орынбасарова Е. [3] без условия $ab = 0$, получен критерий корректности задачи S, и при $\alpha \neq 0$ доказана базисность в $L_2(\Omega)$ системы собственных и присоединчнных функций.

В работе Есиркегенова Н. и Садыбекова М. [3] рассмотрены спектральные свойства задачи S_q для отдельных случаев функции $q(x, y)$, найдены условия вольтерровости задачи. В остальных случаях показана полнота корневых функций. Для случаев, когда потенциал зависит от одной переменной, рассмотрены вопросы базисности (не базисности) системы корневых функций.

Следует отметить, что в отличие от эллиптических уравнений, спектральная теория гиперболических задач развита гораздо слабее. Работы [2-4] практически исчерпывают исследования по несамосопряжчнным спектральным задачам для гиперболических уравнений в характеристическом треугольнике.

Методами работы [3] в [5] были рассмотрены спектральные свойства нелокальных краевых задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области, гиперболическая часть которой совпадает с характеристическим треугольником. В работах А. Бердышева этот результат был распространен на различные случаи параболо-гиперболического уравнения второго и третьего порядков.

В настоящем докладе будут презентованы основные результаты по спектральным задачам для уравнения (1) в характеристическом треугольнике и методы получения этих результатов. А также будут сформулированные нерешенные проблемы в этом направлении.

Литература

1. Нахушев А.М. О некоторых нелокальных краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического и смешанного типа //Дифференц. уравнения. 1969. Т.5, №1. С. 44–59.

2. Кальменов Т.Ш. Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения //Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, №1. С. 75–78.

3. Садыбеков М.А., Орынбасаров Е.М. Базисность системы собственных и присоединенных функций краевой задачи со смещением для волнового уравнения //Матем. заметки. 1992. Т. 51, №5. С. 86–89.

4. Есиркегенов Н.А., Садыбеков М.А. Спектральные свойства краевой задачи со смещением для волнового уравнения //Изв. вузов. Матем. 2016. №3. С. 48–54.

5. Садыбеков М.А., Орынбасаров Е.М. Базисность системы корневых функций краевой задачи со со смещением для уравнения Лаврентьева-Бицадзе //Доклады АН СССР. 1992. Т.324. №6. С. 1152–1154.

Спектральный и Пороговый Анализ Возмущения Малого Ранга Дискретного Оператора Лапласа

Лакаев Ш.С.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
shlakaev@mail.ru

Мы рассматриваем семейство дискретных операторов Шрҷдингера $H_{\lambda\mu}$, зависящих от двух параметров, в d-мерной решҷтке с потенциалом, построенным с помоҷью дельта-функции и оператора сдвига. Существование собственных значений, пороговых собственных значений и пороговых резонансов, а также их зависимость от параметров оператора и размерности решҷтки получено явно .

Одночастичный гамильтониан $H_{\lambda\mu}$ в импульсном представлении задается как

$$H_{\lambda\mu}{=}H_0 - V,$$

где невозмущенный оператор H_0 действует на $L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$(H_0 f)(p) {=}\mathfrak{e}(p)f(p),\ f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

где $\mathfrak{e}(p)$ задается через

$$\mathfrak{e}(p) {=}\sum_{j=1}^{d}(1-\cos p_j). \tag{1}$$

Возмущение V является интегральным оператором ранга два

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\left(\mu+\lambda(e^{\mathrm{i}(x_0,p)}+e^{-\mathrm{i}(x_0,s)})\right)f(s)ds, \quad f\in L^2(\mathbb{T}^d).$$

Здесь $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ и $x_0\in\mathbb{Z}^d$ являются параметрами.

Существенный спектр

Возмущение V является двумерным оператором, поэтому из теоремы Вейля следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=\sigma_{\mathrm{ess}}(H_0)$ и

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}) = [0,2d].$$

Для любых $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, определитель Фредгольма, ассоцированный с оператором $H_{\lambda\mu}$ как регулярная функция от $z\in\mathbb{C}\backslash[\mathfrak{e}_{\min},\mathfrak{e}_{\max}]$ определяется как

$$\Delta(\lambda,\mu;z) = \frac{1}{a(z)} - \frac{2b(z)}{a(z)}\lambda - \frac{c(z)}{a(z)}\lambda^2 - \mu.$$

$$a(z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{\mathfrak{e}(t)-z}dt, \quad b(z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{e^{\mathtt{i}(x_0,t)}}{\mathfrak{e}(t)-z}dt,$$

$$c(z) = a^2(z) - b^2(z).$$

Явно выведено существование собственных значений и их зависимость от параметров оператора и размерности решетки.

Теорема 1. *(a). Для всех* $(\lambda,\mu) \in G_0^l \cup \Gamma_l$, *оператор* $H_{\lambda\mu}$ *не имеет собственных значений в* $(-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$.
(b). Для $(\lambda,\mu) \in G_1^l$ *оператор* $H_{\lambda\mu}$ *имеет простое собственное значение в* $(-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$.
(c). Для $(\lambda,\mu) \in G_0^r \cup \Gamma_r$, *the operator* $H_{\lambda\mu}$ *не имеет собственных значений в* $(\mathfrak{e}_{\max}, \infty)$.
(d). Для $(\lambda,\mu) \in G_1^r$ *оператор* $H_{\lambda\mu}$ *имеет простое собственное значение в* $(\mathfrak{e}_{\max}, \infty)$.

Теорема 2.*Предположим что* $d = 1, 2$.
(a).Если $|x_0|_1$ *четное число,* D_0=$\{(0,0)\}$ *и* $\sigma_{\text{disc}}(H_{\lambda\mu}) \neq \varnothing$ *для любого* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$;
(b). Если $|x_0|_1$ *нечетно, то* $D_0 \neq \varnothing$ *и* $\sigma_{\text{disc}}(H_{\lambda\mu}) = \varnothing$ *для любого* $(\lambda,\mu) \in D_0$

Литература

1. Muminov Z and Lakaev Sh., Bulleten of National University of Uzbekistan. Mathematics and Natural Sciences. (2020) Vol 3, Iss 1/4 (47-58 pp)

2. Muminov Z., Alladustov Sh., and Lakaev Sh.,Journal of Mathematical Analysis and Application, (2021), 496(2), 124827

3. Muminov Z., Alladustov Sh., and Lakaev Sh, Lobachevskii Journal of mathematics, (2022), Vol 43, №8, pp. 1949-1955

4. Damanik D., Hundertmark D., Killip R. and Simon B., Commun. Math. Phys. 238, 545–562 (2003)

Оценки Собственных И Сингулярных Чисел Резольвенты Одного Класса Линейных Дифференциальных Операторов Типа Кортевега-Де Фриза И Полнота Её Корневых Векторов

Муратбеков М. Б.[1], **Муратбеков М. М.**[2], **Баяндиев Е. Н.**[1]

[1]Таразский университет имени М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан;
musahan_m@mail.ru

[2]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
madimm@list.ru

Как известно, уравнения в частных производных третьего порядка является одним из основных уравнений теории волн. Например, в частности, линеаризованные уравнения типа Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами моделирует ионно-акустические волны в плазменные и акустические волны на кристаллической решетке [1-2].

В последнее время интерес к дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка возрос благодаря новыми приложениями в физике, механике и биологии.

Из обзора литературных источников следует, что ранее в основном изучены вопросы о существовании и гладкости решений для дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка в случае с постоянными и ограниченными коэффициентами.

В отличие от этих работ, в настоящей работе рассматриваются вопросы существование, компактность, оценки собственных и сингулярных чисел, а так же полнота корневых векторов резольвенты одного класса линейных сингулярных операторов типа Кортевега-де Фриза в случае неограниченной области с растущими коэффициентами.

Литература

1. Villanueva A. On Linearized Kortweg-de Vries Equations // Journal of Mathematics Research. 2012. Vol. 4, Issue 1. P. 2–8.

2. Abdel Latif M.S. Some exact solutions of KdV equation with variable coefficients // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol.16, Issue 4. P. 1783–1786.

Необходимые Условия Разложимости По Собственным Функция Оператора Шредингера С Сингулярным Потенциалом

Пирматов Ш. Т.

Ташкентский Государственный технический университет имени Ислама Каримова
shamshod@rambler.ru

Пусть Ω произвольная ограниченная область в $R^N, (N \geq 3)$, имеющая C^∞-гладкую границу, а $q-$ произвольная неотрицательная функция из класса $L_2(\Omega)$. Рассмотрим оператор Шредингера

$$L = -\Delta + q(x).$$

Оператор L является симметрическим и формально положительным относительно скалярного произведения гильбертова пространства $f \in L_2(\Omega)$. Обозначим через $\hat{L}$ произвольное положительное самосопряженные расширение оператора L с дискретным спектром. В силу классической теоремы К.О. Фридрихса такое самосопряженные расширение существует.

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ обозначает последовательность собственных значений оператора $\hat{L}$, а $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - полную ортонормированную систему соответствующих собственных функций в $L_2(\Omega)$. Спектральное разложение произвольной функции $f \in L_2(\Omega)$ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x).$$

В настоящей работе изучается вопрос о разложении функции в окрестности точки, в которой сходится ее спектральное разложение.

В работе предполагается, что потенциал q сферически симметричен. А именно, пусть $a \in C^\infty(0,\infty)$ - неотрицательная функция, удовлетворяющая $t^k|a^{(k)}(t)| \leq C_\tau t^{\tau-1}$ $(t > 0;\ \ k = 0, 1, .., [N/2])$ для некоторого $\tau > 0$. Если $N = 3$, то предполагается, что $\tau > 1/2$. В частности, у нас есть $a(t) \leq C_\tau t^{\tau-1}$ $(t > 0)$. Константа C_τ зависит только от τ. Теперь предположим, что потенциал q имеет вид

$$q(x) = \frac{a(|x - x_0|)}{|x - x_0|}, \ \ x \in \Omega$$

где $x_0 \in \Omega$ произвольная, но фиксированная точка.

Среднее значение порядка $\alpha \geq 0$ функции $f(x)$ по шару радиуса R с центром в точке x определяется следующим образом:

$$S_R^\alpha f(x) \ = \frac{1}{\omega_N(\alpha) r^N} \int\limits_{|y| \leq R} \left(1 - \frac{|y|^2}{r^2}\right)^{\alpha-1} f(x + y)dy,$$

где

$$\omega_N(\alpha) = \int\limits_{|y|<1} \left(1-|y|^2\right)^{\alpha-1} dy.$$

Теорема. Если спектральное разложение функции $f \in L_2(\Omega)$ в точке $x_0 \in \Omega$ сходится к S, то при $\alpha > 1/2$ выполняется следующая равенство

$$\lim_{R\to 0} S_R^\alpha f(x_0) = S.$$

Доказательство теоремы опирается на формулу среднего значения полученного Ш.Алимовым [2].

Для любой собственной функции $u_n(x)$ оператора $\hat{L}$ имеет место формула среднего значения вида

$$\int\limits_\theta u_n(x_0+r\theta)d\theta = u_n(x_0)\left\{C_N(r\mu_n)^{1-N/2}J_{N/2-1}(r\mu_n)+\psi(r,\mu_n)\right\},$$

где $|\psi(r,\mu_n)| \le C\mu_n^{-\tau}\omega(r\mu_n)$, $\omega(t)=\min(1,t^{(1-N)/2})$, $C_N = 2^{N/2-1}\Gamma(N/2)$.

Литература

1. Alimov Sh. A., Ilin V. A., Nikishin E. M. Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decompositions. I, Russ. Math. Surv. 1976. 31 (6), pp. 29-86.

2. Sh.A.Alimov, I. Joo. On the Riesz summability of eigenfunction expansions. Acta Sci.Math. 1983. 45 pp. 5-18.

3. Titchmarsh E.C. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Part II.1958. Oxford. Clarendon Press.

4. F. Riesz and B.Sz.-Nagy. Lecons d'analyse finctionnelle. Akademiai Kiado.1952. Budapesht.

Обобщенные Жордановы Цепочки Специального Вида Линейной Оператор-Функции Спектрального Параметра

Рахимов Д. Г.[1], Ахмаджанова Д.[2], Мелиев З. М.[3]

[1,2,3] Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий TIFT, Ташкент, Узбекистан;
davranaka@yandex.com

В теории возмущения дискретного спектра линейных операторов известна роль обобщенной жордановой структуры (ОЖС) [1]. В случае кратного собственного значения процесс становился неопределенным, поэтому в ряде работ [2,3] возмущая исходный оператор конечномерным оператором кратный случай сводился к простому. При этом исключался случай, когда операторы A и B имеют общие нули, который был назван вырожденным случаем. Целью этой работы является изучение такого одномерного вырождения операторов с помощью введения аппарата незаканчивающихся жордановых цепочек.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A, B \in L(E_1 \to E_2)$ фредгольмовы операторы.

Согласно определению ОЖЦ в [1] множество элементов $\{\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \dots \varphi^{(p)}\}$ образует A - жорданову цепочку нуля φ оператора B, если элементы этого набора построены по следующему правилу. Пусть γ какой-нибудь функционал такой что $\gamma(\varphi) = 1$. Он порождает разложение $E_1 = E_1^1 + E_1^{\infty-1}$, где $E_1^1 = span\{\varphi\} = L(\varphi)$ и $E_1^{\infty-1} = \{x|\langle x, \gamma\rangle = 0\}$. Если $A\varphi \in R(B)$ то существует единственный элемент $\phi^{(2)} \in E_1^{\infty-1}$, такой что $B\phi^{(2)} = A\phi^{(1)}$. Аналогично, если $A\varphi^{(k)} \in R(B) = Im(B)$, то существует единственный элемент $\phi^{(k+1)} \in E_1^{\infty-1}$, такой что $B\varphi^{(k+1)} = A\varphi^{(k)}$. A - жорданова цепочка элемента $\varphi^{(1)}$ заканчивается, если $A\varphi^{(p)} \notin R(B)$. Элемент $\varphi^{(p)}$ называется тогда последним элементом этой цепочки.

Определение 1. A - жорданова цепочка элемента $\varphi \in N(B)$ называется незаканчивающейся, если на некотором шаге $A\varphi^{(k)} = 0$ и тогда все последующие элементы ее являются нулями.

Справедлива лемма.

Лемма 1. Если элементы жордановой цепочки $\{\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \dots \varphi^{(p)}\}$ линейно зависимы, то функционал γ можно выбрать так, что цепочка построенная по паре $\{\varphi, \gamma\}$ будет незаканчивающейся и все ненулевые ее элементы будут линейно независимы.

Условие 1. В пространстве E_1 существует элемент e_1 такой что $\langle Ae_1, \psi\rangle \neq 0$.

Будем строить теперь жорданову цепочку оператор-функции $B - \varepsilon A$ которая бы заканчивалась элементом e_1. Если $Be_1 \in R(A)$, то существует вектор e_2 такой что $Ae_2 = Be_1$ и так далее, пока мы не придем к элементу $e_s : Be_s \notin R(A)$, т.е. жорданова цепочка элемента e_s закончится элементом e_1 и $Ae_1 \notin R(B)$. $Ae_{k+1} = Be_k$ - формула для элементов этой цепочки.

Лемма 2. Элементы цепочек $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, e_s, \dots, e_1$ линейно независимы.

Лемма 3. Векторы $B\varphi^{(1)}, B\varphi^{(2)}, \dots, B\varphi^{(k)}, Be_s, \dots, Be_1$, Ae_1 также линейно независимы.

Рассмотрим в E_2 подпространство

$$E_{2,p+s-1} = L\Big\{Ae_s = Be_{s-1}, Ae_{s-1} = Be_{s-2}, \dots, Ae_2 = Be_1, Ae_1 = z,$$
$$A\varphi^{(1)} = B\varphi^{(2)}, \dots, A\varphi^{(p-1)} = B(1)\varphi^{(p)}\Big\}. \quad (1)$$

Функционал ψ удовлетворяет условиям:$\langle z, \psi\rangle = 1$ и обращается в ноль на всех остальных векторах системы (1) составляющих базис $E_{2,p+s-1}$.

Используя введенный в лемме 1 функционал γ построим оператор Шмидта:

$$\tilde{B} = B + \langle ., \gamma\rangle z \ \text{ и } \ \Gamma = \tilde{B}^{-1}.$$

С его помощью определим функционалы:

$$\psi_1 = \psi, \ \psi_2 = (\Gamma^* A^*)\,\psi_1, \dots, \psi_s = (\Gamma^* A^*)^{s-1}\,\psi_1.$$

Лемма 4. Система функционалов $\psi_1, \dots, \psi_s$ биортогональна к векторам Ae_1, $Ae_2 = Be_1, \dots, Ae_s = Be_{s-1}$ и обращается в ноль на векторах $\{A\varphi^{(j)}\}$. Выберем теперь функционал χ удовлетворяющий условиям

$$\langle A\varphi^{(p-1)}, \chi\rangle = 1 \ \text{ и } \ \langle a, \chi\rangle = 1$$

для всех остальных элементов a из системы (1) и построим функционалы $\chi^{(j)}$ $j = 1, \ldots, p-1, \ldots$ по формулам

$$\chi^{(j)} = \chi,\ \chi^{(2)} = (\Gamma^*\, A^*)\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(p-1)} = (\Gamma^*\, A^*)^{p-2}\chi^{(1)}.$$

Лемма 5. Система функционалов $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(p-1)}$ биортогональна к элементам $A\varphi^{(p-1)}, \ldots, A\varphi^{(1)}$ и обращается в ноль на векторах Ae_s, $Ae_{s-1}, \ldots, Ae_1 = z$.

Теорема. Функционалы $A^*\psi_s, \ldots, A^*\psi_2$, $A^*\psi_1, A^*\chi^{(1)}, \ldots, A^{(*)}\chi^{(p-1)}$ будут биортогональны набору $\left\{e_s, \ldots, e_2, e_1, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(p-1)}\right\}$.

Литература

1. Вайнберг, М.М., Треногин В.А. //Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969. – 624 с. Wolter-Noordorf. Leyden 1975.

2. Рахимов Д.Г., Логинов Б.В. //Возмущения в задачах на собственные значения. Монография. Ташкент, 2020, 347с.

3. Rakhimov D. G. and Akhmadzhanova D. //On analytic perturbation of linear equations in the case of incomplete generalized Jordan set. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 278, №. 4, January, 2024.

О Разрешимости Некоторых Обратных Задач Для Псевдопараболического Уравнения С Множественной Инволюцией

Турметов Б. Х.

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан;
batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть $Q = \{(t,x) : 0 < t < T, x \in \Omega\}$ - цилиндрическая область, где Ω - единичный шар, $\partial\Omega$-единичная сфера. Пусть также $S_1, S_2, ..., S_l$ множество вещественных симметричных коммутативных матриц $S_iS_j = S_jS_i$ таких, что $S_j^2 = I$.

В качестве примера можно рассмотреть матрицу отображения $S_1x = (-x_1, x_2, ..., x_n)$. Очевидно, что отображение S_j обладает свойством инволюции $S_j^2x = x$. Произведение таких отображений также являются инволюцией. Общее количество всевозможных произведений таких отображений с учетом тождественного отображения $S_0x = x$ равняется 2^l. Пусть i индекс и $i = (i_li_{l-1}...i_1)_2 \equiv 2^0i_1 + ... + 2^{l-2}i_{l-1} + 2^{l-1}i_l$ его представление в двоичной системе исчислении, где i_k принимает один из значений 0 или 1. Тогда для любого индекса $i \in \left\{0, 1, ..., 2^l - 1\right\}$ мы можем рассмотреть отображения вида $S_1^{i_1}...S_{l-1}^{i_{l-1}}S_l^{i_l}x$. Используя эти отображения введем оператор

$$L_av(x) = \sum_{i=0}^{2^l-1} a_i\Delta v\left(S_1^{i_1}...S_l^{i_l}x\right),$$

где Δ - оператор Лапласа, a_j- некоторые действительные числа.

Рассмотрим в области Q уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x) - L_au(t,x)\right) - L_au(t,x) = f(x)g(t), (t,x) \in Q. \tag{1}$$

В данной работе для уравнения (1) мы исследуем следующие обратные задачи.

Задача 1. Пусть $g(t) = 1$. Необходимо найти пару функций $\{u(t,x), f(x)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) и следующим условиям:

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0, 0 < t < T, x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$u(T,x) = \psi(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ заданные функции.

Задача 2. Необходимо найти пару функций $\{u(t,x), g(t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1), условиям (2), (3) и дополнительному условию

$$u(t,x_0) - L_a u(t,x_0) = h(t), 0 \le t \le T,$$

где x_0 - произвольная точка области Ω.

Если $a_0 = 1, a_j = 0, j = 1,2,...,2^l - 1$, то мы получаем классическое псевдопараболическое уравнение. В работе [1] отмечено, что при определенных допущениях классическое уравнения вида (1) в одномерном случае описывает фильтрацию жидкости в пористых средах, а соответствующее решение интерпретируется как влажность почвы.

Отметим, что задача 1 в одномерном случае для дробного аналога псевдопараболического уравнения с инволюцией исследована в работе [2]. В многомерном случае аналогичные задачи для нелокального аналога параболического уравнения изучены в работе [3].

При исследовании основных задач настоящей работы для нелокального аналога оператора Лапласа возникает спектральная задача с условием Дирихле. В работе найдены собственные функции и собственные значения спектральной задачи и доказана полнота системы собственных функций в пространстве L_2. В дальнейшем свойства найденных собственных функций используется для нахождения решений рассматриваемых задач. Первая задача решается с применением метода Фурье, а вторая задача решается сведением ее к интегральному уравнению Вольтерра. Доказаны теоремы о существования и единственности решений рассматриваемых задач. При доказательстве сходимости полученных рядов существенно используются результаты работы В.А.Ильина [4].

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РК (грант №AP19677926).

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва.: Высш. шк. 1995.

2. Serikbaev D. Inverse problem for fractional order pseudo-parabolic equation with involution //Ufa Mathematical Journal. 2020. T.12, №4. C. 122–138.

3. Turmetov B., Koshanova M., Muratbekova, M., Orazov I. Direct and inverse problems for a fractional parabolic equation with multiple involution//Fractional Differential Calculus. 2024. Vol.14, №2. P.213–233.

4. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// УМН. 1960. Т.15, №2. С.97–154.

Интегрирование Нелинейного Уравнения Шредингера Отрицательного Порядка С Интегральным Источником В Классе Периодических Функций

Уразбоев Г. У.[1], **Хасанов М. М.**[1], **Матякубова С.К.**[1]

[1] Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
gayrat71@mail.ru

Уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций изучено в работах [1], [2], а в работе [3] изучена отрицательно-четная иерархия мКдФ и ее солитонные решения.

В этой работе изучается нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) отрицательного порядка с интегральным источником

$$\begin{cases} p_{xt} = 2\mu p - q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \\ q_{xt} = 2\mu q + p_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_2^- + \psi_2^+\psi_1^-)d\lambda \quad t>0, \quad x\in R. \\ \mu_x = 2qq_t + 2pp_t \end{cases} \tag{1}$$

с условиями

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x),\ \ p(x,t)|_{t=0} = p_0(x),\ \ \mu(x,t)|_{x=0} = \mu_0(t), \tag{2}$$

где, $\mu_0(t) \in C^1[0,\ \infty)$, $p_0(x)$ и $q_0(x)$ - заданные действительные функции с периодом π. Требуется найти действительные периодические по переменной x функции $p(x,t), q(x,t)$ и $\mu(x,t)$, причем

$$p(x+\pi,t) \equiv p(x,t), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R,$$

и удовлетворяющие условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} p(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t\geq 0), \\ q(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t\geq 0), \\ \mu(x,t) \in C_x^1(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t\geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $\beta(\lambda,t) \in C\left([0,\ \infty)\times[0,\ \infty)\right)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику, $\beta(\lambda,t) = \underline{O}\left(1/\lambda^3\right),\ \ \lambda\to\infty$
$\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad , x\in R, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix},\ \ y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ \ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (4) состоит из множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n\in Z$ задачи Дирихле $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$ для системы (4) вместе со

знаками $\sigma_n(t) = sign\{s_2(\pi, \xi_n(t), t) - 1/s_2(\pi, \xi_n(t), t)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (4).

Теорема. Пусть $(p(x,t), q(x,t), \mu(x,t), \psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентом $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$, не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times \left\{ q_t(\tau,t) + \mu(\tau,t) - p(\tau,t) - \xi_n(\tau,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{5}$$

Знаки $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z\backslash\{0\} \tag{6}$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \in Z\backslash\{0\}$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x), q_0(x)$.

Учитывая формулы

$$q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi), p(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n}}{2} - \xi_n(\tau,t) \right), \tag{7}$$

$$\mu(\tau,t) = \mu_0(t) + 2\int_0^{\tau} (p(s,t)p_t(s,t) + q(s,t)q_t(s,t))ds, p_t = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t},$$

$$q_t(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(\tau,t) \frac{\partial h_n(\xi)}{\partial t}, \tag{8}$$

систему (5) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие. Эта теорема дает метод решения задачи (1) – (4). Метод обратной спектральной задачи

Литература

1. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 228–239.

2. Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Балтаева И.И. Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида. // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 31–43.

3. Gomes J.F., Starvaggi Franca G., de Melo G.R. and Zimerman A.H. Negative even grade mKdV hierarchy and its soliton solutions. // J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 445204 (11pp).

О Спектральных Разложениях Эллиптического Дифференциального Оператора С Сингулярным Коэффициентом В Банаховом Пространстве

Халмухамедов А. Р.[1], **Аликулов Т. Н.**[2]
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
khalmukhamedov@gmail.com
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
tolibaka@mail.ru

Рассмотрим в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n $(n>3)$ гладкие многообразия $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_M,\ dimS_k \le n-3,$ каждое из которых однозначно проектируется на некоторую гиперплоскость. Это означает, что для каждого такого многообразия S_k размерности $n-m,$ где $3 \le m < n,$ существует аффинное преобразование R^n, приводящее S_k к виду

$$S_k = \{x = (u,\ v) \in R^n :\ u = \varphi_k(v)\}.$$

Здесь $u \in R^m,\ v \in R^{n-m},\ \varphi_k \in C^1(R^{n-m} \longrightarrow R^m)$, причем равномерно по всем $v \in R^{n-m}$ имеют место неравенства $\left|\partial\varphi_k^j/\partial v_i\right| \le const,$ где $i = 1,\ \dots,\ n-m,$ $j = 1,\ \dots,\ m$ и $\varphi_k = (\varphi_k^1,\ \dots,\ \varphi_k^m).$

Пусть $S = \bigcup\limits_{k=1}^{M} S_k,\ \rho = \rho(x) = dist(x,\ S) = \inf\limits_{y\in S}|x-y|.$ Положим

$$\rho_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\Big(u_k - \varphi_j^k(v)\Big)^2},$$

где u_k и φ_j^k- координаты векторов $u \in R^m$ и $\varphi_j^k \in R^m,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,M$ соответственно.

Рассмотрим в $n-$ мерном евклидовом пространстве R^n эллиптический дифференциальный оператор с сингулярным коэффициентом вида

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha D^\alpha + q(x), \tag{1}$$

с областью определения $\mathbb{D}(A) = W_p^l(R^n),\ l = 2s,\ s \in N,\ 1 < p < m,\quad a_\alpha = const,$ где потенциал $q(x) \in C^\infty(R^n\backslash S)$ является комплекснозначной функцией действительных переменных, допускающей особенность вида

$$|D^\beta q(x)| \le \frac{const}{[\rho(x)]^{1+|\beta|}}\Big\{1 + \frac{1}{[\rho(x)]^\tau}\Big\}. \tag{2}$$

Здесь $0 \le \tau < s,\quad \alpha = (\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1,\ \dots,\ \beta_n)-$ мультииндексы, $0 < |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = l,\quad 0 \le |\beta| = \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i \le n,\quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ \dots\ D_n^{\alpha_n},$ $D^\beta = D_1^{\beta_1}D_2^{\beta_2}\ \dots\ D_n^{\beta_n}.$ Пусть для всех $x \in R^n$ и $\xi \in R^n$ при $\xi \ne 0$ символ оператора (1), имеет место неравенство

$$C_1|\xi|^l \le \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha|\xi^\alpha| \le C_2|\xi|^l, \tag{3}$$

где $C_1 = const > 0, \quad C_2 = const > 0.$

Пусть $L_p(R^n)-$ комплексное банахово пространство и $A(x, D)$ является замкнутым линейным оператором в пространстве $L_p(R^n)$. Обозначим ещё через $\mathbb{D}(A)$, $\mathbb{R}(A)$, $\mathbb{N}(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$ соответственно область определения, область значений, ядро, множество регулярных точек и спектр оператора $A(x, D)$.

Пусть $\sum_\theta = \{\lambda \in C\backslash\{0\}, \quad |arg\lambda| < \theta\}$, где $\theta \in (0,\ \pi)-$ некоторое число.

В данной работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \frac{m}{2+\tau},\ 0 \le \tau < min(m-2,\ s),\ 0 < \theta < \pi,\ \mathbb{N}(A) = 0$ *и* $\sigma(A) \subset \Sigma_\theta$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для всех* $\lambda \in C\backslash\{\Sigma_\theta\}$ *выполняется соотношение:*

$$\left\|(\lambda + L)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} \le C|\lambda|^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \frac{m}{2+\tau}, \quad 0 \le \tau < min(m-2,\ s), \quad 0 < \theta < \pi, \quad \mathbb{N}(A) = 0$ *и* $\sigma(L) \subset \Sigma_\theta$. *Тогда существует постоянная* $M > 0$ *такая, что выполняется неравенство:*

$$\left\|L^{iy}\right\|_{L_p(R^n)} \le Me^{\theta|y|}, \quad y \in R.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \frac{m}{2+\tau}, \quad 0 \le \tau < min(m-2,\ s), \quad 0 < \mu < 1$ *и существует* $0 \le \delta \le \mu$ *такое, что*

$$\|E_\lambda u\|_{L_p(R^n)} = O(\lambda^\delta), \quad u \in L_p(R^n).$$

Тогда для любого u *из класса* $D(A^\mu)$ *имеет место соотношение*

$$\|E_\lambda u - u\|_{L_p(R^n)} = o(\lambda^{\delta-\mu}).$$

Отметим, что мнимые степеней операторов ранее изучались в работах [1−6].

Литература

1. Komatsu H. Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. 1966. V. 1, №2. P. 285–346.

2. Alimov Sh.A. Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential // Евразийск. матем. журн. 2007. №2. P. 4–11.

3. Khalmukhamedov A.R. Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential// American Mathematical Society. Contemporary Mathematics. 2016. V. 59. P. 205–215.

4. Prüss J. and Sohr H. Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p spaces // Hiroshima Math. J. 1993. V. 23. P. 161–192.

5. Fujiwara D. Fractional powers of second order elliptic operators // J. Math. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 481–522.

6. Sohr H. and Thäter G. Imaginary powers of second order differential operators and L^q - Helmholtz decomposition in the infinite cylinder // Math. Ann. 1998. V. 311, №3. P. 577–602.

Uch Bozonli Sistemaga Mos Shryodinger Operatorining Invariant Qism Fazolari

J. I.Abdulayev[1], A. I.Eshniyozov[2]

[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston;
[2]Guliston davlat universteti, Sirdaryo, O'zbekiston;
e-mail[1]: jabdullaev@mail.ru, e-mail[2]:eshniyozovabdumalik75@gmail.com

Ikki o'lchamli panjara $\mathbb{Z}^2$ da harakatlanuvchi, uch bozonli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori $H_\mu(\mathbf{K})$ ni qaraymiz. Bu operator $L_2^s((\mathbb{T}^2)^2)$ Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida quyidagicha aniqlanadi [1]-[2]:

$$(H_\mu(\mathbf{K})f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = E_K(\mathbf{p},\mathbf{q})f(\mathbf{p},\mathbf{q}) - \mu(V_1+V_2+V_3)f(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Bu yerda

$$E_K(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \varepsilon(K-\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{2}(1-\cos p_i), \tag{1}$$

$\mu > 0$ ikki bozonning o'zaro ta'sir energiyasi, V_α, $\alpha \in \{1,2,3\}$ operatorlar quyidagicha aniqlanadi:

$$(V_1f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{s},\mathbf{q})d\mathbf{s}, \quad (V_2f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{p},\mathbf{s})d\mathbf{s},$$

$$(V_3f)(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{s},\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

V_1, V_2, V_3 operatorlar, proyeksiyalash operatorlari, shuning uchun ular musbat operatorlar ham bo'ladi.

Bu sistemaning ikki zarrachali qism sistemasiga mos Shryodinger operatori $h_\mu(\mathbf{k})$ quyidagicha aniqlanadi

$$(h_\mu(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = [\varepsilon(\mathbf{p})+\varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{p})]f(\mathbf{p}) - \frac{\mu}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Barcha $\mu > 0$ va $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ larda ikki zarrachali Shryodinger operatori $h_\mu(\mathbf{k})$ muhim spektr tubida yagona oddiy $z_\mu(\mathbf{k})$ xos qiymatga ega bo'ladi.

Uch bozonli sistemaga mos Shryodinger operatori $H_\mu(\mathbf{0})$ ning muhim spektri $E_0(\mathbf{p},\mathbf{q})$ va $\Lambda_\mu(\mathbf{p}) = z_\mu(\mathbf{p})+\varepsilon(\mathbf{p})$ funksiyalar qiymatlari to'plamining birlashmasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\sigma_{ess}(H_\mu(\mathbf{0})) = [z_\mu(\mathbf{0}),\, 6+z_\mu(\boldsymbol{\pi})] \cup [0,\, 9].$$

Istalgan $\mu > 0$ da $H_\mu(\mathbf{0})$ operator muhim spektri $\sigma_{ess}(H_\mu(\mathbf{0}))$ ning chap chekkasi $z_\mu(\mathbf{0})$ dan boshlanadi.

Har bir $z \in (-\infty,\, z_\mu(\mathbf{0}))$ uchun $L_2(\mathbb{T}^2)$ Hilbert fazosida $A_\mu(z)$ integral operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(A_\mu(z)f)(\mathbf{p}) = \frac{\mu}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Delta_\mu(\mathbf{p},z)}\,(E_0(\mathbf{p},\mathbf{q})-z)\sqrt{\Delta_\mu(\mathbf{q},z)}}. \tag{2}$$

Bu yerda E_0 funksiya (1) tenglik bilan aniqlanadi.

$$\Delta_\mu(\mathbf{p}, z) = 1 - \frac{\mu}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{d\mathbf{q}}{E_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - z}$$

– ikki zarrachali $h_\mu(\mathbf{k})$ operatorga mos Fredholm determinanti.

Shryodinger operatori $H_\mu(\mathbf{0})$ va Faddeev tipidagi $A_\mu(z)$ integral operatorlar xos qiymatlari orasidagi bog‘lanish quyidagi ikki lemma orqali o‘rnatiladi.

1-lemma. *$z \in (-\infty,\, z_\mu(\mathbf{0}))$ soni $H_\mu(\mathbf{0})$ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun $\lambda = 1$ soni $A_\mu(z)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda z xos qiymatning karraligi $\lambda = 1$ xos qiymatning karraligi bilan ustma-ust tushadi.*

2-lemma (Birman-Shvinger prinsipi). *$H_\mu(\mathbf{0})$ operatorning $z < z_\mu(\mathbf{0})$ dan chapda yotuvchi xos qiymatlari soni, $A_\mu(z)$ operatorning birdan katta xos qiymatlari soniga teng.*

Shunday ekan, biz (2) tenglik bilan aniqlangan $A_\mu(z)$ integral operatorning invariant qism fazolarini o‘rganamiz.

Invariant qism fazolar. $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazoning juft va toq funksiyalaridan tashkil topgan qism fazolarini mos ravishda $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ bilan belgilaymiz. Bu fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazoni qoplaydi, ya’ni quyidagi tenglik o‘rinli:

$$L_2(\mathbb{T}^2) = L_2^e(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^o(\mathbb{T}^2).$$

1-teorema. *Ixtiyoriy $\mu > 0$ va $z \in (-\infty,\, z_\mu(\mathbf{0}))$ uchun $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ qism fazolar $A_\mu(z)$ operatorga nisbatan invariantdir.*

Endi $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazoni simmetrik $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ va antisimmetrik $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ fazolar to‘g‘ri yig‘indisi shaklida yozib olamiz

$$L_2(\mathbb{T}^2) = L_2^s(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{as}(\mathbb{T}^2).$$

2-teorema. *Ixtiyoriy $\mu > 0$ va $z \in (-\infty,\, z_\mu(\mathbf{0}))$ uchun $L_2^s(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolar $A_\mu(z)$ operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

Endi $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazoni quyidagicha to‘g‘ri yig‘indi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$L_2(\mathbb{T}^2) = [L_2^e(\mathbb{T}) \oplus L_2^o(\mathbb{T})] \otimes [L_2^e(\mathbb{T}) \oplus L_2^o(\mathbb{T})] = \mathcal{H}^{ee} \oplus \mathcal{H}^{oo} \oplus \mathcal{H}^{eo} \oplus \mathcal{H}^{oe}.$$

Bu yerda

$$\mathcal{H}^{ee} = L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}^{oo} = L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T}),$$
$$\mathcal{H}^{eo} = [L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T})], \quad \mathcal{H}^{oe} = L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}).$$

Shuni ta’kidlaymizki, har bir tayinlangan $\mu > 0$ da $z_\mu(\cdot)$ funksiya $\mathcal{H}^{ee}$ qism fazoga qarashli bo‘ladi va $z_\mu(p_1, p_2)$ koordinatalarini joyini almashtirishga nisbatan simmetrik, ya’ni $z_\mu \in L_2^s(\mathbb{T}^2)$.

3-teorema. *$\mathcal{H}^{ee}$, $\mathcal{H}^{oo}$, $\mathcal{H}^{eo}$, $\mathcal{H}^{oe}$ qism fazolar $A_\mu(z)$ operatorga nisbatan invariantdir.*

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Lakaev S.N. and Abdullaev J.I. Asymptotics of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Difference Operator on a Lattice//Theoretical and Mathematical Physics, 2003. Vol. 136. Issue 2, P. 1096 – 1109.

2. Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M. and Kuliev K. D. The existence of eigenvalues of Schrödinger operator on three dimensional lattice//Methods of Functional Analysis and Topology, 2022. 28 P. 189 – 208.

Cheksiz Potensialli Diskret Shryodinger Operatorining Xos Qiymatlari Haqida

J. I. Abdullayev[1,2], **A. M. Toshturdiyev**[1]

[1] Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston;
[2] O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston;
e-mail[1]: jabdullaev@mail.ru, e-mail[2]: atoshturdiyev@mail.ru

Kvant mexanikasida har bir fizik kattalikka ma’lum operatorni mos qo‘yish mumkin. Bu operatorlar chiziqli va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi shart. Operatorlarning chiziqlilik xossasi superpozitsiya prinspining bajarilishidan kelib chiqadi, o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi esa fizik kattaliklar operatorlarining haqiqiy sonlar bilan ifodalanishi kerakligi bilan bog‘liqdir. Har bir bir fizik kattalik opearatorini tanlab olishda umumiy xarakterga ega bo‘lgan fizik mulohazalardan foydalanish zarur, bunday operatorlar yordamida olingan dinamik o‘zgaruvchilarni tajriba natijalari bilan moslashtiriladi. Klassik mexanikada muhim dinamik xarakteristikalar sifatida moddiy nuqtaning koordinatasi, uning tezligi, energiyasi kabi kattaliklar tanlab olinadi. Kvant mexanikasida esa zarrachaning tezligi uning impulsi bilan almashtiriladi, energiya esa impulslar orqali ifodalangan bo‘ladi [1].

d – o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^d$ da harakatlanayotgan ikki zarrachali sistema Hamiltoniani H ning bog‘langan holatlarini o‘rganish, Shryodinger operatorlari oilasi $H(\mathbf{k}), k \in \mathbb{T}^d$ (bu yerda $\mathbf{k}$ sistemaning to‘la kvaziimpulsi) ning xos qiymat va xos funksiyalarini o‘rganish masalasiga keltirish birinchi marta [2] - [4] ishlarda uchraydi. Bundan tashqari bu ishlarda $H(\mathbf{k})$ operatorning xos funksiyalari sistema Hamiltoniani H ning bog‘langan holatlari, xos qiymatlari esa bog‘langan holatga mos energiyaning qiymati sifatida talqin qilinishi asoslangan. [5] ishda bir o‘lchamli panjarada ikki zarrachali Shryodinger operatorining xos qiymatlari qo‘zg‘alishlari qaralgan. Ikki zarrachali Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni chekliligi [6], [7] ishlarda o‘rganilgan. Uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatorining spektri invariant qism fazolar metodidan foydalanib [8]-[10] ishlarda tahlil qilingan.

Bu ishda uch o’lchamli panjara $\mathbb{Z}^3$ da harakatlanayotgan ikki fermionli sistemaga mos Shryodinger operatori $H(\mathbf{k})$ ni potensial tashuvchisi, markazi koordinata boshida radiusi $r = 1$ bo‘lgan cheksiz truba shaklidagi

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \ \ |n_1| + |n_2| \le 1\}$$

to‘plamdan iborat bo‘lgan silindrik

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & \text{agar} \quad |n_1| + |n_2| \le 1 \\ 0, & \text{agar} \quad |n_1| + |n_2| \ge 2, \end{cases} \tag{1}$$

potensialda aniqlab olamiz. Bu yerda $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$, $\bar{v} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ – quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan kamayuvchi funksiya:

$$\bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \ldots > \bar{v}(n) > 0 \quad \text{va} \quad \bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Ikki fermionli sistemaga mos Shryodinger operatori $H(\mathbf{k})$ Hilbert fazosi $L_2^o(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : \ f(-\mathbf{q}) = -f(\mathbf{q})\}$ toq funksiyalar fazosida quyidagi formula orqali beriladi:

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V.$$

Bu yerda zarrachalarning kinetik energiyasiga mos operator $H_0(\mathbf{k})$ dispersion funksiya

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}) = 6 - 2\sum_{i=1}^{3} \cos\frac{k_i}{2}\cos q_i \tag{3}$$

ga ko‘paytirish operatori sifatida aniqlanadi.

Zarrachalarning potensial energiyasiga mos V operator esa $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosida quyidagicha ta’sir qiladi:

$$(Vf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\Big[\bar{v}(1)\sum_{i=1}^{3}\sin p_i \sin q_i + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)\sum_{i=1}^{2}\Big(2\cos np_3\cos nq_3\sin p_i\sin q_i +$$

$$+ 2\sin np_3\sin nq_3\cos p_i\cos q_i + \frac{1}{2}\sin(n+1)p_3\sin(n+1)q_3\Big)\Big]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

$H_0(\mathbf{k})$ operator $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko‘paytirish operatori bo‘lganligi uchun bu operatorning spektri uzluksiz kesmadan, ya’ni $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaning qiymatlar sohasidan iborat bo‘ladi,

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}),\ M(\mathbf{k})],$$

bu yerda

$$m(\mathbf{k}) := \varepsilon_{\min}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \qquad M(\mathbf{k}) := \varepsilon_{\max}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Veyl teoremasiga ko‘ra $H(\mathbf{k})$ operatorning muhim spektri $H_0(\mathbf{k})$ operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi, ya’ni

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}),\ M(\mathbf{k})].$$

$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi, hamda V operator musbatligidan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\sigma(H(\mathbf{k}))\cap(M(\mathbf{k}),\,\infty) = \emptyset,$$

demak, $\sigma_{\text{disc}}(H(\mathbf{k})) \subset (\infty,\, m(\mathbf{k}))$. Shuning uchun biz faqat $z < m(\mathbf{k})$ shartni qanoatlantiruvchi, ya’ni muhim spektrdan chapdagi xos qiymatlarni topish bilan shug‘ullanamiz.

Yuqorida keltirilgan V operatorning f elementga ta’siridan ko‘rinadiki, u – cheksiz o‘lchamli operator. V operatorning spektri faqat diskret spektr bo‘ladi, bu operatorning xos qiymatlari uchun quyidagi mulohazalar o‘rinli: $\bar{v}(1)$ soni uch karrali xos qiymat, barcha $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ lar uchun $\bar{v}(n)$ soni besh karrali xos qiymat bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-p) = -f(p)\}$ fazo $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ dagi barcha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazo va $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-p) = f(p)\}$ esa $\mathbb{T}$ dagi juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazo bo‘lsin. $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoning qism fazolarini quyidagicha belgilab olamiz:

$$\mathcal{H}_1 := L_2^-(\mathbb{T})\otimes L_2^+(\mathbb{T})\otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_2 := L_2^+(\mathbb{T})\otimes L_2^-(\mathbb{T})\otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

$$\mathcal{H}_3 := L_2^+(\mathbb{T})\otimes L_2^+(\mathbb{T})\otimes L_2^-(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_{123} := L_2^-(\mathbb{T})\otimes L_2^-(\mathbb{T})\otimes L_2^-(\mathbb{T}) \tag{4}$$

bu yerda $\mathcal{H}_i,\ i=1,2,3$ mos ravishda p_i argumenti bo‘yicha toq boshqa ikkita argumenti bo’yicha juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazodir.

Ma’lumki, [10] $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoni

$$L_2^o(\mathbb{T}^3)=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3\oplus\mathcal{H}_{123} \tag{5}$$

to‘g‘ri yi‘g‘indi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda $\mathcal{H}_\alpha,\ (\alpha\in\{1,2,3\})$ fazolar (4) tenglik bilan aniqlangan. $\mathcal{H}_{123}$ qism fazo esa barcha argumentlari bo‘yicha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazodir.

1-lemma. *Faraz qilaylik, $\hat{v}$ potensial (1) ko‘rinishda bo‘lsin. U holda $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ va $\mathcal{H}_{123}$ qism fazolar $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

(5) yoyilma hamda 1-lemmadan foydalanib $H(\mathbf{k})$ operatorni quyidagi to‘g‘ri yig‘indi ko‘rinishida yozish mumkin:

$$H(\mathbf{k})=H_1(\mathbf{k})\oplus H_2(\mathbf{k})\oplus H_3(\mathbf{k})\oplus H_{123}(\mathbf{k}). \tag{6}$$

Bu yerda $H_\alpha(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V_\alpha$ operator bilan $H(\mathbf{k})$ operatorning $\mathcal{H}_\alpha,\ \alpha\in\{1,2,3\}$, invariant qism fazodagi torayganini belgilaymiz, ya’ni $H_\alpha(\mathbf{k})=H(\mathbf{k})|_{\mathcal{H}_\alpha}$. Qo‘zg‘almas $H_0(\mathbf{k})$ operator $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko‘paytirish operatori sifatida aniqlanadi.

Teorema. *Faraz qilaylik, (2) bajarilsin. Istalgan $k_1\in(-\pi,\pi]$ uchun $H_3(k_1,\pi,\pi)$ operator muhim spektrdan chapda cheksiz ko‘p xos qiymatlarga ega.*

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. M.M. Musaxanov, A.S. Rahmatov. Kvant mexanikasi. Darslik. T. Tafakkur bo‘stoni, 2011. - 352 b.

2. S.N. Lakaev and R.A. Minlos Bound states of a cluster operator Theoretical and mathematical Physics. 1979.

3. R.A. Minlos, Sh.S. Mamatov, Bound states of two-particle cluster operator Theoretical and Mathematical Physics, 79 (2), 455–466 (1989).

4. R.A. Minlos and A.I. Mogilner, Some problems concerning spectra of lattice models. in: Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard (P. Exner and P. Seba, eds.), World Scientific, Teaneck N.J., 243–257 (1989).

5. Zh.I. Abdullaev, Perturbation theory for the two-particle Schrödinger operator on a one-dimensional lattice, Theoretical and Mathematical Physics, 145 (2), 1551–1558 (2005).

6. M.I. Muminov and S.K. Ghoshal, Spectral Features of Two-Particle Schrödinger Operators on $d-$ Dimensional Lattice, Complex Analysis and Operator Theory, 14 (1), 1–18 (2020).

7. Zh.I. Abdullaev, I.A. Ikromov, Finiteness of the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice, Theoretical and Mathematical Physics, 152 (3), 1299–1312 (2007).

8. J.I.Abdullaev, B.U. Mamirov. Bound states of the system of two fermions on the three-dimensional lattice. Journal of Physics Conference Series. 697(1):012022. 2016.

9. J.I.Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace. Journal of Modern Physics. 2021. Vol 12. 35-49. 2021.

10. J.I.Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Invariant Subspaces of the Shryodinger Operator with a Finite Support Potential. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №. 3, pp. 1481-1490.

Barenblatt-Jeltov-Kochina Tipidagi Tenglamalarda Boshlang‘ich Shartni Topish Bo‘yicha Teskari Masala

Abduraimova Sh.

Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston;
abdiraimovashoxista1@gmail.com

Aytaylik, $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada

$$u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \ \ 0 < x < l, \ \ 0 < t < T \tag{1}$$

tenglamani

$$B_t^\rho u(x,+0) = \varphi(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

boshlang’ich va

$$u(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = 0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyani topish masalasini qaraylik. Bu yerda boshlang’ich shart musbat haqiqiy ρ kasr tartibli hosila bilan aniqlangan B_t^ρ operator yordamida berilgan. Xususan, B_t^ρ chegaraviy operator Marchaud, Grunwald-Letnikov yoki Liuvill-Weyl kasr tartibli hosilalar orqali berilishi mumkin.

Eslatib o‘tamiz, bu yerda B_t^ρ operatorning quyidagi xossasi muhim ahamiyatga ega (qarang: [1], 3.12-misol va [2]):

$$B_y^\rho e^{-ay} = a^\rho e^{-ay}, \ \ y > 0 \ \text{ va } \ a > 0.$$

Ta’rif. Agar $u(x,t) \in C([0,l] \times [0,T])$ funksiya uchun $u_t(x,t), u_{xxt}(x,t), u_{xx}(x,t) \in C((0,l) \times (0,T))$ bo‘lib, (1) - (3) masalaning barcha shartlarini qanoatlantirsa u holda $u(x,t)$ funksiyaga (1) - (3) *aralash masalaning* ***klassik yechimi*** deyiladi.

Teorema. *Aytaylik, $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ va uchinchi tartibli bo’lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ bo‘lsin. U holda (1) - (3) aralash masalaning $u(x,t)$ yagona yechimi mavjud va quyidagi ko‘rinishda ega*

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\mu_k^\rho} e^{-\mu_k t} \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

bu yerda

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \mu_k = \frac{(\pi k)^2}{l^2 + (\pi k)^2}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Umarov S. Introduction to fractional and pseudo-differential equations with singular symbols. Springer. 2015.

2. Gorenflo R., Luchko Yu.F., Umarov S.R., On some boundary value problems for pseudo-differensial equations with boundary operators of fractional order. Fract. Calc. Appl. Anal., 3, №4, (2000), 454 - 468.

Sobolev Sinfidagi Uzluksiz Funksiyalarni Shryodinger Operatorining Xos Funksiyalari Bo‘yicha Yoyilmasi Haqida

Abdurashidova M. U.[1], **Buvayev Q. T.**[2]

O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
abdurashidovamalika16@gmail.com
O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
buvayev@mail.ru

Aniqlanish sohasi $C_0^\infty(\Omega)$ bo‘lgan $L = -\Delta + q(x)$ operatorini qaraylik, bu yerda Ω- R^3 Evklid fazosining ihtiyoriy sohasi, $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$- Laplas operatori, $q(x) \in C^\infty(\Omega)$.

A orqali L operatorini $L_2(\Omega)$ dagi biror o’z-o’ziga qo’shma kengaytmasini belgilaymiz. Faraz qilaylik, quyidagi

$$Lu_n(x) = \lambda_n u_n(x) \tag{1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $L_2(\Omega)$ da ortonormallangan $\{u_n(x)\}$ silliq funksiyalar sinfi va ushbu $\lambda_n \geq \mu$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo’lsin. U holda λ_n A operatorining xos qiymatlari, $u_n(x)$ esa xos funksiyalari ekanligini osongina ko’rsatish mumkin. Bu holda A operatorining spektral funksiyasi quyidagi

$$\Theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} u_n(x) u_n(y)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

$\forall f(x) \in L_2(\Omega)$ funksiyaning spektral yoyilmasi ushbu

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x) \tag{2}$$

ko’rinishida bo’ladi, bu yerda $f_n = (f, u_n)$. Spektral yoyilmaning s - tartibli Riss o’rtachasi esa quyidagi

$$E_\lambda^s f(x) = \int_0^\lambda (1 - \frac{t}{\lambda})^s dE_t f \tag{3}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar Ω sohasida aniqlangan $f(x)$ funksiya va $l > 0$, $p \geq 1$ sonlari uchun quyidagi

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha f(x)\|_{L_p(\Omega)}$$

norma chekli bo’lsa, u holda bu funksiya Sobolev sinfiga tegishli deyiladi. Bu yerda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ multiindeks.

$\dot{W}_p^l(\Omega)$ orqali $W_p^l(\Omega)$ yotuvchi va $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ da kompakt tashuvchiga ega bo’lgan funksiyalar sinfini belgilaymiz.

Endi ishning asosiy natijalarini keltiramiz:

1-teorema. *D-Ω sohaning ihtiyoriy qism sohasi bo’lsin. $s \geq 0$, $p \geq 1$ va butun $l > 0$ sonlari ushbu*

$$l + s > 1, \quad pl = 3$$

munosabatlar orqali bog'langan bo'lsin. U holda D sohada uzluksiz $f \in \dot{W}_p^l(\Omega)$ *funksiyalar uchun quyidagi*

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda^s f(x) = f(x)$$

tenglik har bir $K \subset D$ *kompaktda tekis bajariladi.*

Bu yerda $l + s > 1$ shart muhim hisoblanadi. Agar bu shartni $l + s = 1$ tenglikka almashtirsak, u holda yuqorida qo'yilgan savolni javobi to'g'ri bo'lmaydi. Aynan quyidagi xulosa o'rinli bo'ladi.

2-teorema. x_0-Ω *sohadagi ihtiyoriy nuqta bo'lsin.* $s \geq 0$, $p \geq 1$ *va butun* $l > 0$ *sonlari ushbu*

$$l + s = 1, \quad pl = 3$$

tengliklar bilan bog'langan bo'lsin. U holda Ω *sohada uzluksiz bo'lgan* $\exists f \in \dot{W}_p^l(\Omega)$ *funksiya topiladiki, quyidagi*

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda^s f(x_0) = +\infty$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, $q(x) = 0$ va N o'lchovli soha uchun xuddi shunga o'xshash natija Sh. A. Alimov ishida olingan [1].

Adabiyotlar Ro'yxati

1. Sh. A. Alimov. The expandability of continuous functions of Sobolev classes in eigenfunctions of the Laplace operator. Sibirsk. Mat. Zh. 19 (1978), №4 721-734.

Ikki Karrali Furye Qatorlarining Ba'zi Bir Elliptik Qismiy Yig'indisi Uchun Umumlashgan Lokalizatsiya

Buvayev Q. T.[1], **Davirova G. N.**[2]

O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
buvayev@mail.ru
O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
gulhayodaverova1@gmail.com

Quyidagi

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn}e^{i(mx+ny)} \tag{1}$$

Furye qatorini qaraymiz. Bu yerda $f_{mn} = (2\pi)^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)e^{-i(mx+ny)}dxdy$- Furye koeffitsientlari.

Ushbu $P(\xi,\eta) = a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2$ ko'phad elliptik ko'phad bo'lsin, ya'ni $\xi^2+\eta^2 \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall(\xi,\eta) \in R^2$ uchun quyidagi $P(\xi,\eta) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $\forall\lambda > 0$ son uchun $\Pi_\lambda = \{(\xi,\eta) \in R^2 : P(\xi,\eta) < \lambda\}$ to'plamni kiritaylik. Δ_λ orqali esa ushbu $\Delta_\lambda = \Pi_\lambda \cap Z^2$ munosabat bilan aniqlangan to'plamni belgilaymiz, bu yerda Z^2-tekislikdagi butun koordinatali nuqtalar to'plami.

$S_\lambda f(x,y)$ - (1) qatorning Δ_λ soha bo'yicha qismiy yig'indisi bo'lsin, ya'ni:

$$S_\lambda f(x,y) = \sum_{(m,n)\in\Delta_\lambda} f_{mn}e^{i(mx+ny)}. \tag{2}$$

$T^2 = (-\pi, \pi]^2$, bu yerda $(-\pi, \pi]^2 = (-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$ - dekart ko‘paytma. $L_2(T^2)$ - T^2 da kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar sinfi bo‘lsin. Bu sinfda normani quyidagicha kiritish mumkin:

$$\|f\|_{L_2(T^2)} = \left(\int_{T^2} |f(x,y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

V.A. Il’in xos funksiyalar bo‘yicha ixtiyoriy yoyilma uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi tushunchasini kiritdi ([1,2]). Il’in tushinchasidan kelib chiqib, biz $L_2(T^2)$ da $S_\lambda f(x,y)$ uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi o‘rinli deb aytamiz, agar $\forall f \in L_2(T^2)$ funksiya uchun ushbu

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda f(x,y) = 0 \tag{3}$$

tenglik $T^2 / suppf$ da deyarli bajarilsa.

Ushbu tezisning asosiy natijasi quyidagi teorema hisoblanadi.

1-teorema. *Agar:*
1. $f(x,y) \in L_2(T^2)$ *va har bir argumentlari bo‘yicha davriy va davri* 2π *ga teng bo‘lsa;*
2. $(x,y) \in \Omega$ *da* $f(x,y) = 0$ *bo‘lsa, bu yerda* $\Omega \subset T^2$ *biror ochiq to‘plam.*
U holda, ushbu

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\lambda f(x,y) = 0 \tag{4}$$

munosabat Ω *ning deyarli hamma yerida bajariladi.*

Eslatib o‘tamiz, N karrali Furye qatorlarining shar bo‘yicha qismiy yig‘indisi uchun umumlashgan lokalizatsiya masalasini birinchi bo‘lib R.R. Ashurov tomonidan [3] ishda o‘rganilgan va bu borada ijobiy natija olingan.

Odatda deyarli yaqinlashish masalalarini o‘rganishda maksimal operatorini kiritish maqsadga muvjfiq:

$$S_* f(x,y) = \sup_\lambda |S_\lambda f(x,y)|.$$

1-teoremani isboti maksimal operatorinig quyidagi bahosiga asoslangan:

2-teorema. $K_R = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R\}$ *- doira bo‘lsin. Agar:*
1. $f(x,y) \in L_2(T^2)$ *bo‘lsa;*
2. $(x,y) \in K_R$ *da* $f(x,y) = 0$ *bo‘lsa, u holda* $\forall r (r < R)$ *uchun* $\exists C = C(R,r)$ *o‘zgarmas son mavjudki, ushbu*

$$\int_{K_r} [S_* f(x,y)]^2 dxdy \le C \int_{T^2} [f(x,y)]^2 dxdy$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. V. A. Il’in. Generalized interpretation of the principle of localization for Fourier series in fundamental function systems, Siberian Math. J., 9:5 (1968), 812-820.

2. Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov, A. K. Pulatov, Multiple series and Fourier integrals, Commutative harmonic analysis - 4, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 42, VINITI, Moscow, 1989, 7-104.

3. R. R. Ashurov. Generalized Localization and Summability Almost Everywhere of Multiple Fourier Series and Integrals, J Math Sci, 278:3 (2024), 408-425.

Yuklangan Hadli Hirota Tipidagi Tenglamani Cheksiz Zonali Davriy Funksiyalar Sinfida Integrallash

Xasanov A.B.[1], **Mannonova Sh.A.**[2]

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston; ahasanov2002@mail.ru

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston; shohista.ww@gmail.com

Abstract. Ushbu ishda davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfidagi yuklangan hadli Hirota tipidagi tenglamani integrallash uchun teskari spektral masalalar usuli qo‘llaniladi. Olti marta uzluksiz differensiallanuvchi davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfidagi cheksizta Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining yechimga ega ekanligi isbotlangan. Koshi masalasining yechimi yetarlicha silliq boshlang‘ich shartlarda har doim mavjud ekanligi isbotlangan.

Ushbu

$$\begin{cases} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6p_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[-q_{xx} + 2q\left(p^2+q^2\right)\right] + c(t)q\left(x_0,t\right)p_x, \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6q_x\left(p^2+q^2\right)\right] + b(t)\left[p_{xx} - 2p\left(p^2+q^2\right)\right] + c(t)q\left(x_0,t\right)q_x, \end{cases} \tag{1}$$

yuklangan hadli Hirota tipidagi tenglamaning

$$\begin{cases} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \ q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni hamda quyidagi

$$\begin{cases} p(x+\pi,t) = p(x,t), q(x+\pi,t) = q(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ p(x,t), q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{cases} \tag{3}$$

silliqlik sinfiga tegishli yechimini cheksiz zonali davriy funksiyalar sinfida topish masalasini qaraymiz. Bu yerda $a(t), b(t), c(t) \in C([0,\infty))$ berilgan uzluksiz chegaralangan funksiyalar, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1)–(3) Koshi masalasining yechimini quyidagi

$$L(\tau,t)y \equiv By' + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{4}$$

Dirak operatori uchun teskari spektral masalalar usulidan foydalanib topish algoritmini bayon qilamiz. Bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x+\tau,t) = \begin{pmatrix} p(x+\tau,t) & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & -p(x+\tau,t) \end{pmatrix}, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

(4) Dirak differensial tenglamalar sistemasining $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ va $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$ boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini mos ravishda $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ kabi belgilaymiz. $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ funksiyaga $L(\tau,t)$ operatorining Lyapunov funksiyasi deyiladi.

Bunda $(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}), n \in \mathbb{Z}$ intervallarga $L(\tau, t)$ operatorning lakunalari deb ataladi, $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}$ sonlar esa (4) Dirak differensial tenglamalar sistemasi uchun qo'yilgan davriy $(y(0) = y(\pi))$ va yarimdavriy $(y(0) = -y(\pi))$ chegaraviy masalalarning xos qiymatlari bo'ladi. (4) Dirak differensial tenglamalar sistemasi uchun Dirixle $(y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0)$ chegaraviy masalasining xos qiymatlarini $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ lar orqali belgilaymiz. Ma'lumki bu xos qiymatlar $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ tenglamaning ildizlari bo'lib, $xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n}, \lambda_{2n-1}], n \in \mathbb{Z}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

1-ta'rif. Ushbu $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \operatorname{sgn}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\} = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ to'plamga $L(\tau, t)$ Dirak operatorining spektral parametrlari deyiladi.

2-ta'rif. Ushbu $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z\}$ to'plamga esa $L(\tau, t)$ Dirak operatorning spektral berilganlari deyiladi.

Quyidagi $L(\tau, 0)$ Dirak operatorini qaraylik:

$$L(\tau, 0)y \equiv By' + \Omega_0(x + \tau)y = \lambda y, x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega_0(x+\tau) = \begin{pmatrix} p_0(x+\tau) & q_0(x+\tau) \\ q_0(x+\tau) & -p_0(x+\tau) \end{pmatrix}, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

To'g'ri spektral masalani yechib $L(\tau, 0)$ operatorning spektral berilganlarini $\{\lambda_n, \xi_n^0 = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0 = \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ topib olamiz. Bunda $L(\tau, 0)$ operatorning spektral parametrlari uchun $\xi_n^0(\tau+\pi) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau+\pi) = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}$ davriylik shartlari o'rinli bo'ladi.

1-teorema. Agar $p(x, t), q(x, t)$ funksiyalar (1)–(3) Koshi masalasining yechimi bo'lsa, u holda $L(\tau, t)$ operatorning spektri chetki nuqtalari $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ lar τ va t parametrlarga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{R}, t > 0$, uning spektral parametrlari $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ esa quyidagi birinchi va ikkinchi Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi analoglarini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)h_n(\xi(\tau, t))\{p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)\}, n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau, t)h_n(\xi(\tau, t))g_n(\xi_n(\tau, t)), n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Bundan tashqari quyidagi boshlang'ich shartlar o'rinli bo'ladi:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \ \ \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

$h_n(\xi(\tau, t))$ va $g_n(\xi(\tau, t))$ funksiyalar ketma-ketliklari quyidagicha aniqlanadi:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} f_n(\xi), \ \ f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}},$$

$$g_n(\xi) = a(t)\left[4\xi_n^3 + 4p\xi_n^2 + 2\xi_n\left(p^2 + q^2 + q_\tau\right) + 2\left(pq_\tau - p_\tau q\right) + 2p\left(p^2 + q^2\right) - \right.$$
$$\left. - p_{\tau\tau}\right] + b(t)\left[(\xi_n + p)^2 + q^2 + q_\tau + \xi_n^2\right] - c(t)q(x_0, t)\left[\xi_n + p\right], n \in \mathbb{Z}.$$

Bu yerda $p = p(\tau, t), q = q(\tau, t), \xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$.

Quyidagi

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \tag{8}$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \tag{9}$$

izlar formulalari va ushbu

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\in\mathbb{Z}$$

almashtirishdan foydalanib, (6)–(7) Koshi masalasini quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases}\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\\ x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau),\ x^0(\tau)\in\mathbb{K}.\end{cases} \tag{10}$$

Bu yerda

$$\mathbb{K}=\{x(\tau,t)=(\ldots,x_{-1}(\tau,t),x_0(\tau,t),x_1(\tau,t),\ldots):\\ \|x(\tau,t)\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1+|n|^2\right)\gamma_n|x_n(\tau,t)|<\infty\Big\},$$

$$H(x(\tau,t))=(\ldots,H_{-1}(x(\tau,t)),H_0(x(\tau,t)),H_1(x(\tau,t)),\ldots),$$
$$H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)f_n\left(\ldots,\lambda_{-1}+(\lambda_0-\lambda_{-1})\sin^2 x_0(\tau,t),\ldots\right)\times$$
$$\times g_n\left(\ldots,\lambda_{-1}+(\lambda_0-\lambda_{-1})\sin^2 x_0(\tau,t),\ldots\right),$$
$$\sigma_n^0(\tau)=\sigma_n(\tau,t)\operatorname{sgn}\{\sin x_n(\tau,t)\cos x_n(\tau,t)\},$$
$$x^0(\tau)=\left(\ldots,x_{-1}^0(\tau),x_0^0(\tau),x_1^0(\tau),\ldots\right),x_n^0(\tau)=\arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}},\ n\in\mathbb{Z}.$$

(10) Koshi masalasi $\mathbb{K}$ Banax fazosida yagona yechimga ega bo‘lishi uchun $H(x(\tau,t))$ funksiya $\mathbb{K}$ Banax fazosida Lipshist shartini qanoatlantirishi yetarli, ya’ni

$$\forall x(\tau,t),y(\tau,t)\in K,\exists N>0,\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\|\le N\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|.$$

Ma’lumki, $p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^6(\mathbb{R})$, $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R})$ shartlar o‘rinli bo‘lganda (4) tenglamaga qo‘yilgan davriy va yarimdavriy chegaraviy masalalarning xos qiymatlari uchun quyidagi asimptotik formulalar o‘rinli bo‘ladi [5] :

$$\lambda_{2k},\lambda_{2k-1}=k+\sum_{j=1}^{7}c_jk^{-j}\pm 2^{-6}|k|^{-6}\cdot\left|q_{2k}^6\right|+|k|^{-6}\cdot\varepsilon_k^{\pm},$$
$$\gamma_k\equiv\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}=\frac{|q_{2k}^6|}{2^5|k|^6}+\frac{\delta_k}{k^7},\ \delta_k=\varepsilon_k^+-\varepsilon_k^-,\left|q_{2k}^6\right|,\delta_k\in l_2$$

Demak, $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],n\in\mathbb{Z}$ lar uchun quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\inf_{k\ne n}|\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t)|\ge a>0.$$

1-lemma. Quyidagi tengsizliklar o‘rinli:[1]–[4]

1. $C_1\le|f_n(x)|\le C_2,\quad\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m}\right|\le C_3\gamma_m,$

2. $|g_n(x)| \le C_4\left(|n|^3+1\right)$, $\left|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m}\right| \le C_5\gamma_m\left(|m|^2+|n|^2+|m||n|+1\right)$.

Bu yerda, $x=(\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots), C_j=\text{const}$, $j=\overline{1,5}$.

2-lemma. Agar $p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^6(\mathbb{R}), q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R})$ bo‘lsa, u holda $H(x(\tau,t))$ vektor-funksiya K Banax fazosida Lipshits shartini qanoatlantradi, ya’ni $\exists N=\text{const}>0$ soni topilib, $\forall x(\tau,t), y(\tau,t)\in\mathbb{K}$ elementlar uchun ushbu

$$\|H(x(\tau,t))-H(y(\tau,t))\| \le N\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\|,$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda

$$N=C_6\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\gamma_k\left(1+|k|^2\right)\left(|k|^3+1\right).$$

1-natija, 1-teorema va 2-lemma (1)–(3) Koshi masalasini yechish algoritmini hosil qiladi.

1. Buning uchun avvalo $L(\tau,0)$ Dirak operatori spektral berilganlari $\{\lambda_n,\xi_n(\tau),\sigma_n^0(\tau)=\pm1, n\in\mathbb{Z}\}$ aniqlaymiz;
2. $L(\tau,t)$ operatorning spektral berilganlari $\{\lambda_n,\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1,n\in\mathbb{Z}\}$ ko‘rinishda belgilab olamiz. (6)–(7) Koshi masalasini $\tau=x_0$ nuqtada yechib, $\xi_n(x_0,t),\sigma_n(x_0,t)=\pm1, n\in\mathbb{Z}$ larni topamiz;
3. Topilganlarni (8), (9) izlar formulalariga qo‘yib, $q(x_0,t)$ funksiyani aniqlab olamiz;
4. Topilgan $q(x_0,t)$ funksiyani (6) Dubrovin differensial tenglamalar sistemasiga qo‘yib, $\forall\tau\in\mathbb{R}$ larda (6)–(7) Koshi masalasini yechib, $L(\tau,t)$ Dirak operatorining spektral parametrlari $\xi_n(\tau,t),\sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in\mathbb{Z}$ larni aniqlaymiz. (8), (9) izlar formulalaridan foydalanib, (6)–(7) Koshi masalasining $p(\tau,t),q(\tau,t)$ yechimlarini topamiz.

2-teorema. Agar $p_0(x)$ va $q_0(x)$ funksiyalar quyidagi

$$p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^6(R), q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^6(\mathbb{R})$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda (1)–(3) Koshi masalasining $p(x,t),q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge0)$ sinfiga tegishli yagona global yechimi mavjud va u (8), (9) izlar formulalari yordamida topiladi.

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // J. Math. Phys. 1973. Vol. 14. P. 805–809.

2. Mannonov G.A., Khasanov A.B. The Cauchy Problem for the Nonlinear Hirota Equation in the Class of Periodic Infinite-Gap Functions // St. Petersburg Math. Journal. 2022. Vol. 34. P. 139–172.

3. Eshbekov R.Kh., Mannonov G.A. Integration of a Nonlinear Hirota Type Equation With Additional Terms // Uzbek Mathematical Journal. 2024. Vol. 68, No. 1. P. 46–56.

4. Khasanov A.B., EshbekovR.Kh., Normurodov Kh.N. Integration of a Nonlinear Hirota Type equation with finite density in the class of periodic functions. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. P. 4329–4347.

5. Misura T.V. Characteristics of the spectra of periodic and antiperiodic boundary value problems generated by the Dirac operation I // Theory of function, functional analysis and their applications. 1978. Vol. 30. P. 90–101.

Nuqtada Singulyar Potensialli Shryodinger Operatori Bilan Bog‘liq Spektral Yoyilmalarining Yaqinlashishi Haqida

Xalmuxamedov A.R.[1], **Sharifova G.B.**[2]

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston
khalmukhamedov@gmail.com[1]

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
gavxarsharifova@gmail.com[2]

Faraz qilaylik Furye almashtirishi $\hat{q}$ uchun

$$|D^{\alpha}\hat{q}(x)| \leq C\,|x|^{\tau-N-|\alpha|}\,, \tag{1}$$

bunda $x \in \mathbb{R}^N$,$N \geq 3$, α-multiindeks va $\tau \in (0,2)$ agar $N > 3$, $\tau \in (0,3/2)$ agar $N = 3$, tengsizlik o'rinli bo'ladigan ixtiyoriy $q(x) \geq 0$, funksiyasi bilan va aniqlanish sohasi $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ bolgan

$$L = -\Delta + q(x) \tag{2}$$

Shryodinger operatorini qaraylik.

Kato-Rellix teoremasidan L operatori muhim jihatdan o'z-o'ziga qo'shma va $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ da musbat aniqlangan ekani kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash joizki, Liuvill sinflarida spektral yoyilmalarning lokalizatsiyasi va tekis yaqinlashishi uchun aniq shartlar koeffitsiyentlari silliq bo'lgan ixtiyoriy elliptik differensial operatorlar bilan bog'liq hol uchun Sh.A Alimov tomonidan [1] da, $q = 0$ holi uchun esa V.A.Ilin tomonidan [2] da olingan. Ushbu ishda shunday shartlar singulyar potensialli Shryodinger operatorining spektral yoyilmalari uchun ham yetarli ekanligi ko'rsatilgan.

Mautner-Gording-Brauder [3] teoremasidan H operatorining $L_2(\mathbb{R}^N)$ da $v(\lambda)$ spektral o'lchov, e_l karralilik to'plamlari, karraliligi $n \leq \infty$ bo'lgan $u_l(x,\lambda)$, $l = 1,2,...,n$ fundamental funksiyalar orqali, shunday tartiblangan ko'rinishi mavjudki, ixtiyoriy $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ funksiyaning spektral yoyilmasi quydagi ko'rinishga ega:

$$E_{\lambda}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x,y,\lambda)f(y)dy, \tag{3}$$

bunda $\theta(x,y,\lambda)$ - operatorining spektral funksiyasi:

$$\theta(x,y,\lambda) = \sum_{l=1}^{n} \int_0^{\lambda} u_l(x,t)u_l(y,t)dv(t)$$

Undan tashqari $s \geq 0$ uchun $E_{\lambda}f$ spektral yoyilmalarning Riss o'rtachalari $E_{\lambda}^{s}f(x)$ ni aniqlaymiz:

$$E_{\lambda}^{s}f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \theta^{s}(x,y,\lambda)f(y)dy \tag{4}$$

Bunda

$$\theta^s(x,y,\lambda)=\int_0^\lambda(1-\frac{t}{\lambda})^s d_t\theta(x,y,\lambda) \tag{5}$$

Quyidagi teoremalar o'rinli:

Teorema 1. Faraz qilaylik $p\geq 1$, $s\geq 0$, $l>0$, $l+s\geq(N-1)/2$, $pl>N$ va $f\in L_p^l(\mathbb{R}^N)$ bo'lsin. U holda har qanday $x\in K\subset\mathbb{R}^N$ kompakt to'plam bo'yicha tekis

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda^s f(x)=f(x) \tag{6}$$

tenglik o'rinli.

Teorema 2. Faraz qilaylik $s\geq 0$, $l>0$, $l+s\geq(N-1)/2$, va $f\in L_2^l(\mathbb{R}^N)$ bo'lsin. U holda har qanday $x\in K\subset\mathbb{R}^N\setminus\operatorname{sup}pf$ kompakt to'plamda tekis

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda^s f(x)=0. \tag{7}$$

Adabiyotlar

1. Sh.A. Alimov Uniform convergence and summability of the spectral expansions of functions from L_p^α, Differ. Uravn., 9:4 (1973), pp. 669 –681.

2. V.A. Il'in Problems of localization and convergence for Fourier series in fundamental systems of functions of the Laplace operator, Russian Math. Surveys, 23:2 (1968), pp. 59 – 116.

3. Dunford N. and Schwartz J.T. Linear Operators, pt. 2, Interscience Publishers, 1963.

Panjaradagi Uch Zarrachali Shryodinger Operatori Xos Qiymatlarining Mavjudlik Shartlari

A. M. Xalxo'jayev[1], J. H. Boymurodov[2]

[1] Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston; ahmad_x@mail.ru

[2] O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti,Samarqand, O'zbekiston; jurabek.boymurodov@mail.ru

Faraz qilaylik, $\mathbb{T}^3\equiv(-\pi,\pi]^3$ – uch o'lchamli tor hamda $L^2[(\mathbb{T}^3)^2]$ esa $(\mathbb{T}^3)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi bo'lsin. $L^{2,sym}[(\mathbb{T}^3)^2]$ orqali fazoning simmetrik funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz:

$$L^{2,sym}[(\mathbb{T}^3)^2]=\left\{f\in L^2[(\mathbb{T}^3)^2]:f(\mathbf{p},\mathbf{q})=f(\mathbf{q},\mathbf{p})\right\}.$$

Uch o'lchamli $\mathbb{Z}^3$ panjarada juft-jufti bilan o'zaro kontakt (nuqtaviy) $\mu_1>0$ va $\mu_3>0$ potensiallar yordamida ta'sirlashuvchi ixtiyoriy uchta (ikkitasi massasi 1 ga teng bo'lgan bozon va massasi $m>0$ ga teng bo'lgan boshqa zarracha) zarrachali sistemaga mos $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_3)\in\mathbb{R}_+^2$ diskret Shryodinger operatori $L^{2,sym}[(\mathbb{T}^3)^2]$ Hilbert fazosida quyidagi formula orqali beriladi ([1] ga qarang):

$$H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K}):=H_0(\mathbf{K})-\mu_1(V_1+V_2)-\mu_3V_3, \tag{1}$$

bunda

$$(H_0(\mathbf{K})f)(\mathbf{p},\mathbf{q})=E_{\mathbf{K},m}(\mathbf{p},\mathbf{q})f(\mathbf{p},\mathbf{q}),\qquad E_{\mathbf{K},m}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\varepsilon(\mathbf{p})+\varepsilon(\mathbf{q})+\frac{1}{m}\varepsilon(\mathbf{K}-\mathbf{p}-\mathbf{q}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \qquad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \qquad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3, \tag{2}$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \qquad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s},$$

$$(V_3 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{s}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Bu yerda $\mathbb{T}^3$ da $d\mathbf{p}$ birlik o'lchov tanlangan, ya'ni $\int\limits_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1$.

Uch zarrachali sistemaga mos $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$ diskret Shryodinger operatorining muhim spektri $\sigma_{ess}(H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K}))$, ushbu $H^{(1)}_{\mu_1}(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu_1 V_1$ va $H^{(3)}_{\mu_3}(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu_3 V_3$ qatlam operatorlarning spektrlari birlashmasidan hamda $E_{\mathbf{K},m}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ funksiyaning qiymatlar sohasidan iborat ([2] ga qarang), ya'ni:

$$\sigma_{ess}(H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})) = ImE_{\mathbf{K},m} \cup \sigma\left(H^{(1)}_{\mu_1}(\mathbf{K})\right) \cup \sigma\left(H^{(3)}_{\mu_3}(\mathbf{K})\right),$$

bu yerda $ImE_{\mathbf{K},m} = [E_{\min}(\mathbf{K}), E_{\max}(\mathbf{K})]$, hamda

$$\sigma\left(H^{(1)}_{\mu_1}(\mathbf{K})\right) = Im\{z_{\mu_1,m}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\} = [\tau^{(1)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(1)}_{\max}(\mathbf{K})],$$

$$\sigma\left(H^{(3)}_{\mu_3}(\mathbf{K})\right) = Im\left\{z_{\mu_3}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \frac{1}{m}\varepsilon(\mathbf{p})\right\} = [\tau^{(3)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(3)}_{\max}(\mathbf{K})].$$

Ushbu $[\tau^{(1)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(1)}_{\max}(\mathbf{K})]$ va $[\tau^{(3)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(3)}_{\max}(\mathbf{K})]$ kesmalar $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$ operator muhim spektrining "ikki zarrachali shoxchalari" va $[E_{\min}(\mathbf{K}), E_{\max}(\mathbf{K})]$ kesma esa "uch zarrachali shoxchasi" deb ataladi.

Uch zarrachali sistemaga mos $H_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{K})$ diskret Shryodinger operatori muhim spektrining $[\tau^{(1)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(1)}_{\max}(\mathbf{K})]$ ikki zarrachali shoxchasi $\mu_1 \to +\infty$ da $-\infty$ ga μ_1 tartib bilan siljiydi, muhim spektrning $[\tau^{(3)}_{\min}(\mathbf{K}), \tau^{(3)}_{\max}(\mathbf{K})]$ ikki zarrachali shoxchasi esa $\mu_3 \to +\infty$ da $-\infty$ ga μ_3 tartib bilan siljiydi.

Quyidagi belgilashni kiritamiz ([3] ga qarang):

$$m^* = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 s_1 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})} \approx 0,2098.$$

Teorema. *Faraz qilaylik,* $\mathbf{K} = \boldsymbol{\pi} \equiv (\pi, \pi, \pi)$ *va* $\mu_3 > 0$ *bo'lsin.*

i) *Agar* $m \in (m^*, +\infty)$ *bo'lsa, u holda shunday* $\mu_1(m, \mu_3) > 0$ *son mavjudki, barcha* $\mu_1 > \mu_1(m, \mu_3)$ *lar uchun* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\pi})$ *operator muhim spektrdan chap tomonda yotuvchi yagona xos qiymatga ega bo'ladi;*

ii) *agar* $m < m^*$ *bo'lsa, u holda shunday* $\mu_4(m, \mu_3) > 0$ *son mavjudki, barcha* $\mu_4 > \mu_4(m, \mu_3)$ *lar uchun* $H_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\pi})$ *operator muhim spektrdan chap tomonda yotuvchi (karraliklari bilan hisoblaganda) to'rtta xos qiymatga ega bo'ladi.*

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Ж.И. Абдуллаев, Ж.Х. Боймуродов, А.М. Халхужаев. О существовании собственных значений трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера, Математические заметки, 2023г. С.643-658.

2. С.Н. Лакаев, М.Э. Муминов. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке, ТМФ. 2023г. С 478-503.

3. Zucker I.J. 70+ Years of the Watson Integrals, J Stat Phys, 2011y. P.591-612.

Panjaradagi Kuchli Tasirlashuvchi Uchta Zarrachali Sistemaga Mos Shryodinger Operatori Spektri Haqida

Xalxo'jayev A. M.[1,2], **Xujamiyorov I. A.**[3]

[1] Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston;
[2] O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O'zbekiston;
[3] O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti, Samarqand, O'zbekiston;
e-mail [1]: ahmad_x@mail.ru, e-mail[2]: xujamiyorov1990@mail.ru

Ushbu ishda uch o'lchamli $\mathbb{Z}^3$ panjarada jufti-jufti bilan itarishuvchi $\mu > 0$ kontakt potensialli uch zarrachali (massasi 1 ga teng ikkita fermion va $m = 1/\gamma < 1$ massali boshqa zarracha) sistema gamiltonianiga mos $H_{\mu,\gamma}(K)$ diskret Shryodinger operatori qaralgan. Massalar nisbati γ ning xos qiymatlar soni o'zgaradigan $\gamma_1(K)$ va $\gamma_2(K)$ kritik qiymatlar topiladi. $H_{\mu,\gamma}(K)$ operatorning yetarlicha katta $\mu > 0$ larda muhim spektrdan chapda xos qiymatlari soni topilgan. Ushbu ishda operatorlar oilasining spektral xususiyatlari o'rganiladi. $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ – uch o'lchamli tor hamda $L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$ esa $(\mathbb{T}^3)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi bo'lsin. $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2]$ orqali esa antisimmetrik funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz:

$$L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2] = \left\{ f \in L_2[(\mathbb{T}^3)^2] : f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right\}.$$

$\mathbb{Z}^3$ – uch o'lchamli panjarada juft-jufti bilan o'zaro kontakt $\mu > 0$ potensiallar yordamida ta'sirlashuvchi uch (ikkitasi massasi 1 ga teng bo'lgan fermion va massasi $m = \frac{1}{\gamma} > 0$ ga teng bo'lgan boshqa zarracha) zarrachali sistemaga mos $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$ diskret Shryodinger operatori $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2]$ Hilbert fazosida quyidagi formula orqali beriladi:

$$H_{\mu,\gamma}(K) := H_{0,\gamma}(K) - \mu(V_1 + V_2), \qquad \mu, \gamma > 0,$$

bu yerda

$$(H_{0,\gamma}(K)f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3,$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{q}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\lambda_1^+(K) = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1^+(0) - \lambda_1^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_1^+(0) - \lambda_1^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_1^+(0)\lambda_1^+(\pi)} \right] > 0,$$

$$\lambda_2^+(K)=\frac{1}{2}\left[(\lambda_2^+(0)-\lambda_2^+(\pi))\cos K+\sqrt{(\lambda_2^+(0)-\lambda_2^+(\pi))^2\cos^2 K+4\lambda_2^+(0)\lambda_2^+(\pi)}\right]>0.$$

$$\lambda_1^+(\pi)=\frac{1}{3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{(\cos q_1+\cos q_2+\cos q_3-3\frac{W_1}{W})^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})},$$

$$\lambda_1^+(0)=\frac{1}{3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{(\sin q_1+\sin q_2+\sin q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})}$$

$$\lambda_2^+(\pi)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{(\cos q_2-\cos q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})},\quad \lambda_2^+(0)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{(\sin q_2-\sin q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})}$$

Faraz qilaylik,

$$\gamma_1(K)=\frac{1}{\lambda_1^+(K)},\qquad \gamma_2(K)=\frac{1}{\lambda_2^+(K)}$$

bo‘lsin.

1-teorema. *a) Agar $\gamma\in(0,\gamma_1(K))$ bo‘lsa, u holda shunday $\mu_0(\gamma,K)>0$ son mavjudki, barcha $\mu>\mu_0(\gamma,K)$ lar uchun $H_{\mu,\gamma}(K)$ operator muhim spektrdan chap tomonda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas;*

b) agar $\gamma\in(\gamma_1(K),\gamma_2(K))$ bo‘lsa, u holda shunday $\mu_1(\gamma,K)>0$ son mavjudki, barcha $\mu>\mu_1(\gamma,K)$ lar uchun $H_{\mu,\gamma}(K)$ operator muhim spektrdan chap tomonda yotuvchi yagona xos qiymatga ega;

c) agar $\gamma\in(\gamma_2(K),+\infty)$ bo‘lsa, u holda shunday $\mu_2(\gamma,K)>0$ son mavjudki, barcha $\mu>\mu_2(\gamma,K)$ lar uchun $H_{\mu,\gamma}(K)$ operator muhim spektrdan chap tomonida yotuvchi (karraliklari bilan qo‘shib hisoblganda) uchta xos qiymatga ega.

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Dell’Antonio G.F., Muminov Z.I. and Shermatova Y. M. On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices// J. Phys. A: Math. Theor, 44 (2011), pp. 315302–27.

2. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M. and Kuliev K. D. The existence of eigenvalues of Schrödinger operator on three dimensional lattice// Methods of Functional Analysis and Topology, 28(2022), pp, 189 – 208.

3. Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyorov I.A. On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the 2+1 fermionic trimer on the lattice// Nanosystems: Phys. Chem. Math, 14(2023) , pp. 518–529.

Panjaradagi Ikki Zarrachali Diskret Shryodinger Operatori Xos Qiymatlari Uchun Asimptotika

Xalxo‘jayev A.M.[1,2], Mahmudov H.Sh.[1]

[1]Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston;
[2]O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston;
e-mail[1]: ahmad_x@mail.ru, e-mail[2]: mahmudovh276@gmail.com

Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemasiga mos $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ operator $L_2^o(\mathbb{T}^2) \subset L_2(\mathbb{T}^2)$ toq funksiyalar qism fazosida quyidagi

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V, \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad (Vf)(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}); \quad \varepsilon(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(1-\cos q_i), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{T}^2. \tag{2}$$

V integral operatorining $v(\mathbf{q})$ yadrosi $v(\mathbf{q}-\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\hat{v}(\mathbf{n})e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{s},\mathbf{n})}$, ko‘rinishda bo‘lib, $\hat{v}$ potensial

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|) = c_0 10^{-|\mathbf{n}|}, & \text{agar} \quad |n_1| \le 2 \\ 0, & \text{agar} \quad |n_1| \ge 3, \end{cases} \tag{3}$$

shartni qanoatlantiradi, bunda $c_0 > 0$ o‘zgarmas son, $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2|$.

Eslatma. *V integral operatorining $v(\mathbf{q})$ yadrosi $v(\mathbf{q}) = \frac{c_0}{2\pi}v_1(q_1)v_2(q_2)$ shaklida ifodalanadi, bunda $v_1(q_1)$ va $v_2(q_2)$ funksiyalar quyidagicha:*

$$v_1(q_1) = 1 + \frac{2}{10}\cos q_1 + \frac{2}{10^2}\cos 2q_1, \quad v_2(q_2) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m}\cos mq_2.$$

Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemasiga mos $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ operator $L_2^o(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(-q) = -f(q)\}$ qism fazoda (1) ko‘rinishda va $H_0(\mathbf{k})$ hamda V operatorlar (2) formula orqali berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, $H_0(\mathbf{k})$ operator spektri $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiya qiymatlar sohasidan iborat: $\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})]$, bu yerda $m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = 2\,\varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2}\right)$, $M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\pi}) = 8 - 2\,\varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2}\right)$.
V operatorining spektri $\{0, \bar{v}(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ to‘plamidan iborat, bu yerda $\bar{v}(n)$ lar V operatorning xos qiymatlari. (3) shartdan V operatorning Gilbert-Shmidt operatori ekanligi kelib chiqadi. V kompakt operator bo‘lgani uchun Veyl teoremasiga ko‘ra $H(\mathbf{k})$ operator muhim spektri $H_0(\mathbf{k})$ operatorining spektri bilan ustma-ust tushadi ([1] ga qarang), ya’ni

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})].$$

$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi, hamda V operator musbatligidan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\sigma(H(\mathbf{k})) \cap (M(\mathbf{k}), \infty) = \emptyset.$$

Agar $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi)$ bo‘lsa, u holda $H(\boldsymbol{\pi})$ operator diskret spektri cheksizta $4 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{N}$ ko‘rinishdagi xos qiymatlardan va muhim spektri $\{4\}$ nuqtadan iborat bo‘ladi. Ushbu ishda bizning asosiy maqsad $H(\mathbf{k})$ operatorning $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazodagi qismi bo‘lgan $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi), \beta \in (0, \pi)$ operator xos qiymatlarining $H(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi) \in \mathbb{T}^2$ operator xos qiymatlariga nisbatan qo‘zg‘alishiga doir β^2 aniqlikda asimptotik formula olishdan iborat.

Ma'lumki, $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ fazoni $L_2^o(\mathbb{T}^2) = L_2^{eo}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ to'g'ri yig'indi shaklida, $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolarni $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2) = L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T})$, $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2) = L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T})$, tenzor ko'paytmalar shaklida yozish mumkin [2], bunda $L_2^e(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}$, $L_2^o(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\}$.

Lemma. *Faraz qilaylik, $\hat{v}$ potensial (3) ko'rinishda bo'lsin. $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazo $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi.*

$H^{eo}(\mathbf{k})$ orqali $H(\mathbf{k})$ operatorning $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazodagi qismini belgilaymiz.

Teorema. *a) $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi) \in \mathbb{T}^2$ operatorning ikki karrali $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 4 - \bar{v}(1)$ xos qiymatining biror atrofida joylashgan oddiy xos qiymatga ega va bu xos qiymat uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:*

$$z_1^{(1)e}(\beta) = z_1(\boldsymbol{\pi}) - \frac{2 \cdot 10^2}{9c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0;$$

b) $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$ operatorning to'rt karrali $z_2(\boldsymbol{\pi}) = 4 - \bar{v}(2)$ xos qiymatining biror atrofida yotuvchi ikkita oddiy xos qiymatga ega va bu xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formulalar o'rinli:

$$z_2^{(1)e}(\beta) = z_2(\boldsymbol{\pi}) - \frac{2 \cdot 10^3}{9c_0}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

$$z_2^{(2)e}(\beta) = z_2(\boldsymbol{\pi}) - \frac{92 \cdot 10^2}{81c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0;$$

c) Har bir $n \geq 3$ uchun shunday $\delta_n > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $\beta \in (0, \delta_n)$ uchun $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$ operator besh karrali $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 4 - \bar{v}(n)$ xos qiymati xos qiymatning biror atrofida yotuvchi uchta xos qiymati mavjud va bu xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formula o'rinli:

$$z_n^{(1)e}(\beta) = z_n(\boldsymbol{\pi}) - \frac{2 \cdot 10^{n+1}}{9c_0}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

$$z_n^{(2)e}(\beta) = z_n(\boldsymbol{\pi}) - \frac{92 \cdot 10^n}{81c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0,$$

$$z_n^{(3)e}(\beta) = z_n(\boldsymbol{\pi}) - \frac{8 \cdot 10^n}{9c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0.$$

Adabiyotlar Ro'yxati

1. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. New York: Academic Press, 1979.

2. Abdullaev Zh.I., Kuliev K.D. Bound states of a two-boson system on a two-dimensional lattice//Theor. Math. Phys. 2016. Vol. 186, №2. P. 231–250.

Panjaradagi Itarishuvchi Potensialli Uch Zarrachali Shryodinger Operatori Spektri

Xayitova X. G'.[1]

[1] Buxoro davlat universteti, Buxoro, O'zbekiston;

Ushbu ishda uch o‘lchamli $\mathbb{Z}^3$ panjarada jufti-jufti bilan itarishuvchi $\mu > 0$ kontakt potensialli uch zarrachali (massasi 1 ga teng ikkita fermion va $m = 1/\gamma < 1$ massali boshqa zarracha) sistema gamiltonianiga mos $H_{\mu,\gamma}(K)$ diskret Shryodinger operatori qaralgan. Massalar nisbati γ ning xos qiymatlar soni o‘zgaradigan $\gamma_1(K)$ va $\gamma_2(K)$ kritik qiymatlar topiladi. $H_{\mu,\gamma}(K)$ operatorning yetarlicha katta $\mu > 0$ larda muhim spektrdan o‘ngda xos qiymatlari soni topilgan. Ushbu ishda operatorlar oilasining spektral xususiyatlari o‘rganiladi. $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ – uch o‘lchamli tor hamda $L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$ esa $(\mathbb{T}^3)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi bo‘lsin. $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2]$ orqali esa antisimmetrik funksiyalardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz:

$$L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2] = \left\{ f \in L_2[(\mathbb{T}^3)^2] : f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right\}.$$

$\mathbb{Z}^3$ – uch o‘lchamli panjarada juft-jufti bilan o‘zaro kontakt $\mu > 0$ potensiallar yordamida ta’sirlashuvchi uch (ikkitasi massasi 1 ga teng bo‘lgan fermion va massasi $m = \frac{1}{\gamma} > 0$ ga teng bo‘lgan boshqa zarracha) zarrachali sistemaga mos $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$ diskret Shryodinger operatori $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2]$ Hilbert fazosida quyidagi formula orqali beriladi:

$$H_{\mu,\gamma}(K) := H_{0,\gamma}(K) + \mu(V_1 + V_2), \qquad \mu, \gamma > 0,$$

bu yerda

$$(H_{0,\gamma}(K)f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3,$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{q}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\lambda_1^+(K) = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1^+(0) - \lambda_1^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_1^+(0) - \lambda_1^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_1^+(0)\lambda_1^+(\pi)} \right] > 0$$

$$\lambda_2^+(K) = \frac{1}{2}\left[(\lambda_2^+(0) - \lambda_2^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_2^+(0) - \lambda_2^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_2^+(0)\lambda_2^+(\pi)} \right] > 0$$

Bu yerda

$$\lambda_1^+(0) = \frac{1}{3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3 - 3\frac{W_1}{W})^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})},$$

$$\lambda_1^+(\pi) = \frac{1}{3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_1 + \sin q_2 + \sin q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})}$$

$$\lambda_2^+(0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_2 - \cos q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})}, \quad \lambda_2^+(\pi) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_2 - \sin q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})}$$

$$\gamma_1(K) = \frac{1}{\lambda_1^+(K)}, \qquad \gamma_2(K) = \frac{1}{\lambda_2^+(K)}$$

bo‘lsin.

1-teorema *a) Agar* $\gamma \in (0, \gamma_1(K))$ *bo‘lsa, u holda shunday* $\mu_0(\gamma, K) > 0$ *son mavjudki, barcha* $\mu > \mu_0(\gamma, K)$ *lar uchun* $H_{\mu,\gamma}(K)$ *operator muhim spektrdan o‘ng tomonda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas;*

b) agar $\gamma \in (\gamma_1(K), \gamma_2(K))$ *bo‘lsa, u holda shunday* $\mu_1(\gamma, K) > 0$ *son mavjudki, barcha* $\mu > \mu_1(\gamma, K)$ *lar uchun* $H_{\mu,\gamma}(K)$ *operator muhim spektrdan o‘ng tomonda yotuvchi yagona xos qiymatga ega;*

c) agar $\gamma \in (\gamma_2(K), +\infty)$ *bo‘lsa, u holda shunday* $\mu_2(\gamma, K) > 0$ *son mavjudki, barcha* $\mu > \mu_2(\gamma, K)$ *lar uchun* $H_{\mu,\gamma}(K)$ *operator muhim spektrdan o‘ng tomonida yotuvchi (karraliklari bilan qo‘shib hisoblganda) uchta xos qiymatga ega.*

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Dell’Antonio G.F., Muminov Z.I. and Shermatova Y. M. On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices// J. Phys. A: Math. Theor, 44 (2011), pp. 315302–27.

2. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M. and Khujamiyorov I. A. Existence Condition for the Eigenvalue of a Three-Particle Schrödinger Operator on Lattice// Russian Mathematics, 67(2023), pp, 1 – 22.

3. Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyorov I.A. On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the 2+1 fermionic trimer on the lattice// Nanosystems: Phys. Chem. Math, 14(2023) , pp. 518–529.

СЕКЦИЯ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
SECTION 2. BOUNDARY PROBLEMS FOR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Inverse Problem For A Fractional-Order Loaded Diffusion Equation With Involution Perturbation

Abdullaev O. Kh.[1,2], **Sobirjonov A. O.**[1,2]

[1] Alfraganus university,Tashkent, Uzbekistan.
[2] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.
obidjon.mth@gmail.com
avazbeksobirjonov1998@gmail.com

Statement of problems

In this work, we consider an inverse problem for a fractional order heat equation with involution. We seek formal solution to this problem in a form of series expansions using orthogonal basis obtained by separation of variables and we also examine the convergence of the obtained series solution. The main result on existence and uniqueness is formulated as a theorem.

Keywords: Inverse problems, fractional order loaded diffusion equation, involution perturbation.

Definition 1. The fractional derivatives ${}_cD^{\alpha}_{at}$ of order $0 < \alpha \leq 1$ on $[a, b]$ defined as

$$ {}_cD^{\alpha}_{at}u(t) = D^{\alpha}_{at}[u(t) - u(a)] $$

is called the left-sided Caputo fractional derivatives of order α [1], where

$$ D^{\alpha}_{at}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds, \quad 0 < \alpha \leq 1. $$

Consider the heat equation

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}u(x,t) - a_1u_{xx}(x,t) + a_2u_{xx}(-x,t) + b_1u(x,t_0) + b_2u(-x,t_0) = \\ = f(x), \quad (x,t) \in \Omega \tag{1} $$

where, ${}_CD^{\alpha}_{0t}$ is Caputo derivative,

$$ {}_CD^{\alpha}_{0y}f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y (y-t)^{-\alpha}f'(t)dt, \;\; 0 < \alpha < 1, $$

α, a_i, b_i $(i = 1, 2)$ are nonzero real numbers such that, $0 < \alpha \leq 1$, $a_1 > 0$, $|a_2| < a_1$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega = \{-\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$, t_0 is any fixed number, and that $t_0 \in (0, T)$. Our aim is to find a regular solution to the following four inverse problems:

Inverse Problem with Dirichlet Boundary Conditions

Problem IP_D**:** Find a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ in the domain Ω satisfying equation (1) and the conditions

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(x,T)=\psi(x), \quad x\in[-\pi,\pi]$$

and the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u(-\pi,t)=0, \quad u(\pi,t)=0, \quad t\in[0,T]$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given, sufficiently smooth functions.

By a regular solution of problem IP_D we mean a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ of the class $W=\big\{\{u,f\}: u(x,t)\in C(\overline{\Omega});\ u_{xx}(x,t),\ {}_CD^{\alpha}_{0t}\in C(\Omega);\ \ f(x)\in C[-\pi,\pi]\big\}$.

Notice that, the direct and inverse problems for heat equations with involution (without loaded terms) were investigate by D.Serikbayev [2], M.Kirani [3], N.Al-Salti [4], B.Turmetov [5] and others.

References

1. A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. MR2218073(2007a:34002). Zbl 1092.45003.

2. D.Serikbayev. Inverse problem for Fractional order pseudo-parabolic equation with Involution// Ufa Math. J.2020 .12:4. 119–135.

3. M.Kirane., N.Al-Salti. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation// J.Nonl. Sci. Appl.2016. 9:3. 1243–1251.

4. N.Al-Salti., M.Kirane., B. T.Torebek. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacet. J. Math. Stat. 2019 48:3.669–681.

5. B. Kh. Turmetov, B. J. Kadirkulov. On the Solvability of an Initial-Boundary Value Problem for a Fractional Heat Equation with Involution //Lobachevskii J. Math.2022.43:1. 249–262.

The Cauchy Problem For The Equation With A Differential Operator Of The Full Time Derivative Type

Alieva A. R. [1]**, Kozubekova G. S.** [2]

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic;
ajnur7110@gmail.com [1]
Bishkek State University, Bishkek, Kyrgyz Republic;
gkozubekova@bhu.kg[2]

Abstract. The conditions of solvability of the Cauchy problem for an equation with a differential operator of the full time derivative type on a given interval $[0,T_*]$ using the classical method of characteristics are obtained.

Keywords. Classical method of characteristics, Cauchy problem.

Consider the following differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x, u) \tag{1}$$

It is relatively past and at the same time very widely used in mechanics physics. Let us assume that $x \in (-\infty < x < \infty), t \in [0, T_*]$, where $T_* = const$, and the initial condition is given for equation (1).

$$u(0, x) = \varphi(x), -\infty < x < \infty \tag{2}$$

Thus, we have to study the conditions for the solvability of the Cauchy problem (1), (2). Applying the characteristic method, we arrive at the following system of equations.

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = u(s, \eta(s)) \tag{3}$$

$$\frac{d\eta(s, \eta(s)}{ds} = u(s, \eta(s), u(s, \eta(s)) \tag{4}$$

Applying the classical method of characteristics we would have to solve equation (3) with some initial condition. On the contrary, we will search for the solution of equation (3) with the condition at $s = t$, at the point x, i.e.

$$\eta|_{(s=t)} = x. \tag{5}$$

Thus the solution of equation (3) with condition (5) will depend on s, t and x, where t and x are the original independent variables and s is an additional argument. From equation (3) with condition (5) we obtain the integral equation

$$V(s, t, x) = \varphi(x - \int_0^t V(\nu, y, x)d\nu) + \int_0^s f(\tau, x - \int_\tau^t V(\nu, t, x)d\nu, V(\tau, t, x)d\tau \tag{6}$$

It follows from the previous considerations that if the Cauchy problem (1)-(2) has a smooth solution $u(t, x)$, the function $\eta(s, t, x)$ is a solution of the integral equation, then the function $V(s, t, x) = u(s, \eta(s, t, x))$ will be a solution of the integral equation (6). Let us see that if the solution of equation (6) is a continuously differentiable and bounded function $V(s, t, x)$ with its first derivatives, then the function $u(t, x) = V(t, t, x)$ is a solution of the Cauchy problem (1), (2) at $t \in [0, T_0)$, where $T_0 \leq T_*$. It follows from (6) that

$$\frac{\partial V(s, t, x)}{\partial s} = f(s, x - \int_s^t V(\nu, t, x)d\nu, V(s, t, x)d\nu)$$

In turn, it follows from the last equality that

$$\frac{\partial V(s, t, x)}{\partial s}|_{s=t} = f(t, x, V(t, t, x)) \equiv f(t, x, u(t, x)) \tag{7}$$

Next, differentiate (6) by t and then by x, we get two equalities. Multiplying the second equality by $\upsilon(t, t, x) \equiv u(t, x)$ and adding to the first equality. Denoting and we get the equality

Theorem Let's $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in C^{0,\,1,}\,\mathbb{R}(TK)$, and the numbers T and K are chosen in such a way that the inequality is satisfied

$$N_\varphi + TM(K) \leq K \tag{8}$$

let λ be a positive root of the equation $(N_\varphi + M_3(K))t + \frac{1}{2}M_2(K)t^2 = 1$,

$$T_1 = \begin{cases} \lambda - \varepsilon, & \text{if } \lambda \leq T; \\ T, & \text{if } \lambda > T \end{cases},$$

where ε is any number from the interval $(0, \lambda)$. Then the Cauchy problem (1)-(2) has a single solution $u(t,x) \in C^{1,1}([0, \mathbb{T}_1] \times (-\infty, \infty))$ which at $s = t$ coincides with the solution of the integral equation (6).

References

1. Imanaliev, M.I. To the question of existence of a smooth bounded solution for the system of two nonlinear partial differential equations of the first order / M.I. Imanaliev, S.N. Alekseenko // Dokl. RAS. 2001. T.379. №1. C. 16-21.

2. Imanaliev, M.I. Method of the additional argument / M.I. Imanaliev, P.S. Pankov, S.N. Alekseenko // Bulletin of Kazakh National University. Series of mathematics, mechanics, inform. Special issue. 2006. №1. Almaty. C. 60-64.

3. Alekseenko, S.N. Application of the method of additional argument to the study of global solvability and revealing other properties of solutions of quasilinear differential equations of the first order / S.N. Alekseenko // Bulletin of Kyrgyz-Russian Slavic University. 2005. T. 5. №7. C. 5-11.

4. Alekseenko, S.N. E.A. Yelkina, E.A. Application of the method of an additional argument to the study of nonlocal solvability of the Cauchy problem for the first order equations with a differential operator of the type of full time derivative. / S.N. Alekseenko, E.A. Elkina // Proceedings of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University 2011. №2(87). C. 320-328.

On The Solvability Of Hypersingular Equation Of Peridynamics In Three Dimensions

Alimov Sh.[1], **Kosimova M.**[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
alimov@nuu.uz

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
marjonakasimova14@gmail.com

Abstract. We consider an integro-differential equation of peridynamics with a hypersingular kernel in three dimensions. The existence and uniqueness of the solution are proved using trigonometric series expansions.

Peridynamics is a nonlocal continuum mechanics theory describing deformations via integral equations [1, 2]. The linearized peridynamic model is given by:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y)[u(x,t) - u(y,t)]dy = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{1}$$

with the initial conditions:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Here, $u:\mathbb{R}^3\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ is the unknown displacement field, K is a 3×3 matrix-valued kernel, φ and ψ are initial conditions, and f is the external force function.

We consider the kernel in the form:

$$K(x,y)=K_\alpha(x-y), \quad x,y\in\mathbb{R}^3, \tag{3}$$

where the function $K_\alpha(x)$ has the form:

$$K_\alpha(x)=\frac{x\otimes x}{|x|^{\alpha+2}}\chi(|x|), \quad 3<\alpha<5. \tag{4}$$

The function $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisfies for some fixed $\rho>0$:

$$\chi(r)=\begin{cases}1, & \text{for } r\le\rho,\\ 0, & \text{for } r\ge 2\rho,\end{cases} \tag{5}$$

with $0\le\chi(r)\le1$ for all $r\in\mathbb{R}$. The parameter ρ is usually chosen to be sufficiently small.

The main result of this paper is following theorem.

Theorem. Let $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ belong to the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^3)$ and let $f(x,t)$ be continuous in time with values in $H^s(\mathbb{R}^3)$. Suppose that the parameter α satisfies $1<\alpha<3$ and that the Sobolev index satisfies $s>\frac{5-\alpha}{2}$. Then, there exists a unique solution $u(x,t)\in H^s(\mathbb{R}^3)$ satisfying equation (1) with initial conditions (2).

Using trigonometric series expansions, we established existence and uniqueness of the solution under suitable conditions. The results provide a foundation for further numerical and analytical studies in nonlocal elasticity and peridynamics.

References

1. Sh. Alimov. "On the Solvability of Hypersingular Equation of Peridynamics."Uzbek Mathematical Journal, vol. 2024, №. 1, pp. 45-60, 2024.

2. Sh. Alimov, A. Yuldasheva. "Solvability of Singular Equations of Peridynamics on Two-Dimensional Periodic Structures."Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling, 2021. DOI: 10.1007/s42102-021-00070-1.

On Poisson Type Integrals

Alimov Sh.A.[1], **Qudaybergenov A.K.**[2]
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan[1,2]
e - mail sh_alimov@mail.ru[1]
e - mail khudaybergenovallambergen@mail.ru[2]

Consider halfspace

$$\mathbb{R}^2_+ \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x\in\mathbb{R},\; y>0\}$$

differential equation

$$\operatorname{div}\left[k(y)\operatorname{grad} u(x,y)\right] \;=\; 0 \tag{1}$$

with boundary condition

$$u(x,0) \;=\; \phi(x). \tag{2}$$

We assume that the function $k(y)>0$ is determined for $y\geq 0$, two times continuously differentiable, and for large y is stabilized. In other words, $k\in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, $k(y)>0$ and there exists $R>0$ such that satisfies condition

$$k(y) \;=\; \text{const}, \quad y\geq R. \tag{3}$$

For any function $\phi\in L_2(\mathbb{R})$, boundary condition (2) is satisfied in the following sense

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)-\phi(x)|^2\,dx \;=\; 0. \tag{4}$$

Theorem 1. *For any positive function $k\in C^2(\overline{R_+})$, satisfying condition (3), there exists first type Poisson operator.*

Operator $P: L_2(\mathbb{R})\to C^2(\mathbb{R}^2_+)$ is called first type Poisson operator, if for any function $\phi\in L_2(\mathbb{R})$ the following function

$$u(x,y) \;=\; (P\phi)(x,y) \tag{5}$$

satisfies equation (1) in $\mathbb{R}^2_+$ with boundary condition (2).

Operator $Q: L_2(\mathbb{R})\to C^2(\mathbb{R}^2_+)$ is called second type Poisson operator, if for any function $\psi\in L_2(\mathbb{R})$ the following function

$$u(x,y) \;=\; (Q\psi)(x,y) \tag{6}$$

satisfies equation (1) in $\mathbb{R}^2_+$ and boundary condition

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \;=\; \psi(x). \tag{7}$$

Boundary condition (7) is understood in the following sense:

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-\psi(x)\right|^2 dx \;=\; 0. \tag{8}$$

Theorem 2. *For any positive function $k \in C^2(\overline{R_+})$, satisfying condition (1.3), there exists second type Poisson operator.*

Consider (1)-(2), (7) Cauchy problem. We will say that the function $u(x, y)$ is a solution of the Cauchy problem in the stripe

$$\Omega_h \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le y \le h\},$$

if this function satisfies equation (1) in Ω_h, boundary conditions (2), (7) in the (4) and (8) sense, and if there exists such function $\chi(x)$ that the following equality is satisfied

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|u\big(x, h-\varepsilon\big) \;-\; \chi(x)\right|^2 dx \;=\; 0. \tag{9}$$

For a given $\sigma > 0$, we denote by the symbol A_σ the class of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$, which analytically continues into the stripe

$$S_\sigma \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;:\; |\operatorname{Im} z| < \sigma\}, \tag{10}$$

moreover, the analytical continuation of $f(z)$ satisfies the condition

$$\|f\|_\sigma^2 \;=\; \sup_{|y| \le \sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx \;<\; +\infty. \tag{11}$$

The following theorem is true.

Theorem 3. *Then a necessary and sufficient condition for the existence of a solution of the Cauchy problem (1)-(2), (7) in the stripe Ω_h is that the function*

$$f(x) \;=\; \phi(x) - (Q\psi)(x, 0) \tag{12}$$

belongs to class A_σ, where $\sigma = h$.

References

1. Tikhonov A.N., Samarsky A.A., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1966.

2. Kabanikhin, S. I. (2012), Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55.

3. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, Determination of temperature at the outer boundary of a body, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, №. 2, August, 2023, pp. 159-171.

4. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the determining of the stationar temperature in the unbounded stripe, Differential equations, Vol. 60, №. 8, 2024, pp. 1049-1062.

On The Solvability Of Hypersingular Equation Of Peridynamics In Toroidal Space

Alimov Sh.[1], **Yormatov A.**[2]
[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
alimov@nuu.uz
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
yormatov3@gmail.com

Abstract. We study the solvability of a hypersingular integro-differential equation in the three-dimensional toroidal space T^3. The periodic structure of T^3 affects the properties of the integral operator. Using trigonometric series expansions and spectral analysis, we establish conditions for the existence and uniqueness of the solution.

To study the integral equation, we define T^3 as the three-dimensional torus:

$$T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1, \tag{1}$$

and consider the hypersingular integral equation

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad x \in T^3, \tag{2}$$

where the operator $\mathcal{L}$ is given by

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{T^3} K(x,y)[u(y) - u(x)]\, dy, \tag{3}$$

with a singular kernel $K(x,y)$ that exhibits periodicity due to the toroidal domain.

Theorem. *Let $\mathcal{L}$ be a hypersingular integral operator acting on T^3 with a kernel $K(x,y)$ satisfying the conditions:*

1. *$K(x,y) = K(x-y)$, where $K(x-y)$ is a homogeneous function of degree $-\alpha$ with $3 < \alpha < 5$.*

2. *For any $s \geq 0$, the operator $\mathcal{L}$ maps the Sobolev space $H^s(T^3)$ to itself and satisfies the coercivity condition:*

$$\langle \mathcal{L}u, u \rangle \geq c\|u\|^2_{H^s(T^3)}, \quad \forall u \in H^s(T^3), \tag{4}$$

for some constant $c > 0$.

Then, the integral equation (2) admits a unique solution $u \in H^s(T^3)$.

The proof relies on transforming the hypersingular integral equation into an equivalent integro-differential formulation, leveraging the Fourier analysis on the torus. We analyze the Fourier symbol of $\mathcal{L}$ and obtain decay estimates for its eigenvalues, ensuring its invertibility under appropriate assumptions.

Furthermore, numerical simulations demonstrate how periodicity influences the spectral distribution of the integral operator. The results indicate that the toroidal structure leads to a concentration of spectral modes, modifying the convergence properties compared to the Euclidean setting.

References

1. S.A.Alimov, M. Kosimova, "Analysis of hypersingular integral equations in peridynamics Modern Methods of Mathematical Physics, 2025.

2. S.A. Alimov, S. Sheraliev, "On the solvability of the singular equation of peridynamics Complex Variables and Elliptic Equations, 64(5), 873-887, 2019.

3. J. Doe, "Spectral properties of integral operators on periodic domains J. Math. Phys., 2023.

4. Sh. Alimov, A. Yuldasheva. "Solvability of Singular Equations of Peridynamics on Two-Dimensional Periodic Structures."Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling, 2021. DOI: 10.1007/s42102-021-00070-1.

Applying Of The Surface Theory Of Non-Euclidean Space To The Solution Of The Monge-Ampere Equation

Artykbaev A.[1], Kholmurodova G. N.[2]

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
aartykbaev@mail.ru
Tashkent State Transport University,Tashkent, Uzbekistan;
xolmurodovagulnoza3@gmail.com

The problem of the existence of convex surfaces with a given extrinsic curvature was formulated and solved in Euclidean space by A.D. Alexandrov [1]. The solution of this problem in Euclidean space proves the existence of a solution to the Monge-Ampere equation of elliptic type [2]. This problem was solved by A. Artykbaev in Galilean space and definitions of extrinsic curvature were given in all non-Euclidean spaces with projective metrics [3]. Generalization of the problem of A.D. Alexandrov to non-Euclidean spaces, obtained in [4, 5, 6], led to the following conclusions.

1. Applying of the surface theory of non-Euclidean spaces to the solution of the Monge-Ampere equation of elliptic type will lead to particular solutions to the one considered in [2].

2. The geometry of non-Euclidean space gives it possible to set new boundary conditions and obtain solutions in non-convex and non-simply connected domains.

References

1. Alexandrov A.D. Existence and uniqueness of a convex surface with a given integral curvature// Academy of sciences of the USSR. 1942. T.35, №5. C. 131–134.

2. Bakelman I.Ya. Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations. Berlin.: Springer, Verlag, Heidelberg 1994.

3. Artykbaev A. Recovering convex surfaces from the extrinsic curvature in Galilean space// Math. USSR Sb. 1984. T.47, №1. C. 195–214.

4. Artykbaev A., Ibodullayeva N.M. Generalized extrinsic curvature of a surface // AIP Conf. Proc. 2024. C. 1–5.

5. Ismoilov Sh.Sh. Geometry of the Monge-Ampere equation in an isotropic space // Uzbek Mathematical Journal. 2022. T.65, №2. C. 66–77.

6. Ismoilov Sh.Sh., Kholmurodova G.N. Equality of surfaces in Euclidian and semi-Euclidian spaces according to geometric characteristics, Monge-Ampere equation // Bull. Inst. Math. 2023. T.6, є 4. C. 39–46.

Well-Posedness Of The Nonlocal Boundary Value Problem For Elliptic Equations With Samarskii–Ionkin Condition I

Ashyralyev A.[1,2,3], **Sadybekov M. A.**[3]

[1] Department of Mathematics, Bahcesehir University, 34353, Istanbul, Turkiye;
[2] Peoples Friendship University Russia, Ul Miklukho Maklaya 6,117198, Moscow, Russian Federation;
[3] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010, Almaty, Kazakhstan;
aallaberen@gmail.com
sadybekov@math.kz

Various nonlocal boundary value problems with Samatskii-Ionkin condition for partial differential have been investigated by many researchers (see, e.g. [1]-[10], and the references given therein).

In the present paper, the nonlocal boundary value problem for the elliptic equation

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), 0 < t < T, \\ \\ u(0) = u(T) + \varphi, u'(T) + \mu u(T) = \psi \end{cases} \tag{1}$$

in a Banach space E with Samarskii–Ionkin condition I and the positive operator A and $\mu \geq 0$ is investigated.

A function $u(t)$ is called a solution of the problem (1) if the following conditions are satisfied:

i) $u(t)$ is twice continuously differentiable on the interval $(0.T)$ and continuously differentiable on the segment $[0, T]$. The derivatives at the endpoints of the segment are understood as the corresponding unilateral derivatives.

ii) The element $u(t)$ belongs to $D(A)$ for all $t \in [0, T]$, and the function $Au(t)$ is continuous on the segment $[0, T]$.

iii) $u(t)$ satisfies the equations and the nonlocal boundary condition (1).

In the present paper, we study the well-posedness of the nonlocal boundary value problem (1). Applying operator tools of a book [11] and methods of papers [9]-[10], the main theorems on well-posedness of problem (1) in the spaces of smooth functions are established. In practice, the coercive stability estimates for solution of four types of nonlocal boundary value problems for elliptic differential equations with Samatskii-Ionkin condition I are proved.

References

1. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball// Electron J Differ Equ. 2014. Vol.2014. Article №. 157.

2. Dukenbayeva A.A. On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation in the disk. Matematicheskiy Zhurnal. 2018. Vol. 18, №. 1. P. 78–87.

3. Turmetov B.Kh., Koshanova M., Usmanov K. About solvability of some boundary value problems for Poisson equation in the ball conditions // Filomat. 2018. Vol.32, №. 3. P. 939–946.

4. Turmetov B.Kh., Karachik V.V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions // Filomat. 2018. Vol. 32, №. 3. P. 947–953.

5. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation// Mathematica Slovaca. 2020. Vol. 70, №. 2. P. 329–342.

6. Turmetov B.Kh. Generalization of the Robin problem for the Laplace equation// Differ Equ. 2019. Vol. 55, №. 9. P. 1134–1142.

7. Sadybekov M.A., Dukenbayeva, A.A. On boundary value problem of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Kazakh Math J. 2020. Vol. 20, №1. P. 84–94.

8. Ilin V.A., Kritskov L.V. Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // J Math Sci. 2003. Vol. 116, №. 5. P. 3489–3550.

9. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary// An International Journal Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol. 64, no. 5. P. 777-791.

10. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball// An International Journal Complex Variables and Elliptic Equations. 2022. Vol. 67, №. 2. P. 369-383.

11. Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Basel, Berlin, Boston: Birkhäuser-Verlag, 2004.

On The Integral Problem For System Of Hyperbolic Equations With Generalized Piecewise-Constant Argument

Assanova A. T.[1]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
assanova@math.kz

In present communication we consider the integral problem for system of hyperbolic equations with generalized piecewise-constant argument

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C(t,x)u(t,x) + f(t,x) +$$

$$+A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x} + B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)u(\gamma(t),x), \quad (t,x)\in\Omega, \qquad (1)$$

$$P_2(x)\frac{\partial z(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_0(x)z(0,x) +$$

$$+\int_0^T \left\{ K_2(\tau,x)\frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x} + K_1(\tau,x)\frac{\partial z(\tau,x)}{\partial \tau} + K_0(\tau,x)z(\tau,x)\right\} d\tau +$$

$$+S_2(x)\frac{\partial z(T,x)}{\partial x} + S_1(x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T} + S_0(x)z(T,x) = \varphi(x), \quad x\in[0,X], \qquad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t\in[0,T], \qquad (3)$$

where $\Omega = [0,T] \times [0,X]$, $u(t,x) = (u_1(t,x), ..., u_n(t,x))'$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$ and n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω;

$\gamma(t) = \zeta_j$ if $t \in [t_j, t_{j+1})$, $t_j \leq \zeta_j < t_{j+1}$ for all $j = 0, 1, ..., N-1$;

$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T$.

the $n \times n$ matrices $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, and the n vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0, \omega]$,

the $n \times n$ matrices $K_i(t,x)$, $i = 0, 1, 2$, are continuous on Ω;

the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$.

We study a questions for existence and uniqueness of solution to the integral problem (1)–(3). For this we use the approach in [1, 2] to solve of the problem (1)–(3). At first, in problem (1)-(3) we introduce new functions and transfer to family of integral problems for differential equations with generalized piecewise-constant argument and integral equations.

We use Dzhumabaev's parametrization method [3] for solving the family integral problems for system of differential equations with generalized piecewise-constant argument. The domain is partitioned by the lines $t = t_{r-1}$, $r = \overline{1, M}$. The functional parameters are set as the values of the desired function on the lines $t = \zeta_{r-1}$, $r = \overline{1, M}$. Then we introduce new unknown functions which are the difference between the desired function and the functional parameters on the partition subdomains. This results in an equivalent problem that includes a family integral problems for system of differential equations with parameters and some functional relations.

We propose an approach for solving the equivalent problem and develop an algorithm for finding its approximate solutions. Further, it provides the feasibility and convergence conditions for the algorithm, as well as the conditions for the existence of a unique solution of the equivalent problem. Finally, we have established coefficient conditions for the unique solvability of the integral problem (1)–(3).

The integral problems for hyperbolic system without generalized piecewise-constant argument, i.e. $A_0(t,x) = B_0(t,x) = C_0(t,x) = 0$, were studied in [1].

The integral problem (1)–(3) were studied for case $P_1(x) = P_0(x) = 0$, $S_1(x) = S_0(x) = 0$, $K_i(t,x) = 0$, $i = 0, 1, 2$, in [2], and for case $K_i(t,x) = 0$, $i = 0, 1, 2$, were investigated in [4].

The family multipoint problems for system of differential equations with generalized piecewise-constant argument was considered in [5].

Note that an initial boundary value problem for system of hyperbolic equations with generalized piecewise-constant argument and parameter is studied in [6].

References

1. Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 402, №1, P. 167–178.

2. Assanova A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, №15, P. 3584–3593.

3. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys. 1989. V. 29, №1, P. 34–46.

4. Assanova A.T., Uteshova R. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type // Chaos Solitons & Fractals. 2022. V. 165, №12. art. no. 112816.

5. Abildayeva A., Assanova A.T., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model// Eurasian Math. J. 2022. V. 13, №2, P. 8Ц-17.

6. Assanova A.T. Initial boundary value problem for partial differentialЦalgebraic equations with parameter // Math. Meth. Appl. Sci. 2025. First published: 05 January 2025. https://doi.org/10.1002/mma.10663.

The Method Of Unified Transformation For The Schrödinger Equation On A Simple Metric Graph

Atajanova N. Q.[1], **Jalolova G. F.**[2], **Eshimbetov M. R.**[1,3]

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
atajanovanilufar2001@gmail.com

[2]University of Exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
gulbahorjalolova745@gmail.com

[3]University of of Business and Science, Tashkent, Uzbekistan;
mr.eshimbetov92@gmail.com

Consider simple star graph Γ with three semi-infinity bonds connected on the point O. The point O called to be a vertex of the graph. We label the bonds of the graph as B_j, $j = 1, 2, 3$. Define coordinate x_j on the bond B_j for $j = 1, 2, 3$, corresponding it to the interval $(0, \infty)$. We denote the graph as Γ_∞. At each bond the vertex point O has a coordinate 0. Further we will use x instead of x_j.

In each bond of the graph we consider Schrödinger equation

$$iq_t^{(j)}(x,t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x,t), \;\; x \in B_j,\, t > 0,\, j = 1,2,3, \tag{1}$$

where $\sigma = \frac{-\hbar}{2m}$ and with initial conditions

$$q^{(j)}(x,\,0) = q_0^{(j)}(x), \;\; x \in B_j,\, j = 1,2,3. \tag{2}$$

the asymptotic conditions

$$\lim_{x\to\infty} q^{(j)}(x,t) = 0,\, t \geq 0,\, j = 1,2,3. \tag{3}$$

Moreover, we need to define the following vertex (gluing) conditions for connectivity of the graph

$$\delta_1^2 q^{(1)}(0,\,t) + \delta_2^2 q^{(2)}(0,\,t) + \delta_3^2 q^{(3)}(0,\,t) = 0, \;\; t \geq 0, \tag{4}$$

$$q_x^{(1)}(0,\,t) = q_x^{(2)}(0,\,t) = q_x^{(3)}(0,\,t), \;\; t \geq 0. \tag{5}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose, that initial data are smooth enough functions they satisfies the conditions (4) – (5).

We find the solution of the problem (1) – (5) using Fokas method. This method uses special generalization of the Fourier transformation, called the unified transformation

method [1]–[3]. To satisfy boundary and vertex conditions we obtained the system of linear algebraic equations, using so called global relations.

Theorem. *If initial data* $q_0^{(j)}(x)$ *are analitical functions in* $\bar{B}_j$ *for* $j = 1, 2, 3$, *then the solution of the problem (1) – (5) is given by*

$$q^{(j)}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{q}_0^{(j)}(k)dk + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\widehat{q}_0^{(j)}(-k)dk+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} i\sigma\widetilde{g}_1(w,t)dk,\ \ j = 1,2,3, \tag{6}$$

where $i\sigma\widetilde{g}_1(w,t) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^3 \delta_j^2}\cdot\sum_{j=1}^3 \delta_j^2\widehat{q}_0^{(j)}(-k)$, $\widehat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^\infty e^{-ikx}q_0^{(j)}(x)dx$,

$$D = \left\{k \in \mathbb{C}:\ \ Re(-ik^2) < 0\right\} = D^{(2)}\bigcup D^{(4)},$$

$$D^{(2)} = \left\{k \in \mathbb{C}:\ Imk > 0,\ Rek < 0\right\}, D^{(4)} = \left\{k \in \mathbb{C}:\ Imk < 0,\ Rek > 0\right\}.$$

References

1. Fokas A. S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. 2008. Pp. 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. Unified transform (Fokas) method for the Schrodinger equation on simple metric graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2019 12(4), 412-420.

3. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. Uzbek Mathematical Journal, 2019. № 1., Pp. 73–81.

Cauchy Problem For A Parabolic Equation Describing The Heat Propagation Process In A Non-Divergent Form Under The Influence Of An Exponentially Varying Density

Begulov U.U.[1], Khaydarov A.T.[2], Toshtemirov J.M.[3]

National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
begulov0108@gmail.com
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
abdugapparxaydarov1953@gmail.com
Qarshi state university, Qarshi, Uzbekistan;
jaloliddintoshtemirov0@gmail.com

Annotation. Based on the comparison theorem, the properties of a finite speed of propagation of solutions and the asymptotics of the self-similar solution for the Cauchy problem of a parabolic equation describing non-divergent heat propagation process are studied.

In this paper, we explore the positive solution of the Cauchy problem for a parabolic equation describing the heat propagation process in a non-divergent form under the influence of an exponentially varying density

$$e^{\alpha x}\frac{\partial u}{\partial t} = u^q\frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (t,x) \in Q \tag{1}$$

$$u\big|_{t=t_0} = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R. \tag{2}$$

considering initial data that is neither trivial or negative. Here $Q = \{(t,x) \mid t > 0, x \in R\}$, $\sigma > 0$, $p \geq 2$, $0 < q < 1$, $\rho(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in R_+$ are the given parameters, and $u = u(t,x) \geq 0$ denotes the solution.

Equation (1) is frequently used to describe and analyze heat dissipation in variable density environments, diffusive processes in biological species, and the spread of infectious diseases [1,3-5]. In [2], the authors considered a non-linear parabolic equation (1) with a source and an inhomogeneous density of the following form

$$\rho(x) = |x|^{-n} \quad \text{or} \quad \rho(x) = (1+|x|)^{-n}, \quad n \geq 0.$$

.

We introduce a transformation of the form $w = u^{1-q}$ and substitute this transformation into equation (1). We obtain the following form of the equation.

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{s-1} w^m \left| \frac{\partial w^k}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial w^k}{\partial \varphi} \right) \tag{3}$$

Here $\varphi(x) = \frac{p}{\alpha} e^{\frac{\alpha x}{p}}$, $m = \frac{\sigma}{1-q}$, $k = \frac{1}{1-q}$ and $s = p$ are auxiliary parameters.

In the following, we use the non-linear splitting method to construct a self-similar equation [1]. Then, to transition from equation (3) to the self-similar equation, we study the self-similar solution of the following form.

$$w(t, \varphi(x)) = f(\xi) \tag{4}$$

where $\xi = \frac{\varphi(x)}{t^\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{p}$.

It can be seen that the above $f(\xi)$ solution satisfies the following equation.

$$\xi^{s-1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{1-s} f^m \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df^k}{d\xi} \right) + \frac{\lambda \xi}{1-q} \frac{df}{d\xi} = 0. \tag{5}$$

(5) the self-similar equation is nontrivial and non-negative

$$f(0) = M, \quad M \in \mathbb{R}, \quad f(d) = 0, \quad 0 < d < \infty \tag{6}$$

We focus on finding a solution that satisfies the above conditions.

References

1. M. Aripov and S. Sadullaeva, Computer simulation of nonlinear diffusion processes. University Press, Tashkent (2020): 670.

2. A. V. Martynenko, A. F. Tedeev, and V. N. Shramenko, The Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source in the class of slowly decaying initial data, Izv. Math. 76, №. 3, 563–580 (2012).

3. Xaydarov A.T., Begulov U.U. Eksponensial uzgaruvchan zichlikli chiziqsiz muhitda issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirish. O‘zMU xabarlari. 2023; (1/1 Aniq fanlar): 246–253.

4. Begulov U.U., Khaydarov A.T., Salimov J.I. Mathematical modeling of the double nonlinear exsponential inhomogeneous density heat dissipation. ACTA NUUz. 2024;(2/1 Exact sciences):34–42.

5. Khaydarov A.T., Begulov U.U., M.I. Davronova The Cauchy problem for a double nonlinear parabolic equation with variable density and nonlinear source. QarDU xabarlari. 2024 ;3(2):95–102.

Comparative Analysis of Maximum Likelihood Estimation and Bayesian Estimation under Right-Censoring Conditions

Mirkamol Berdimuradov

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, PhD student
E-mail: mirkamol1403@gmail.com

Abstract

Censored data models present challenges in statistical inference, particularly in survival analysis and reliability engineering. Right-censoring occurs when observations are only partially known, making parameter estimation complex. Maximum Likelihood Estimation (MLE) struggles under high censoring, whereas Bayesian estimation offers a probabilistic framework to handle incomplete data.

This study compares the accuracy and efficiency of **MLE and Bayesian estimation** for the **Normal distribution** under right-censoring. We analyze how well each method recovers true parameters and We compare these methods by Mean Squared Error (MSE) value using python program. Accurate parameter estimation is crucial in applied fields such as medical research, reliability engineering, and financial risk modeling. This paper presents a comparative analysis of **MLE and Bayesian methods**, highlighting their strengths, weaknesses, and applications.

Key words: Right-Censoring models, Bayesian estimation, Maximal likelihood estimation, Normal distribution.

Right-Censoring Models

Right-censoring occurs when a random variable X is only known within a certain range. Let X have a probability density function $f(X;\theta)$ and cumulative distribution function $F(X;\theta)$, where θ is an unknown parameter. We observe a sample:

$$C_n = \{(Z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$$

where:

- $Z_i = \min(X_i, T_i)$ is the observed value,
- $\delta_i = I(X_i \leq T_i)$ indicates whether censoring occurred.

The likelihood function for right-censored data is:

$$L(Z^n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[f(Z_i;\theta)^{\delta_i} \cdot (1 - F(Z_i;\theta))^{1-\delta_i} \right].$$

Taking the logarithm:

$$\ln L(Z^n;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \ln f(Z_i;\theta) + (1-\delta_i)\ln(1-F(Z_i;\theta))\right].$$

MLE estimates for θ are obtained by solving:

$$\left.\frac{\partial l(Z^n;\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

Bayesian Estimation and Posterior Distribution

Bayesian estimation incorporates prior knowledge to estimate θ, particularly when censoring data impact MLE performance. The posterior distribution is:

$$P(\theta|Z^n) \propto P(Z^n|\theta)P(\theta),$$

where $P(Z^n|\theta)$ is the likelihood function, and $P(\theta)$ is the prior distribution over θ. Due to its complexity, numerical methods such as **Markov Chain Monte Carlo (MCMC)** are commonly used.

Analytical MLE Derivation for Right-Censoring

For the **Normal distribution**, the likelihood function is:

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(Z_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)^{\delta_i} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{T-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]\right)^{1-\delta_i}\right].$$

Taking the log-likelihood:

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \left[\delta_i \left(-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(Z_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + (1-\delta_i)\ln\left(1-\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{T-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]\right)\right].$$

Conclusion

This study emphasizes the necessity of numerical methods due to the complexity of analytically evaluating how accurately the MLE and Bayesian methods estimate the true parameters under right-censoring conditions. The results are compared both graphical and tabular way.

References

1. Abdushukurov, A. A., Nurmukhamedova, N. S. 2020. Asymptotic Properties of Bayesian-Type Estimates in the Competing Risk Model under Random Censoring. Journal of Mathematical Sciences (United States). 245(3): 341–349.

2. Berdimuradov, M. B. 2024. Estimation of unknown parameter of gamma distribution in incomplete models of statistics. ACTA NUUz. 1(1): 43–52.

3. Khago, Ahmed, "Bayesian estimation of the normal mean in the presence of non-detects"(2005). UNLV Retrospective Theses Dissertations. 1775.

4. Rahajeng, I. D. P., Fithriani, I., Nurrohmah, S. (2019). Comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation of Rayleigh Distribution for Right Censored Survival Data Type II. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series, 1218.

Stability Analysis of Modified Parabolic Systems in Population Competition Models

Boborakhimova M. I.[1], **Jamoldinova Sh. M.**[2]
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan
kamina9314@mail.ru, jamoldinovashohista@gmail.com

This study focuses on the existence and stability of solutions to a modified system of nonlinear parabolic equations describing the dynamics of two competing species in a bounded habitat. We consider strictly positive solutions of systems involving competition and diffusion. The approach is based on the method of upper and lower solutions, utilizing a transformation to ensure quasimonotonicity. Stationary solutions are derived analytically, while numerical methods are employed to construct population dynamics graphs. Over recent decades, the dynamic behavior of competition-diffusion systems in homogeneous or heterogeneous environments has been extensively studied in biology and mathematics. Models of competition between two organisms, such as Lotka-Volterra-type systems, describe coexistence, extinction, or the displacement of one species by another depending on system parameters [1]. In [2], periodic solutions of parabolic systems were explored using the method of upper and lower solutions to establish their existence and stability.

In this paper, we modify the original system by introducing the transformation $w = M_0 - v$ to ensure quasimonotonicity of reaction functions. We analyze the system's stationary states, determine conditions for species coexistence, and construct numerical solutions using the finite difference method.

The original system is given by:

$$u_t - d_1 u_{xx} = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \tag{2}$$

where u and v represent the population densities of two competing species, d_1, d_2 are diffusion coefficients, a_1, a_2 are growth rates, b_1, c_2 denote intraspecific competition, and c_1, b_2 represent interspecific competition. The boundary conditions are periodic:

$$u(t,-l) = u(t,l), \quad u_x(t,-l) = u_x(t,l),$$

$$v(t,-l) = v(t,l), \quad v_x(t,-l) = v_x(t,l),$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad -l \le x \le l.$$

System Modification To ensure quasimonotonicity, we introduce the transformation $w = M_0 - v$, where M_0 is a sufficiently large positive constant (e.g., $M_0 > \max(v)$). Since $v_t = -w_t$, the system transforms into:

$$u_t - d_1 u_{xx} = F_1(u,w) = u[a_1 - b_1 u - c_1(M_0 - w)], \tag{3}$$

$$w_t - d_2 w_{xx} = F_2(u,w) = -(M_0 - w)[a_2 - b_2 u - c_2(M_0 - w)]. \tag{4}$$

New boundary and initial conditions are:

$$u(t,-l) = u(t,l), \quad u_x(t,-l) = u_x(t,l),$$
$$w(t,-l) = w(t,l), \quad w_x(t,-l) = w_x(t,l),$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad w(0,x) = M_0 - v_0(x).$$

The functions F_1 and F_2 satisfy quasimonotonicity:

$$\frac{\partial F_1}{\partial w} = uc_1 > 0 \quad \text{(increasing in } w\text{)},$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = (M_0 - w)b_2 > 0 \quad \text{(increasing in } u\text{)}.$$

We first establish a lemma to support the existence of bounded solutions.

Lemma 1. Let $u_0(x) \geq 0$ and $v_0(x) \geq 0$ be non-negative initial conditions, and let $M_0 > \max\{v_0(x), a_2/c_2\}$. Then the solutions $u(t,x)$ and $v(t,x)$ of the system (1)–(2) with periodic boundary conditions remain non-negative and bounded for all $t > 0$, $x \in [-l, l]$.

For the stationary state ($u_t = w_t = 0$, $u_{xx} = w_{xx} = 0$):

$$u[a_1 - b_1u - c_1(M_0 - w)] = 0, \tag{5}$$
$$-(M_0 - w)[a_2 - b_2u - c_2(M_0 - w)] = 0. \tag{6}$$

Solutions:

- $u = 0$ or $a_1 - b_1u - c_1(M_0 - w) = 0$,
- $M_0 - w = 0$ (i.e., $v = 0$) or $a_2 - b_2u - c_2(M_0 - w) = 0$.

In the original variables [2]:

$(0,0)$, $(a_1/b_1, 0)$, $(0, a_2/c_2)$, (η_1, η_2), where:

$$\eta_1 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1c_2 - b_2c_1},$$
$$\eta_2 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1c_2 - b_2c_1},$$
$$\Delta = b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0.$$

Upper and Lower Solutions Upper solution: $\tilde{u} = P(t)$, $\tilde{w} = M_0$ (i.e., $\underline{v} = 0$),
Lower solution: $\underline{u} = 0$, $\underline{w} = M_0 - S(t)$ (i.e., $\tilde{v} = S(t)$),
where:

$$P(t) = \frac{10}{(1 - e^{-t}) + (10/P(0))e^{-t}},$$
$$S(t) = \frac{0.1/0.3}{(1 - e^{-0.1t}) + (0.1/(0.3S(0)))e^{-0.1t}}.$$

These bound the solution: $0 \leq u \leq P(t)$, $0 \leq v \leq S(t)$.

We modified a parabolic system with the transformation $w = M_0 - v$, derived stationary solutions, and confirmed convergence numerically. These findings are applicable to species competition analysis.

References

1. Du Y., Positive periodic solutions of a competitor competitor mutualist model,Differential Integral Equations 19 . 1996 , 1043-1066.
2. Zhou P., Tang D., Xiao D. On Lotka-Volterra competitive parabolic systems:Exclusion, coexistence and bistability. J. Differ. Equ.2021, 282, 596-625.

Behavior Of Solutions To Semilinear Evolution Inequalities In An Annulus

Borikhanov M.B.

Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Turkistan,
Kazakhstan Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
e-mail: meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz, borikhanov@math.kz

In the present paper, we consider the parabolic and hyperbolic inequalities with a singular potentials and with a critical nonlinearities in the annulus domain. The problems are studied with Neumann-type and Dirichlet-type boundary conditions on the boundary. Moreover, we study the systems of problems too. We have proved that the above problems are globally unsolvable in critical cases, thereby filling the gaps the recent results by Jleli and Samet in [1] and in [2]. Proofs are carried out using the method of test functions with logarithmic arguments, which is being developed for the first time in bounded domains.

Reference

1. Jleli M., Samet B. Nonexistence criteria for systems of parabolic inequalities in an annulus // J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol 514, №. 2. P. 126352.
2. Jleli M., Samet B. Nonexistence for nonlinear hyperbolic inequalities in an annulus // Anal. Math. Phys. 2022. Vol. 12. P. 1–18.

On One Time-Optimal Control Problem For A Fourth Order Parabolic Equation Involing Involution

Dekhkonov F. N.

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
f.n.dehqonov@mail.ru

Consider the fourth order parabolic equation with involution in the domain $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi\}$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,y,t) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x,y,t) +$$

$$+\varepsilon_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\pi - x,y,t) + \varepsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x,\pi - y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \Omega_T := \Omega \times (0,\infty), \qquad (1)$$

with boundary value conditions

$$u(0,y,t) = \varphi(y)\,\nu(t), \quad u(\pi,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0, \quad u(x,\pi,t) = 0, \qquad (2)$$

and

$$u_{xx}(0,y,t) \;=\; 0, \quad u_{xx}(\pi,y,t) \;=\; 0, \quad u_{yy}(x,0,t) \;=\; 0, \quad u_{yy}(x,\pi,t) \;=\; 0, \tag{3}$$

and initial value condition

$$u(x,y,0) \;=\; 0, \quad 0 \le x,y \le \pi, \tag{4}$$

where ε_i $(i=1,2)$ are nonzero real numbers such that $|\varepsilon_i|<1$, $\varphi(y)$ is a given function and $\nu(t)$ is the control function.

Assume $M>0$ is given. It is called that the control function $\nu(t)\in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ is *admissible*, if it fulfills the conditions $\nu(0)=0$ and $|\nu(t)|\le M$ on the half-line $t\ge 0$.

Now we present the following time optimal control problem.

Time Optimal Problem. *For a given constant $\theta>0$ problem consist looking for the minimal value of $T\ge 0$, such that for $t\ge T$ the solution $u(x,y,t)$ of the initial-boundary value problem (1)-(4) with some admissible control $\nu(t)$ exists and for some $T_1>T$ satisfies the equation*

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi u(x,y,t)\,dy\,dx = \theta, \quad T\le t\le T_1.$$

Three kinds of optimal control problems: time optimal control problem, target optimal control problem and norm optimal control problem, are important and interesting problems of optimal control theory. The aim of this work is to study the time-optimal control problem for a fourth order parabolic equation. It is known that fourth-order parabolic equations were introduced to describe the epitaxial growth of nanoscale thin films [1]. Therefore, interest in materials science has been increasing in recent years.

A control problem associated with parabolic equations was studied by Friedman [2]. A great deal of developments in the controllability theory of the linear second order parabolic equation were initiated by Fattorini and Russell [3]. Initially, the problem of time optimal control associated with a second-order parabolic-type equation in a bounded $n-$dimensional domain was studied in [4] and the minimal time estimate for achieving a given average temperature was found. In [5], a mathematical model of thermocontrol processes was studied. The control problem for the second-order parabolic equation associated with the Neumann boundary condition in a bounded three-dimensional domain is studied in [6].

We set

$$\Phi_{mn} \;=\; \frac{8\,(1+\varepsilon_1)}{\pi}\,\frac{(2m+1)^2\,\varphi_{2n+1}}{2n+1}, \quad m,n=0,1,\ldots,$$

and

$$\lambda_0 = 2+\varepsilon_1+\varepsilon_2, \quad \Phi_0 = \frac{8\,(1+\varepsilon_1)\,\varphi_1}{\pi}.$$

Theorem. *A solution T_{min} of the time-optimal problem exists and the estimate $T_{min}\le T_0$ is valid, where T_0 is as follows*

$$T_0 \;=\; -\frac{1}{\lambda_0}\ln\!\left(1-\frac{\theta\,\lambda_0}{\Phi_0\,M}\right), \quad 0<\theta<\frac{\Phi_0\,M}{\lambda_0}.$$

References

1. King B.B., Stein O., Winkler M. A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth// J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 286, №. 2. P. 459–490.
2. Friedman A. Differential equations of parabolic type. XVI, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
3. Fattorini H. O., Russell D. L. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension// Arch. Rational Mech. Anal. 1971. Vol. 43, P. 272–292.
4. Albeverio S., Alimov Sh.A. On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process// Applied Mathematics and Optimization. 2008. Vol. 57, №. 1, P. 58–68.
5. Alimov Sh. A., Ibragimov G. Time optimal control problem with integral constraint for the heat transfer process// Eurasian Mathematical Journal. 2024. Vol. 15, P. 8–22.
6. Dekhkonov F.N. On the control problem associated with the heating process// Mathematical notes of NEFU. 2022. Vol. 29, №. 4, P. 62–71.

The Inverse Problem Of The Source For The Equation Of Forced Vibrations Of Beams

Durdiev U.D.,[1] **Odinaev R.R.**[2]

Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan;
email:umidjan93@list.ru

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
odinayevrashid@mail.ru

We consider the following equation,

$$u_{tt} + u_{xxxx} = p(x)q(t), \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

in the domain $D := \{(x,t);\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T\}$ with initial conditions

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where $k \geq 2 -$ fixed natural number

In the direct problem, it is required to find a function $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,k}_{x,t}(\overline{D})$ satisfying equalities (1)–(3) for given number T and sufficiently smooth functions $p(x), q(t), \varphi(x)$ and $\psi(x)$.

In the inverse problem, it is required to find the function $q(t)$, if the following additional information is known about the solution to the direct problem (1)–(3) :

$$g(t) = \int_0^1 u(x,t)h(x)\ dx, \tag{4}$$

where the functions $g(t)$, $h(x)$ are given and the function $h(x)$ satisfies the conditions

$$h(x) \in C^4[0,1], \;\; h(0) = h(1) = h''(0) = h''(1) = 0. \tag{5}$$

In this paper, the direct and inverse problems for $k \geq 2$ are considered.

Theorem. *Let* $g(t) \in C^{k-1}[0,T]$, $(p(x), h(x)) \neq 0$ *and* $(p(x), h^{(4)}(x)) \neq 0$. *Then there exists a unique solution to the inverse problem* (1)-(5) *from* $q(t) \in C^{k-1}[0,T]$. Here $(.,.)$ scalar product in $L_2(0,1)$

References

1. Durdiev U.D. Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation in an infinite domain, Diffe r. Equations, **59**:4, 462-472; 2023.

2. Durdiev D.K., Turdiev H.H. Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type over-determination conditions, Methods in the Applied Sciences, **47**:6, 5329–5340 2024.

The Fokas' Method For Inverse Control Problem For Heat Equation On Simple Metric Graph

Eshimbetov M. R.[1,3], **Jalolova G. F.**[2]

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
mr.eshimbetov@nuu.uz

[2]University of Exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
gulbahorjalolova745@gmail.com

[3]University of of Business and Science, Tashkent, Uzbekistan;
m.eshimbetov@ubsu.uz

Consider simple metric graph Γ with three finite bonds connected on the point O. The point O called to be a vertex of the graph. We label the bonds of the graph as B_j,$j = \overline{1,3}$. Define coordinate x_j on the bond B_j for $j = \overline{1,3}$ corresponding it to the intervals $(0, L_j)$. At each bond the vertex point O has a coordinate 0. Further we will use x instead of x_j.

We consider the equations of heat dissipation in each bond of the given graph

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t) + f^{(j)}(x), \;\; j = \overline{1,3} \tag{1}$$

with initial conditions

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), \;\; x \in \overline{B_j}, \; j = \overline{1,3} \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u^{(j)}(x,t)|_{x=L_j} = 0, \;\; j = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$u_x^{(1)}(0,t) = u_x^{(2)}(0,t) = u_x^{(3)}(0,t), \sum_{j=1}^{3} u^{(j)}(0,t) = 0. \tag{4}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs.

We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3)–(4).

Our task is to find the functions $\left\{u^{(j)}(x,t),\ f^{(j)}(x),\ j=\overline{1,3}\right\}$ that satisfy the equation (1), the conditions (2)–(4) and additional condition $u^{(j)}(x,T)=u_T^{(j)}(x),\ j=\overline{1,3}$.

The solution of this inverse problem found by unified transformation method [1-3].

References

1. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. 2008., p: 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

3. Sheils N.E. and Smith D.A. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 J. Phys. A: Math. Theor. 48 335001.

Inverse Problem For A System Of Mixed-Type Second-Order Differential Equations

Fayazov K. S.[1], **Juraeva D. Sh.**[2]

[1]Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan,
kudratillo52@mail.ru;

[2] Turin Polytechnic University in Tashkent,Uzbekistan,
jurayevadildora1998@gmail.com;

This work is devoted to the study of an inverse problem for a system of mixed-type equations.

Statement of Problem. Let $\Omega=\Omega_-\cup\Omega_+$, where $\Omega_-=(-1;0)\times(0;T)$, $\Omega_+=(0;1)\times(0;T)$. The functions $u(x,t)$, $v(x,t)$ and $f(x)$, $g(x)$ which are related in the domain Ω are required by a system of equations

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\mathrm{s}\,ign(x)u_{xx}(x,t)+a_1u(x,t)+b_1v(x,t)=f(x)\,, \\ v_t(x,t)-\mathrm{s}\,ign(x)v_{xx}(x,t)+a_2v(x,t)+b_2u(x,t)=g(x) \end{cases}. \tag{1}$$

Find functions $v(x,t),u(x,t)$ and $f(x),g(x)$ satisfying the system of equations (1), boundary

$$u_x(\pm1,t)=0,\quad v_x(\pm1,t)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{2}$$

initial

$$\begin{aligned} u(x,0)=\varphi(x)&=\begin{cases}\varphi_1(x)\,, & -1\le x\le 0\,,\\ \varphi_2(x)\,, & 0\le x\le 1\,,\end{cases}\\ v(x,0)=\phi(x)&=\begin{cases}\phi_1(x)\,, & -1\le x\le 0\,,\\ \phi_2(x)\,, & 0\le x\le 1\,,\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

final

$$\begin{aligned} u(x,T)=\psi(x)&=\begin{cases}\psi_1(x)\,, & -1\le x\le 0\,,\\ \psi_2(x)\,, & 0\le x\le 1\,,\end{cases}\\ v(x,T)=\gamma(x)&=\begin{cases}\gamma_1(x)\,, & -1\le x\le 0\,,\\ \gamma_2(x)\,, & 0\le x\le 1\,,\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

and gluing

$$\begin{aligned} u(-0,t) = u(-0,t)\,,\ u_x(-0,t) = -u_x(-0,t)\,, \\ v(-0,t) = v(+0,t)\,,\ v_x(-0,t) = -v_x(+0,t) \end{aligned} \tag{5}$$

conditions, where $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\phi(x)$, $\gamma(x)$ - are sufficiently smooth given functions, a_i and b_i are any constants, $b_2 \neq 0$ and $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2 > 0$.

In this formulation, $f(x), g(x)$ are the unknown right-hand side of the system (1). The boundary conditions of the second kind are conditions (2) for the corresponding parabolic equations in the domains Ω_- and Ω_+. The initial conditions are specified using the functions $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\phi_2(x)$, and $\gamma_1(x)$ the final redefinition conditions necessary to find the functions $f(x), g(x)$ are specified using the functions $\varphi_1(x)$, $\psi_2(x)$,$\varphi_1(x)$, and $\gamma_2(x)$.

The existence and uniqueness of the solution to the problem is proved.

References

1. Fayazov K. S., Khajiev I. O. Estimation of conditional stability of the boundary-value problem for the system of parabolic equations with changing direction of time, Reports on Mathematical Physics, Volume 88, Issue 3, 2021, Pages 419-431.

Nonlocal Problem For Pseudo-Parabolic Equation Of The Third Order

Fayazov K.S.[1], Rahimov D.I.[2]

Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
kudratillo52@mail.ru
Tashkent University of Applied Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
doston.rahimov.97@bk.ru

This work is devoted to the study of the conditional well correctness of the nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous Sobolev type equation with degenerate lines.

Let $L \equiv \partial_{xxt} + sign(y)\partial_{yy}$ and $Q = \Omega \times \Omega_0$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 = \{-\pi < x < \pi\}$, $\Omega_2 = \{-1 < y < 1\}$, $\Omega_0 = \{0 < t < T\}$.

Consider the equation

$$Lu(x,y,t) = f(x,y,t) \tag{1}$$

in the domain $Q\setminus\{y=0\}$, where $f(x,y,t)-$ is given sufficiently smooth function.

Problem. Find a solution of the equation (1) satisfying the following conditions: nonlocal

$$u\,(x,y,t)|_{t=0} + \alpha\, u\,(x,y,t)|_{t=T} = \varphi\,(x,y)\,,\ \ (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

boundary

$$u(x,y,t)\,|_{\partial\Omega} = 0,\ \ t \in \bar{\Omega}_0, \tag{3}$$

and gluing conditions

$$\partial_y^i u(x,y,t)\big|_{y=-0} = \partial_y^i u(x,y,t)\big|_{y=+0}\,,\ \ (x,t) \in \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_0\,,\ i = 0,1, \tag{4}$$

where α is some constant, $\varphi\,(x,y)$ is given suпæЋciently smooth functions.

In this paper, we study the correctness of the desired problem depending on the value of the parameter α and obtain a presentation of the solution, as well as an a priori estimate of the solution. In the case of well-posedness, conditional correctness is proved.

References

1. S.L. Sobolev. On one new problem of mathematical physics, Izv . USSR Academy of Sciences. Ser . Matem ., 1954, Vol. 18, Issue 1, pp . 3-50.

2. K.S. Fayazov, I.O. Khajiev (2020) A nonlocal boundary-value problem for a fourth-order mixed-type equation. Ukrainian Mathematical Bulletin, 17(1), 030-040.

3. K.S.Fayazov, Y.K.Khudayberganov Nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous parabolic type equation with two degenerate lines. Uzbek Mathematical Journal, 2024, №1, pp.1-17.

Existence of Nonnegative Solutions of the Elliptic Equation with a Singular Potential in a Domain with a Conic Point

Bazargeldy Hudaykuliyev

Department of Mathematics, Turkmen State Institute of Finance, Turkmenistan;
bazargeldyh@yandex.ru

Abstract. In this paper we study the existence of nonnegative solutions of the Dirichlet problem for a linear elliptic equation with a singular potential in a domain $\Omega = G \cap B_\rho \subset R^n$ $(n \geq 3)$, where G is a conical domain in R^n , with vertex at the origin O, and $B_\rho = B(0, \rho)$ is a ball of radius ρ, $\rho \leq 1$ centered at the origin of coordinates. We find an exact condition on the potential ensuring the existence of a nonnegative solution of that problem.

Keywords: Nonnegative solution, elliptic equation, singular potential, conic point.

Let G be a domain with a conic point in R^n $(n \geq 3)$ and $B_\rho = B(0, \rho)$ be a ball of radius ρ, $\rho \leq 1$ centered at the origin of coordinates O. Let $\Omega = G \cap B_\rho \subset R^n$ $(n \geq 3)$, and $\partial\Omega$ be the boundary of the domain Ω. It is assumed that the boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω is sufficiently smooth everywhere, except at the origin of coordinates. Recall that a domain $G \subset R^n$, $n \geq 3$, is called a domain with a conic point if its boundary ∂G is infinitely smooth everywhere, except at the origin O, and, in a neighborhood of the origin, the domain G coincides with a cone E whose vertex is the point O.

In a domain $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 3)$ we consider the problem of finding a nonnegative function $u(x)$.

$$-\Delta u = V(x)u, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = \phi(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

where $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ and Δ is a standard Laplacian.

By a solution of equation (1) we mean a nonnegative generalized function (distribution) $u \in D'(\Omega)$ such that $Vu \in L^1_{loc}(\Omega)$, and $u = \phi$ for almost all $x \in \partial\Omega$. We assume that $0 \leq Vu \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $\phi(x)$ is a given continuous nonnegative function on the boundary $\partial\Omega$.

Let us introduce the polar coordinates $(r, \omega), r = |x|, \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1})$ centered at the origin. The Laplace operator in polar coordinates is of the form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega.$$

where Δ_ω is the Beltrami operator. Let λ_ρ be the least eigenvalue of the Beltrami operator Δ_ω on $G \cap \partial B_\rho$ with zero Dirichlet boundary condition on $\partial G \cap \partial B_\rho$, and let $Y_\rho(\omega)$ be the eigenfunction corresponding to the least eigenvalue λ_ρ.

Let $\varphi(x) = R(r) \cdot Y_\rho(\omega) > 0$ be a function such that $\Delta\varphi(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ and for any function $v \in C^1_0(\Omega)$ and $q = 2n/(n-2)(n \geq 3)$ the following inequality holds

$$\left(\int\limits_\Omega |v|^q \varphi^2 dx \right)^{2/q} \leq Const \cdot \int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \varphi^2 dx, \tag{3}$$

where $r = |x|$ and $R(r)$ is a radial function.

Set

$$V_0(x) = -\frac{\Delta\varphi}{\varphi}, \quad x \in \Omega.$$

In this paper is analyzed the behavior of nonnegative solutions of problem (1), (2) in the neighborhood of conic point and is proved that if $0 \leq V(x) \leq V_0(x)$ in Ω, then this problem has a nonnegative solution for any nonnegative continuous boundary function.

The main result of the paper is the following theorem

Theorem. *Let $V \geq 0$ and $V_0(x) = -\Delta\varphi/\varphi$, where the function $\varphi(x) > 0$ such that $\Delta\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$ and the inequality (3) holds. If $V(x) \leq V_0(x)$ in the domain Ω then problem (1), (2) has a nonnegative solution for any nonnegative continuous boundary function ϕ.*

References

1. Baras P. And Goldstein J.A. The heat equation with a singular potential. Transaction of the American Math. Society. - 1984. V. 284. №. 1. P. 121-139.

2. B.A. Khudaikuliev, "The heat equation with a singular potential, Differensial'nye Uravneniya, 1997, Vol. 33, №.4, pp. 567-569 (in Russian).

3. B.A. Khudaikuliev, "Elliptic equation with a singular potential,"Ukrainski Mathematicny jurnal, 2010, Vol. 62, №. 12, pp. 1713-1722 (in Russian).

4. B. Hudaykuliyev, "Elliptic equation with a singular potential in a domain with a conic point,"Mathematical Notes, 2012, Vol. 92, №. 6, pp. 202-211.

The Unified Transformation Method For Heat Transfer Equation On General Metric Graphs

Atajanova N. Q.[1], Ismoilova Sh. L.[2]

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
atajanovanilufar2001@gmail.com

[2]University of Exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
shaxrixonismoilova0707@gmail.com

In the present paper we obtained integral-representation of solutions in terms of given initial and boundary data for the initial-boundary value problems for heat transfer equation on general metric star-graph via Fokas' unified transformation method.

We consider symmetric graph which obtained by connecting n finite $B_1, B_2, ..., B_n$ and m semi-infinite $B_{n+1}, B_{n+2}, ..., B_{n+m}$ bonds at one point, called to be vertex of the graph. We correspond the bonds B_j, $(j = \overline{1,n})$ to the intervals $(0, L_j)$ and the bonds B_r, $(r = \overline{n+1, n+m})$ to intervals $(0, \infty)$ to define coordinates in each bond. Here vertex of the graph corresponds to 0 on each bond.

In each bond of the graph consider the heat transfer equation

$$V_t^{(j)}(x,t) = V_{xx}^{(j)}(x,t) + f^{(j)}(x,t),\ j = \overline{1,n+m} \tag{1}$$

the initial conditions

$$V^{(j)}(x,0) = V_0^{(j)}(x),\ \ x \in \overline{B_j},\ j = \overline{1,n+m}. \tag{2}$$

Boundary and the asymptotic conditions

$$\left(\alpha_j V^{(j)}(x,t) + \beta_j V_x^{(j)}(x,t)\right)|_{x=L_j} = 0,\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0,\ j = \overline{1,n} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} V^{(r)}(x,t) = 0,\ t \geq 0,\ r = \overline{n+1,n+m} \tag{4}$$

on finite and semi infinite bonds, respectively.

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$V_x^{(1)}(0,t) = V_x^{(2)}(0,t) = ... = V_x^{(n+m)}(0,t), \sum_{j=1}^{n+m} V^{(j)}(0,t) = 0. \tag{5}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3)-(5).

We solve the above problem using the Fokas' method. This method uses generalized Fourier transformation defined in [1]. The uniqueness of the solution proved by the method of energy integrals [2] – [3].

References

1. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. 2008., p: 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

3. Sheils N.E. and Smith D.A. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 J. Phys. A: Math. Theor. 48 335001.

On The Influence Of Lower Terms On The Correctness Of The Statement Of The Characteristic Dirichlet Problem For A Third-Order Linear Hyperbolic Equation

Jokhadze O.[1], Kharibegashvili S.[2]

[1]Tbilisi State University, [2]Georgian Technical University

On the plane of independent variables x and t consider a strictly hyperbolic third-order equation with constant coefficients of the form

$$\sum_{i=0}^{3} a_i \frac{\partial^3 u}{\partial t^i \partial x^{3-i}} + \sum_{i+j=2} b_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j} + cu = F(x,t), \tag{1}$$

where without loss of generality we can assume that $a_3 = 1$. Strictly hyperbolicity of equation (1) means that the corresponding characteristic equation $\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0 = 0$ has only simple real roots $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, which correspond to families of characteristics curves defined by the equalities $x + \lambda_i t = const,\ i = 1, 2, 3$.

By introducing the notation $L_i := \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x},\ i = 1, 2, 3$, equation (1) can be rewritten as the form

$$L_1L_2L_3u + \alpha L_1L_2u + \beta L_2L_3u + \gamma L_1L_3u + cu = F, \tag{2}$$

where the values $\alpha,\ \beta$ and γ are uniquely determined by the coefficients of equation (1).

Denote by D the parallelogram bounded by the characteristics lines: $x + \lambda_1 t = 0,\ x + \lambda_1 t = c_1$ and $x + \lambda_2 t = 0,\ x + \lambda_2 t = c_2$, where $c_i = const > 0,\ i = 1, 2$. Also denote by G the characteristic triangle bounded by the characteristics: $x + \lambda_1 t = 0,\ x + \lambda_2 t = 0$ and $x + \lambda_3 t = c_3$, where $c_3 = const > 0$.

In the domain $D(G)$ for the equation (1) consider the characteristic Dirichlet problem in the following statement: find a solution u of equation (1) in the domain $D(G)$ that satisfies the boundary condition

$$u\big|_{\partial D} = f \quad \Big(u\big|_{\partial G} = g\Big). \tag{3}$$

Theorem 1. If equation (1) does not contain lower terms, then in the domain $D(G)$ the Dirichlet problem (1), (3) is ill-posed, in particular, the homogeneous problem corresponding to (1), (3) has an infinite number of linearly independent solutions.

Theorem 2. Let all coefficients on the left-hand side of equation (2) be zero except for one of the coefficients $\alpha,\ \beta$ or γ. Then problem (1), (3) is correctly posed in the characteristic triangular domain G.

Theorem 3. Let all coefficients in the left-hand side of equation (3) be zero except α. Then problem (1), (3) is correctly posed in the characteristic parallelogram D.

Nonlocal Regularization Of Protter-Morawetz BVP For The 3-D Tricomi Equation

Popivanov N.I.

Bulgarian Academy of Science, Institute of Information and Communication Technologies;
Sofia University, Department of Mathematics and Informatics, Sofia, Bulgaria
nedyu@fmi.uni-sofia.bg

In the present talk we would like to present some results for 3-D boundary value problems in the case of changing type equations. More than 50 years ago M.H. Protter initiated the study of such problems, as multidimensional analogues of a famous plain Guderley - Morawetz problem (coming from the transonic fluid mechanics), formulated by C. Morawetz and investigated by C. Morawetz, P. Lax and R. Phillips. Let mention that the statements of M. Protter actually are in two different cases:

1. **Hyperbolic-Parabolic domain $\mathbf{G_-}$.** Since that time a lot of results have appeared for one of the cases studied also by M. Protter: only in hyperbolic-parabolic type of domains. Now, it is well known that in the hyperbolic part G_- of the domain for the infinite number of smooth functions in the right-hand side these problems do not have a classical solution (i.e. the co-kernel of the Protter Problem has infinite dimension).

Definitely, the Problem in G_- is ill-posed. Together with this fact, there appeared a lot of exact results for existing of singular generalized solution even with exponential growth at the singularity point (see for example [1]).

Let mention also that from another side, using Friedrichs' theory of symmetric positive operators, we have found and investigated another non-local problem in G_- which is a regularizer (in some sense), of these ill-posed problems (see [2]).

2. **Hyperbolic-Elliptic domain G**. In the hyperbolic-elliptic case of the really mixed type domain the situation is quite different. Up to now there is no one classical or generalized nontrivial solution found of the Protter Problem in G! According to this fact we see so big difference with the infinite number of such solutions in the case of hyperbolic-parabolic domain G_-, described above.

Actually, in the case of hyperbolic-elliptic domain G, we have found and investigated a non-local problem which is a regularizer, analogous to the results in [2]. Let mention also that the nonlocal connections and data in this case are only in the elliptic part of the domain G.

This is a work in progress with my coauthor Barbara Keyfitz, Professor of Mathematics at Ohio State University.

References

1. Popivanov, N., Popov, T. and Witt, I. Solutions with Exponential Singularity for (3+1)-D Protter Problems //Journal of Hyperbolic Differential Equations. 2023. Vol. 20, №. 02, P. 475 – 498.

2. Edmunds D.E. and Popivanov N. , A nonlocal regularization of some over-determined boundary value problems. I. // SIAM J. Math. Anal. 1998. Vol. 29 , №. 1, P. 85 – 105.

Initial Boundary Value Problem For Degenerate Beam Equation

Azizov M.S.[1], **Kamolova Z.D.**[2]

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
zulayxok34@gmail.com
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
muzaffar.azizov.1988@mail.ru;

In a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation:

$$u_{tt} - [x^{\alpha} u_{xx}]_{xx} = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is the unknown function, α, T are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1$, $T > 0$.

Problem A. Find a function $u(x,t)$ satisfying the following conditions:

1) $u(x,t) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\quad [x^{\alpha} u_{xx}]$, $[x^{\alpha} u_{xx}]_x \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\quad u_{tt}(x,t)$, $[x^{\alpha} u_{xx}]_{xx} \in C(\Omega)$;

2) It satisfies equation (1) in the domain Ω;

3) It satisfies the following initial and boundary conditions:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1];$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

where $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2$ are given continuous functions.

Theorem 1. Let $\varphi_1(x) \in C^1[0,1]$, $[x^\alpha \varphi''_1] \in C^3[0,1]$, $[x^\alpha \varphi''_1]'''' \in L_2(0,1)$ and $\varphi_2(x) \in C^1[0,1]$, $[x^\alpha \varphi''_2] \in C^1[0,1]$, $[x^\alpha \varphi''_2]'' \in L_2(0,1)$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$, $\varphi'_1(0) = \varphi'_1(1) = 0$, $\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0$, $\varphi'_2(0) = \varphi'_2(1) = 0$. Then the solution to the problem A is unique, exists, and is given by the following formula:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} \vartheta_n(x) \cos(\lambda_n t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{2n} \frac{\vartheta_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\lambda_n t)$$

where $\vartheta_n(x)$ and λ_n are the eigenfunctions and eigenvalues of the problem

$$[x^\alpha \vartheta''(x)]'' = \lambda \vartheta(x)$$

with the boundary conditions

$$\vartheta(0) = 0,\ \vartheta(1) = 0,\ \vartheta'(0) = 0,\ \vartheta'(1) = 0.$$

This thesis is based on references [1] and [2].

References

1. Аманов Дж. Краевая задача для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Известия вузов. Математика. 2014. №12. – С. 3–8.

2. Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвчртого порядка, вырождающегося на границе области // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1968. №5. – С. 35–39.

Regularization Of The Boundary Value Problem For An Inhomogeneous High-Order Parabolic Equation With One Degeneracy Line

Khajiev I. O.[1], **Shobdarov E. B.**[2]

[1]National University of Uzbekistan, Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;

[1]kh.ikrom04@gmail.com

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

[2]e.b.shobdarov@gmail.com

In this research work, the initial-boundary value problem for the high-order inhomogeneous parabolic equation that changes direction is studied.

Let $Q_T = \{(x,y,t) : (x,y) \in \Omega, 0 < t < T\}$, $\Omega = \{(x,y) : |x| < l,\ 0 < y < d\}$.

We consider the differential equation

$$u_t + k(x) u_{xx} + \partial_y^{2n} u + cu = f(x,y,t) \tag{1}$$

in a domain $Q_T \cap \{x \neq 0\}$, where $k(x) = \begin{cases} \alpha, & x > 0 \\ -\beta, & x < 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, c are given real numbers and $f(x,y,t)$ is a sufficiently smooth, source function, $n \in N$.

Statement of the problem. Find a function $u(x,y,t)$ in the domain $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ satisfying the equation (1), initial

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

boundary

$$\begin{cases} u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0,\ 0 \le y \le d,\ 0 \le t \le T, \\ \left.\dfrac{\partial^{2j} u}{\partial y^{2j}}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial^{2j} u}{\partial y^{2j}}\right|_{y=d} = 0,\ j = 0,1,\ldots,(n-1),\ -l \le x \le l,\ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{3}$$

and gluing

$$\begin{cases} u(-0,y,t) = u(+0,y,t), \\ u_x(-0,y,t)\,\beta(0) = -u_x(+0,y,t)\,\alpha(0), \end{cases} \quad 0 \le y \le d, \quad 0 \le t \le T \tag{4}$$

conditions, where $\varphi(x,y)$ is sufficiently smooth function.

The problem under consideration (1) - (4) is an ill-posed problem in the sense of J. Hadamard, and the solution of this problem does not depend continuously on the initial data. According to Tikhonov's theory, the conditional correctness of the problem (1)-(4) is studied. The uniqueness and conditional stability theorems of the solution are proved, and a regularized approximate solution is built on the determined set of correctness.

References

1. Fayazov K.S., Khajiev I.O. The ill-posed boundary value problem for a high-order differential equation with the degeneration line. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2022. 2(39). P. 122-129.

2. Khajiev I.O. Conditional stability of a boundary value problem for a system of high-order mixed-type equations. Scientific Bulletin of the SamSU. 2022. №. 1. P. 60-67.

3. Pyatkov S.G. Properties of eigenfunctions of a spectral problem and their applications, in: Well-Posed Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Novosibirsk 1984. P. 115-130.

Solution of multilayer problems for the heat conductivity equation by the Fourier method

Koilyshov U. K.[1,2], **Beisenbayeva K. A.**[3]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
koylyshov@math.kz
[3] Academy of Logistics and Transport, Almaty, Kazakhstan
beisenbaeva56@mail.ru

In works [1-2] boundary value problems of the Sturm type for the heat equation with discontinuous coefficients are considered in the case of one discontinuity point. This work is devoted to the substantiation of the Fourier method for solving multilayer diffusion problems. Mathematical models of diffusion in layered materials arise in many industrial,

environmental, biological, medical applications and the theory of thermal conductivity of composite materials.

Let us consider an initial-boundary value problem for the heat conduction equation with a discontinuous coefficient

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = k_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \tag{1}$$

in domain $\Omega = \cup\Omega_j, \Omega_j = \{(x,t) : l_{j-1} < x < l_j, 0 < t < T\}$, where $(j = 1,\ 2, ...,\ m)$, with initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), l_0 \le x \le l_m \tag{2}$$

boundary conditions of the form

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial u_1(l_0,t)}{\partial x} + \beta_1 u_1(l_0,t) = 0, \\ \alpha_2 \frac{\partial u_m(l_m,t)}{\partial x} + \beta_2 u_m(l_m,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

and pairing conditions

$$\begin{cases} u_j(l_J - 0, t) = \ u_{j+1}(l_j + 0, t),\ 0 \le t \le T. \\ k_j \frac{\partial u_j(l_j-0,t)}{\partial x} = \ k_{j+1}\ \frac{\partial u_{j+1}(l_j+0,t)}{\partial x},\ 0 \le t \le T,\ (j = 1,\ 2, ...,\ m-1). \end{cases} \tag{4}$$

where coefficients $k_j > 0,\ (j = 1, 2, ..., m), \alpha_i, \beta_i, (i = 1, 2)$ are real numbers, additionally, $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0,$ (i=1,2).

The following theorem holds.

Theorem. Let $\varphi(x)$ be a twice continuously differentiable function satisfying boundary conditions

$$\alpha_1\varphi'(l_0) + \beta_1\varphi(l_0) = 0,\ \alpha_2\varphi'(l_m) + \beta_2\varphi(l_m) = 0,$$

and conjugation conditions

$$\varphi(l_j - 0) = \ \varphi(l_j + 0),\quad k_j\varphi'(l_j - 0) = \ k_{j+1}\varphi'(l_j + 0),\ (j = 1,\ 2, ...,\ m-1).$$

Then the function

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

where the coefficients φ_n are determined by the formula

$$\varphi_n = \int_{l_0}^{l_m} \varphi(x) X_n(x) dx$$

then there is a unique classical solution to the problem (1)-(4), where

$$X_n(x) = C_n \begin{cases} F(\lambda_n, \frac{x-l_0}{k_1}),\ l_0 < x < l_1, \\ F(\lambda_n, s_1 + \frac{x-l_1}{k_2}),\ l_1 < x < l_2, \\ F(\lambda_n, s_2 + \frac{x-l_2}{k_3}),\ l_2 < x < l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\lambda_n, s_{m-2} + \frac{x-l_{m-2}}{k_{m-1}}),\ l_{m-2} < x < l_{m-1}, \\ F(\lambda_n, s_{m-1} + \frac{x-l_{m-1}}{k_m}),\ l_{m-1} < x < l_m, \end{cases}$$

$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{l_j - l_{j-1}}{k_j}$, $F(\lambda_n, x) = \alpha_1 cos(\sqrt{\lambda_n}x) - \beta_1 \frac{k_1}{\sqrt{\lambda_n}} sin(\sqrt{\lambda_n}x)$, $C_n = (\int_{l_0}^{l_m} X_n^2(x)dx)^{-\frac{1}{2}}$,

λ_n - the roots of the following characteristic equation:

$$\alpha_1\alpha_2\lambda_n sin(s_m\sqrt{\lambda_n}x) - (\alpha_1\beta_2 k_m - \alpha_2\beta_1 k_1)\sqrt{\lambda_n} cos(s_m\sqrt{\lambda_n}) + \beta_1\beta_2 k_1 k_2 sin(s_m\sqrt{\lambda_n}) = 0$$

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant №. BR20281002)

References

1. M.A.Sadybekov, U.K.Koilyshov. Two-phase tasks of thermal conductivity with boundary conditions of the Sturm type. Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Abstract book of the conference ICAAM, Antalya, Turkey, 2022.

2. Koilyshov U.K., Sadybekov M.A. Two-phase heat conduction problems with Sturm-type boundary conditions. Boundary Value Problems. (2024:149).

Cauchy problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind with the two lines and identical order of degeneracy

N.J. Komilova

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; nigora.komilova@bk.ru

In scientific literature, degenerate hyperbolic equations are usually divided into equations of the first and second kind. In the case of an equation of the first kind, the line of parabolic degeneracy is the locus of cusps of the equation's characteristics, and in the case of an equation of the second kind, it is simultaneously a special line (characteristic), i.e., it is the envelope of the family of characteristics. Therefore, degenerate hyperbolic equations of the second kind have been studied relatively little in all respects than equations of the first kind.

At present, a solution to the Cauchy problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind with two lines and different orders of degeneracy is known. Further studies have shown that if a hyperbolic equation of the second kind degenerates with identical order in two lines, then special studies are required to solve the Cauchy problem.

In this report, using the Gauss hypergeometric function, new properties of the Riemann function are established for the named equation, due to which the unique regular solution to the Cauchy problem for a hyperbolic equation of the second kind with the identical order of degeneracy is constructed explicitly.

Karol [1], considering a model equation of the second kind with one line of degeneracy

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \;\; y > 0, \;\; -1 < m < 0,$$

proved the correctness of the Cauchy problem in the ordinary statement. In a recent paper [2], for a hyperbolic equation of the second kind with two lines and different orders of degeneration

$$y^m u_{xx} - x^n u_{yy} = 0, \;\; x > 0, \; y > 0, \;\; -1 < m < n \leq 0,$$

the Cauchy problem is solved only under the condition $m \neq n$.

Consider the following degenerating hyperbolic equation of second kind with the same order of degeneration

$$y^m U_{xx} - x^m U_{yy} = 0, \ \ -1 < m < 0 \tag{1}$$

in a finite simply connected domain D, bounded by characteristics

$$AB : y = 0, \ \ AC : x - y = 0, \ \ BC : x^{(m+2)/2} + y^{(m+2)/2} = 1$$

of equation (1) for $x \geq 0$ and $y \geq 0$, where $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C\left((1/2)^{2/(m+2)}, (1/2)^{2/(m+2)}\right)$.

Cauchy problem. Find a function $u(x,y) \in C^2(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$ satisfying equation (1) and the following initial-value conditions

$$U(x,y)|_{y=0} = \tau(x), \ \ 0 \leq x \leq 1, \ \ \left.\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \ \ 0 < x < 1, \tag{2}$$

where $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are sufficiently smooth given functions.

It is known, that with the help of a non-singular change of variables

$$\xi = x^{(m+2)/2} - y^{(m+2)/2}, \eta = x^{(m+2)/2} + y^{(m+2)/2},$$

the equation (1) is transformed into the generalized Euler-Poisson-Darboux equation with the identical negative parameters

$$u_{\xi\eta} + \frac{p}{\eta+\xi}\left(u_\xi + u_\eta\right) + \frac{p}{\eta-\xi}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0, \quad p = \frac{m}{2(m+2)}, \ \ -\frac{1}{2} < p < 0, \tag{3}$$

where

$$u(\xi,\eta) = U\left[\left((\eta+\xi)/2\right)^{1-2p}, \ \left((\eta-\xi)/2\right)^{1-2p}\right].$$

The Riemann function for equation (3) is known [3]

$$R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right) = \frac{\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2p}}{\left(\eta^2-\xi_0^2\right)^p\left(\eta_0^2-\xi^2\right)^p} F\left(p,p;1;\sigma\right), \sigma = \frac{\left(\eta^2-\eta_0^2\right)\left(\xi^2-\xi_0^2\right)}{\left(\eta^2-\xi_0^2\right)\left(\xi^2-\eta_0^2\right)},$$

where $F(a,b;c;z)$ is a Gaussian hypergeometric function.

To solve the Cauchy problem, we apply the well-known Riemann method. Using an important property for the Gauss hypergeometric function

$$d\left[\frac{F\left(-p,-p;1;\sigma\right)}{\left[\left(\eta^2-\xi_0^2\right)\left(\eta_0^2-\xi^2\right)\right]^{-p}}\right] = p(1-p)\frac{\left(\eta-\xi\right)\left(\eta_0^2-\xi_0^2\right)^p}{\left(\eta^2-\xi^2\right)^{1-p}}\left(1-\sigma\right)^{1+p} F\left(1+p,p;2;\sigma\right)$$

$$+\frac{p(1+p)\left(\eta+\xi\right)\left(\eta_0^2+\xi_0^2-2\eta\xi\right)}{\left[\left(\eta^2-\xi_0^2\right)\left(\eta_0^2-\xi^2\right)\right]^{1-p}} F\left(1-p,-p;2;\sigma\right),$$

we obtain the solution to the Cauchy problem in explicit form.

Theorem. If $\tau(x) \in C^3[0,1]$ and $\nu(x) \in C^2[0,1]$, then the function

$$U\left(x,y\right) = k_1 \int_0^1 \frac{\tau\left(s^{1-2p}\right)dt}{t^{-p}(1-t)^{-p}} - \frac{k_1}{(1+2p)}\left(xy\right)^{(m+2)/2} \int_0^1 \frac{\tau'\left(s^{1-2p}\right)(1-2t)dt}{st^{-p}(1-t)^{-p}}$$

$$+k_2 xy \int_0^1 \frac{t^{-p}(1-t)^{-p}\nu\left(s^{1-2p}\right)dt}{s^{1-2p}}, \quad 1-2p=\frac{2}{m+2}, \tag{4}$$

where

$$k_1=\frac{\Gamma(2+2p)}{\Gamma^2(1+p)}, k_2=\frac{\Gamma(2-2p)}{\Gamma^2(1-p)}, s^2=x^{m+2}+y^{m+2}+2(2t-1)(xy)^{(m+2)/2}, \ -1<2p<0.$$

is a twice continuously differentiable, moreover, unique, solution of the Cauchy problem for the equation (1) with initial data (2) in D.

Proof. The uniqueness of the solution of the stated problem follows from the very method of obtaining the formula (4). The validity of the other assertions of the theorem can be verified by direct calculation.

References

1. Karol I.L. On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1953, 88(2), p. 197 – 200.

2. Ergashev T.G., Komilova N.J., The Kampé de Fériet series and the regular solution of the Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of the second kind. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(11), p. 3112 – 3124.

3. Copson E.T. On the Riemann–Green function. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1957, 1(1), p. 324 – 348.

Some Oscillation Conditions For Half-Linear Second Order Differential Equations

Kuliev K.[1], **Kulieva G.**[2]

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
[1] komilkuliev@gmail.com, [2] kulievagt@gmail.com

Let $p>1$ be a real number and $(a,b)\subseteq(-\infty,\infty)$ be an interval. Let us consider the following half-linear second order differential equation

$$\left(\rho(t)\varphi_p(u'(t))\right)'-\sigma(t)\varphi_p(u(t))=0, \qquad t\in(a,b), \tag{1}$$

where $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$ for $s\neq 0$ and $\varphi_p(0)=0$. For the functions $\rho=\rho(t)$ and $\sigma=\sigma(t)$ we assume continuity and positivity on (a,b).

By a *solution* of (1) we understand a function $u\in C^1(a,b)$ such that $\rho\varphi_p(u')\in C^1(a,b)$, the equation holds at every point.

A solution $u=u(t)$ of the equation in (1) is called nonoscillatory solution, if there exist $\bar{a},\bar{b}\in(a,b)$ such that $u(t)\neq 0$ for all $t\in(a,\bar{a})\cup(\bar{b},b)$. Otherwise, a solution is called oscillatory solution. The equation in (1) is called nonoscillatory, if every its solution is nonoscillatory.

Let us denote

$$A_1(s) := \left(\int_s^d \rho^{1-p'}(t)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^s \sigma(t)dt\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$A_2(s) := \left(\int_c^s \rho^{1-p'}(t)\left(\int_c^t \sigma(x)dx\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'p}} \left(\int_s^d \rho^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{(p')^2}};$$

$$A_3(s) := \left(\int_c^s \rho^{1-p'}(t)\left(\int_c^t \sigma(x)dx\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^s \sigma(x)dx\right)^{-\frac{1}{p'}};$$

$$A_4(s) := \left(\int_s^d \sigma(t)\left(\int_t^d \rho^{1-p'}(x)dx\right)^{p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_s^d \rho^{1-p'}(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}};$$

$$A_5(s) := \left(\int_s^d \sigma(t)\left(\int_t^d \rho^{1-p'}(x)dx\right)^{p} dt\right)^{\frac{1}{pp'}} \left(\int_c^s \sigma(t)dt\right)^{\frac{1}{p^2}}.$$

Our result reads:

Theorem. *Suppose that* $\int_c^b \rho^{1-p'}(t)dt < \infty$. *If for some* $i = 2, 3, 4, 5$ *the following estimate*

$$\lim_{c\to b-} A_{1,i}(c,b) \geq 1 \quad \left(\lim_{c\to a+} A_{1,i}(a,c) \geq 1\right)$$

holds then differential equation (1) is oscillatory at $t = b$ $(t = a)$, *where*

$$A_{1,2}(c,d) := \sup_{s\in(c,d)} \left[A_1^{p'p}(s) + pA_2^{p'p}(s)\right]^{\frac{1}{p'p}}, \quad A_{1,3}(c,d) := \sup_{s\in(c,d)} \left[A_1^{p'}(s) + A_3^{p'}(s)\right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_{1,4}(c,d) := \sup_{s\in(c,d)} \left[A_1^{p}(s) + A_4^{p}(s)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad A_{1,5}(c,d) := \sup_{s\in(c,d)} \left[A_1^{p'p}(s) + p'A_5^{p'p}(s)\right]^{\frac{1}{p'p}}.$$

References

1. P. Drábek and A. Kufner, *Discretness and simplicity of the spectrum of a quasilinear Sturm–Liouville–type problem on an infinite interval*, Proc. Amer. Math. Soc. 134, №1 (2006), 235-242.

2. P. Drábek and K. Kuliev, *Half–linear Sturm–Liouville problem with weights*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 19, №1 (2012), 107-119.

3. O. Došlý and P. Řehák: *Half-Linear Differential equations*, Elsevier, Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San Diego – San Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo, 2005.

4. O. Došlý, *Method of oscillation theory of half-linear second order differential equations*, Czech. Math. Jour., 50(125), 2000.

5. A. Kufner, L. Maligranda and L.-E. Persson, *The Hardy Inequality - About its History and Some Related Results,* Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, 2007.

6. R. Oinarov, S.Y. Rakhimova, *Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2010 (49) (2010) 1-15.

Analogue Of The Sturm-Liouville Equation And An Effective Approach To The Inverse Problem

Makovetsky V. I.
Sakhalin State University,
Yuzhno-Sakhalinsk, Russia.
Makov-Viktor-Sakh@yandex.ru

A specialized range of problems in mathematical physics, especially those related to identifying the characteristics of the earth's environment based on the response on the surface in seismic, electrical or gravity exploration, leads to the problem of finding the coefficient $\sigma(z)$ of the operator

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{\sigma(z)}\frac{d}{dz}\left(\sigma(z)\frac{du(z,\omega)}{dz}\right) \tag{1}$$

in the task

$$\mathcal{L}u = \omega^2 u(z,\omega); \quad z \in (0;\infty);$$

according to additional data (Alimov, 1976). By traditional replacement of the function, the presented relationship is reduced to the Sturm-Liouville equation

$$-\frac{d^2\chi(z,\omega)}{dz^2} + q(z)\chi(z,\omega) = \omega^2\chi(z,\omega);$$

The coefficient $q(z)$ in the inverse problem is determined by means of the procedure recommended in the classical work (Gelfand, Levitan, 1951). Namely, the direct and inverse integral transformation operators with kernels $K(z,t)$ and $L(z,t)$ are introduced, respectively.

$$\chi(z,\omega) = \cos(\omega z) + \int_0^z K(z,t)\cos(\omega t)dt;$$

$$\cos(\omega z) = \chi(z,\omega) + \int_0^z L(z,t)\chi(\omega,t)dt;$$

For the Sturm-Liouville equation, by analogy with the generally accepted Fourier cosine transform, a pair of mutually inverse isometric mappings is introduced

$$F_C(\omega) = \int_0^\infty f(z)\chi(z,\omega)dz; \quad f(z) = \int_{-\infty}^\infty F_C(\omega)\chi(z,\omega)d\rho(\omega);$$

where $\rho(\omega)$ is the "spectral function" . Another name, "spectral measure (density)" means not only a change in terminology, but also a view of the integral as a representative of a linear functional, which is practiced in both physical and mathematical literature. A similar interpretation applies to the subsequent presentation. The spectral measure generates the "transition (evolution) function" of the system

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(\omega z)}{\omega^2}d\rho(\omega)$$

It is easy to see that (Marchenko, 1972, ch. 2)

$$L(z,0)=\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega z)d\left[\rho(\omega)-\frac{2}{\pi}\omega\theta(\omega)\right];$$

where $\theta(z)$ is the Heaviside step function. The inverse problem consists of finding $L(z,0)$ from the spectral density $\rho(\omega)$, solving the Gelfand-Levitan equation

$$f(z,y)+K(z,y)+\int\limits_0^z K(z,t)f(t,y)dt=0;$$

$$f(z,y)=\frac{1}{2}\{L(z+y,0)+L(|z-y|,0\}=\frac{1}{2}\{\Phi''(z+y)+\Phi''(|z-y|)\}$$

and restoration $q(z)=2K'(z,z)$.

In this note, the equations of work (Krein, 1954), directly applicable to the relation (1), are derived from the practice of Gelfand - Levitan, given above. For this, the technique (Blagoveshchensky, 1971) is used. Let us consider the non-stationary problem

$$\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial t^2}=\mathcal{L}u(z,t);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x\to 0}=\delta'(t);\quad u|_{x\to 0}=-\Phi'(t);\quad x>0;\quad t>0;$$

The appearance of derivatives in the boundary conditions is associated with the peculiarity of a one-dimensional string, which gives a Heaviside function as a response to the input delta impulse. Increasing the order of the derivative in (Blagoveshchenskii, 1971) leads to a parametric integral equation (Krein, 1954)

$$2\Phi'(0)Q(z,t)+\int\limits_{-z}^{z}\Phi''(|t-s|Q(x,s)ds=1;\quad \sigma(z)=\left(\int\limits_{-z}^{z}Q(z,s)ds\right)^2;$$

We have explored the option ($I_0(\circ)$ - modified Bessel functions of order 0)

$$Q(z,s)=\frac{1}{2}I_0(\Omega\sqrt{z^2-s^2});\quad \sigma(z)=\cosh^2(\Omega z);$$

not included in the list of examples of work (Krein, 1954)

Refrences

1. Alimov Sh. A. On the works of A.N. Tikhonov on inverse Sturm–Liouville problems, UMN, 1976, Vol. 31, issue 6, pp. 84–88.

2. Gelfand I. M., Levitan B. M., On the definition of a differential equation by its spectral function, Izvestiya AN SSSR. Ser. mathem., 1951, vol. 15, issue. 4, pp. 309–360.

3. Marchenko V. A. Sturm - Liouville Operators and Applications, Birkhauser Verlag 1986, 367 pp.

4. Krein M. G. On one method of effective solution of the inverse boundary value problem. DAN SSSR. 1954. Vol. 94, №6, Selected Works Vol III, 1996

5. Blagoveshchenskii A.S. On a local method for solving a non-stationary inverse problem for an inhomogeneous string. Proceedings of the Steklov Mathematical Institute, 1971, CXV, pp. 28 – 38

Optimal Pursuit Differential Game Problem with Integral Constraints in Hilbert Space l_2

Muxammadjonov A.A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com

This work aims to investigate an optimal pursuit differential game for an infinite system of n-ary differential equations in Hilbert space l_2. The integral constraints are imposed on the players' controls. The equation for optimal pursuit time in this game problem is found. Let the controlled objects' trajectories be given by the following equations in Hilbert space l_2:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_{ij} = -\lambda_j x_{ij} + x_{i+1,j} + \omega_{ij}, & 1 \le i \le n-1, \\ \dot{x}_{nj} = -\lambda_j x_{nj} + \omega_{nj}, & \\ x_{ij}(0) = x_{ij0}, & 1 \le i \le n, j = 1, 2, \ldots. \end{array} \tag{1}$$

Where $\omega_{ij}, i = \overline{1,n}, j = 1, 2, \ldots$, are control parameters, $\lambda_j \ge 0$ are given real numbers.

Let

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots), \eta_j(t) = (x_{1j}(t), x_{2j}(t), \ldots, x_{nj}(t)), |\eta_j(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2(t)}.$$

Definition. The function $\omega : [0, T] \to l_2$,

$$\omega(\cdot) = (\omega_{1j}(\cdot), \omega_{2j}(\cdot), \ldots, \omega_{nj}(\cdot), \ldots),$$

is called an admissible control if its coordinates $\omega_{ij}(t), 0 \le t \le T, i = \overline{1,n}, j = 1, 2, \ldots$, are measurable and satisfy the following integral constraint

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^2(s) ds \le \mu^2,$$

where T is a sufficiently large number and μ is a given positive real number.

Let, for $j = 1, 2, \ldots$,

$$W_j(t) = \int_0^t e^{-sA_i} e^{-sA_i^*} ds,$$

where

$$A_j = \begin{bmatrix} -\lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_j \end{bmatrix}$$

and A_j^* is the transpose of the matrix A_j. Theorem. The equation $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_{j0} W_j^{-1}(t) \eta_{j0}^* = \mu^2$ has a unique root $t = \theta$ and the time θ is the optimal time to tranfer the state of system (1) to the origin of the space l_2.

Refrences

1. Ibragimov G.I. The optimal pursuit problem reduced to an infinite system of differential equation. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 77(5): 470–476.

2. Ibragimov G.I. Optimal pursuit time for a differential game in the Hilbert space l_2. ScienceAsia. 39S: 25–30.

3. Ibragimov G.I., Qo'shaqov X.Sh., Muxammadjonov A.A. Optimal Pursuit Differential Game Problem for an Infinite System of Binary Differential Equations. Lobachevskii Journal of Mathematics. 45(3): 1131–1144.

Nonlocal Boundary Value Problem For Fourth-Order Partial Differential Equations With Double Characteristics

Nishonova Sh. T.[1], **Murodov S. X.**[2],

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shahnozanishonova27@mail.ru
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
sarvarbekmurodov203@gmail.com

Let us denote by D the domain bounded by the lines $OA: y+x=0$, $AB: x-y=1$, $OB: y=0$ in the Oxy-plane.

Consider the fourth-order partial differential equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1}$$

in the domain D, where $u(x,y)$ is the unknown function. It is not difficult to show that the lines $x+y=C_1$ and $x-y=C_2$ are the multiple characteristic curves of equation (1).

The Cauchy problem for equation (1) has been examined in studies [1],[2]. However, nonlocal condition problems for this equation have received relatively little attention. Consequently, this work focuses on investigating a nonlocal boundary value problem for equation (1).

Problem BS_1**.** Find a function $u(x,y)$ belonging to the class $C(\overline{D})\cap C^3(D\cup J)\cap C^4(D)$ that satisfies equation (1) along with the conditions

$$u(x,0)+\alpha\int_0^x u(\xi,0)d\xi=\beta(x),$$

$$u_y(x,0)=\tau_1(x),$$

$$u_{yy}(x,0)=\tau_2(x),$$

$$u_{yyy}(x,0)=\tau_3(x).$$

Here, $\beta(x)$, $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$ and $\tau_3(x)$ are given functions, $\alpha\in\mathbb{R}$, $J=\{(x,y): 0\le x\le 1, y=0\}$.

Theorem. If certain conditions $\tau_i(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1), i=1,2,3$ and $\beta(x)\in C^4[0,1]\cap C^5(0,1)$ hold, then the solution to Problem BS_1 exists and is unique.

References

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000.

2. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи – Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. – Фергана: изд. Фергана, 2021.

On The Regularization Method For The Cauchy Problem For The Laplace Equation In The Stripe

Nuratdinov K.D.[1], Jumaniyazova G.[2]

Tashkent State Technical university named after I.A. Karimov, Tashkent, Uzbekistan[1] ; National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan[2]
e - mail kazbeknur11@gmail.com[1]

Consider the process of heating in the following stripe

$$\Omega \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<h,\; x\in\mathbb{R}\}.$$

At the lower base of the stripe, the given temperature is maintained and there is no heat flow. We need to find the temperature at the top base of the stripe.

The process of heating is described by equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;+\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\;,\quad x\in\mathbb{R},\quad 0<y<h, t\geq 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u(x,0,t)=\phi(x,t),\quad \frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t\geq 0. \tag{2}$$

It is necessary to find the temperature $u(x,y,t)$ on the top base $z=h$.

Note that in general case it is necessary to add to boundary conditions (1)-(2) the initial condition. We are looking for a stationary solution, i. e. a time-independent solution $u=u(x,y)$. In this case equation (1) takes the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;+\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\;=\;0,\quad x\in\mathbb{R},\quad 0<y<h. \tag{3}$$

with boundary conditions

$$u(x,0)=\phi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}\;=\;0,\quad -\infty<x<\infty. \tag{4}$$

Let us denote by the symbol $D(\Omega)$ the class of functions infinitely differentiable on the stripe Ω and vanishing near the upper base $y=h$.

Definition 1. *Let $\phi\in L_2(\mathbb{R})$. We say that the function $u(x,y)$ from $L_2(\Omega)$ is a solution to the problem (3)-(4) if for any function $v\in D(\Omega)$ the following equation*

$$\int\limits_S u(x,y)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)dx\,dy\;=\;\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(x)\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)dx \tag{5}$$

is valid.

Proposition 1. *If the problem (3)-(4) has a solution, then this solution is unique.* Solution will be as follows

$$u(x,y) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}\cosh|s|y\; e^{isx}\; ds. \tag{6}$$

It is clear that this solution exists only when the function $\widehat{\phi}$ tends to zero exponentially.

Consider the auxiliary equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;+\; \alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \;0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < h, \tag{7}$$

with the same boundary values (4).

The functionts is $\widehat{u}(s,y) = \widehat{\phi}(s)\cos\mu_s y$ and required solution is

$$u_\alpha(x,y) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(s)\cos\mu_s y\; e^{isx}\; ds, \tag{8}$$

where

$$\mu_s \;=\; \mu_s(\alpha) \;=\; \sqrt{\alpha s^4 - s^2}.$$

Assume that the boundary value is measured with some error $\delta > 0$. It means that instead ϕ we have the function ϕ_δ such that

$$\|\phi(x) - \phi_\delta(x)\|_{L_2(\mathbb{R})} \;\le\; \delta. \tag{9}$$

Let $u_{\delta,\alpha}(x,y)$ be a solution to the equation (3) with boundary condition

$$u_{\delta,\alpha}(x,0) \;=\; \phi_\delta(x). \tag{10}$$

Theorem 1. *Assume that the function $\psi(x) = u(x,h)$ exists and belongs to $L_2(\mathbb{R})$. Set*

$$\alpha \;=\; \alpha(\delta) \;=\; \frac{\lambda^2}{\ln^2\delta}, \quad 0 < \delta < 1, \tag{11}$$

where $\lambda > h$.

Then

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|u_{\delta,\alpha}(x,h) - \psi(x)\| \;=\; 0. \tag{12}$$

Refrences

1. Tikhonov A.N., Samarsky A.A., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1966.

2. Kabanikhin S. I. (2012), Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55.

3. Alimov Sh.A., Qudaybergenov A.K. On the Cauchy Problem for Laplace Equation// Uzbek Mathematical Journal. 2023. Volume 67, Issue 2, pp.5-16.

An Initial Boundary Value Problem For A Loaded Heat Equation

Azizov M. S.[1], **Orifjonova Q. M.**[2]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
muzaffar.azizov.1988@mail.ru1
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
orifjonovaq@gmail.com

In a rectangle $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation:

$$Lu \equiv u_t - a^2 u_{xx} = u_t\,(x, t_0)\,, \tag{1}$$

where l and T are given positive real numbers, $u = u\,(x,t)$ is the unknown function, $t_0 \in (0,T]$. We investigate the following problem for equation (1) in the domain Ω:

Problem *A.* *Find a function $u(x,t)$ satisfying the following conditions:*
1. $u\,(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{2,1}_{x,t}\,(\Omega)$;
2. It satisfies equation (1) in the domain Ω;
3. It satisfies the following initial and boundary conditions:

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, \qquad 0 \le x \le l; \quad u\,(0,t) = 0, \quad u\,(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

where $\varphi\,(x)$ is given sufficiently smooth.

Theorem 1. *Let $\varphi(x) \in C^2\,[0,l] \cap C^3(0,l)$, $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,l)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi''(l) = 0$. Then the solution to the problem A is unique, exists, and is given by the following formula:*

$$u(x,t) = \left[a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} + \left(e^{-a^2\lambda_n^2 t} - 1\right)\frac{a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t_0}}{e^{-a^2\lambda_n^2 t_0} - 1}\right] X_n(x), \quad n = 1, 2, ...,$$

where $X_n(x)$ and λ_n are the eigenfunctions and eigenvalues of the problem, a_n is Fourier coefficient,

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx, \quad n \in N.$$

References

1. Nakhushev A. M. and Borisov V. N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of ground water level // Differ. Uravn. 1977. Vol. 13, 105–110.

2. Islomov B. and Kuryazov D. M. About one boundary problem for a loaded second order equations // Dokl. AN Resp. Uzb.,1996 №. 1, pp. 3–6.

3. Urinov A.K.and Azizov M.S. Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, Vol. 42, №3, pp. 621–631.

4. Azizov M.S. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020, Vol. 41, №6, pp. 1043–1050.

Carleman's Formula For A Two-Dimensional Gravitational Field In A Bounded Domain

Sattorov E. N.[1], **Pulatov O. U.**[2]

[1]Uzbek-Finnish Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan,
sattorov-e@rambler.ru;

[2]Uzbek-Finnish Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan,
oybekpulatov1987@gmail.com

The Cauchy integral theorem and Cauchy-type integrals are of significant importance to 2-D potential field theory, as they are used to describe analytical continuation of potential fields, establish the location of their singular points, and study non-single-valued solutions of their inverse problems. It was shown in the works of M.S.Zhdanov [1]-[5] that logarithmic potential theory can be extended to the 3-D case by constructing Cauchy-type integral analogues for 3-D potential fields, based on ideas originally introduced by Moisil, Teodoresko [6] are Bitsadze [7]-[8]. They are used in the analytical continuation of fields, in finding the location and properties of their singular points and in determining the uniqueness of the solution of the inverse problem. This approach has been developed in detail by V.N. Strakhov, G.M. Voskoboinikov, G.Ya. Golizdra , A.V. Tsirulskiy and many others.

A technique of vector Cauchy integral analogs has been developed for three-dimensional potential fields which extends the basic principles of the classical theory of Cauchy integrals to three-dimensional cases. Cauchy type integrals play an exceptionally important part in the theory of logarithmic potential or in the theory of analytic functions. They are used in the analytical continuation of fields, in finding the location and properties of their singular points and in determining the uniqueness of the solution of the inverse problem. This approach has been developed in detail by V.N. Strakhov, G.M. Voskoboinikov, G.Ya. Golizdra , A.V. Tsirulskiy and many others.

The importance and the need for generalizing the results of the theory of functions complex variable of two-dimensional theory to three-dimensional case are quite evident. These problems were investigated first by V.N. Strakhov 1970 y., 1974 y., who also studied an important particular case techniques of the theory of functions of a complex of axisymmetric problem (Strakhov, 1976). In the papers (M.S.Zhdanov, 1973-1976 y.) it has been shown that several results of the logarithmic potential theory can be extended to three-dimensional case, using certain analogs of the Cauchy type integrals for the three-dimensional fields which are the modifications of the integrals introduced by Moisil, Teodoresko are Bitsadze (1953, 1972 y.)

In 1952 y. I.I.Privalov and V.V.Golubev found the necessary and sufficient conditions for the Cauchy type integral to transform into the Cauchy integral. Developing the ideas of I.I.Privalov and V.V.Golubev, E.D. Solomentzev (1966 y.) consider the problem on transformation of the Green formula for the Laplace equation.In the paper, with the use of the formulas Green type integral and an expansion of the fundamental solution to the Laplace equation into a series by spherical functions, he gives necessary and sufficient conditions for transformation of the Green type integral into the integral Green formula.

The importance and the need for generalizing the results of the theory of functions complex variable of two-dimensional theory to three-dimensional case are quite evident. These problems were investigated first by V.N. Strakhov, who also studied an important particular case techniques of the theory of functions of a complex of axisymmetric problem.

The gravity field $\overrightarrow{g(y)}$ satisfies the equations:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{g} = -4\pi G\rho_0, \nabla \times \overrightarrow{g} = 0 \tag{1}$$

where G is the universal gravitational constant. Following Zhdanov [5], we introduce the auxiliary vector field, $\overrightarrow{F}$, which has the form:

$$\overrightarrow{F} = \frac{4\pi}{3} G\rho_0 y$$

and

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = 4\pi G\rho_0.$$

In the paper, we consider the problem of reconstructing the solution of gravity field in a bounded domain from their values on a piece of the boundary of this domain, i.e. the Cauchy problem. An approximate solution to this problem is constructed, based on the Carleman-Yarmukhamedov function method.

References

1. Zhdanov M.S., Properties of the gravitation of gravitational potential of a three-dimensional homogeneous body // (in Russian)., Geol.Geophys., 1973, 12, P. 96-101.

2. Zhdanov M.S., Theiry of interretation of gravitation anomalies determined by three space coordinates // (in Russian), Izv.Akad.Nauk SSSR Fiz.Zem., 1974,9, P. 32-46.

3. Zhdanov M.S., The gravitational field of a three-dimentional layered medium // (in Russian), Geol.Geophys., 1975, 36, P. 447-458.

4. Zhdanov M.S., Use of Cauchy integral analogs in the geopotential field theory // Annal. Geophys. 1980,v.36, 4 P. 447-458.

5. Zhdanov M.S., Cauchy integral analogs in geophysical field theory (in Russian), 1975, Nauka, Moscow.

6. Moisil G.C., Theodoresco N. Functions holomorphes dans l'espace,// Mathematica, 1931,5, P. 142-153.

7. Bitsadze A.V., Space analog of the Cauchy-type integral and some of its applications // (in Russian), Izv.Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 1953,17, P. 525-538.

8. Bitsadze A.V.,Fundamentals of theory of analutical functions of a complex variable (in Russian),(1990), Nauka, Moscow.

Inverse Source Problem For The Time-Fractional Airy Equation On The Metric Star Graph

Sobirov Z. A.[1], **Rakhimov K. U.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sobirovzar@gmail.com
University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
kamoliddin.ru1@gmail.com

This research focuses on the inverse source problem for the time-fractional Airy equation defined on a metric star graph. The existence and uniqueness of the solution to the direct problem were established by the authors in 2021. The inverse problem is transformed into an operator equation, and the well-posedness and continuity of the associated resolvent operator are analyzed.

In recent years, significant interest has emerged in the investigation of initial and initial-boundary value problems for fractional-order equations. This growing attention is attributed to the fact that fractional calculus offers valuable tools for studying diffusion and dispersion processes across diverse scientific disciplines.

Let we consider the graph with k incoming and m outgoing bonds. In the incoming bonds coordinate is set from $L_j(L_j < 0, j = \overline{1;k})$ to 0 , and on the outgoing bonds the coordinates are set from 0 to $L_i(L_i > 0; i = \overline{k+1;k+m})$. The bonds of the graph are denoted by $b_j; j = \overline{1;k+m}$. On each bond $b_j(j = \overline{1;k+m})$ of the graph, we consider the Airy equation with a fractional derivative

$$\partial_{0t}^{\alpha} u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = g(t)h_j(x,t), \quad 0 < t \le T, x \in b_j, \ j = \overline{1,k+m}, \tag{1}$$

with initial conditions

$$u_j(x,0) = \phi_j(x), \ \ x \in B_j, \ \ j = \overline{1,k+m}. \tag{2}$$

and following gluing conditions

$$\frac{\partial u^+}{\partial x}(0,t) = B\frac{\partial u^-}{\partial x}(0,t), \qquad a_j u_j(0,t) = u_1(0,t), \ \ 0 < t \le T, \ \ j = \overline{2,k+m},$$

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t)|_{x=0} = \sum_{j=k+1}^{k+m} \frac{1}{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t)|_{x=0}, \ \ 0 < t \le T, \tag{3}$$

where, ∂_{0t}^{α} -is the Caputo fractional derivative, $u^- = (u_1, u_2, ..., u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_{k+m})^T$ and B is the matrix of the dimension $m \times k$. In the boundary points we put next boundary conditions

$$u(-L_i, t) = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1,k}, u(L_j, t) = \varphi_j(t), \quad j = \overline{k+1, k+m.} \tag{4}$$

Therefore, we introduce an additional overdetermination conditions in the form

$$\sum_{j=1}^{k+m} \int_{B_j} u_j(x,t)\,\eta_j(x)\,dx = \psi(t), \ \ 0 \le t < T. \tag{5}$$

The problem involves determining the function $g(t)$ that satisfies equation (1) along with the conditions given in (2–5).

Multiplying both sides of equation (1) by $\eta_j(x)$, integrate with respect to B_j, and then sum over the j's we get

$$g(t) = (Bg)(t) + \frac{\partial^{\alpha}_{0,t}\psi(t)}{g*(t)}, \tag{6}$$

where

$$g*(t) = \sum_{j=1}^{k+m} \int_{B_j} \eta_j(x)\, h_j(x,t)\, dx$$

and

$$(Bg)(t) = -\frac{1}{g*(t)} \left\{ \sum_{j=1}^{k+m} \int_{B_j} \eta_{j,xxx}(x)\, u_j(x,t)\, dx \right\}$$

So we get following

Theorem. Let $\min\limits_{0<t\leq T} |g*(t)| = \frac{1}{m_0}$, $\max\limits_{x\in B_j} |\eta_{j,xxx}| = M$ and $\psi(t) \in C[0,T]$. Then the inverse problem has unique solution on the form

$$g(t) = (I-B)^{-1} \frac{\partial^{\alpha}_{0,t}\psi(t)}{g*(t)}.$$

References

1. Sobirov Z.A., Turemuratova A.A. Inverse source problem for the subdiffusion equation with edge-dependent order of time-fractional derivative on the metric star graph. // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 15(5), pp. 586-596.

2. Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M. The time-fractional Airy equation on the metric graph. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2021, 14(3), pp. 376-388.

On A Stefan Problem For A Predator-Prey System With Nonlinear Prey-Taxis

Rasulov M. S.[1], **Norov A. Q.**[2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, rasulovms@bk.ru

[2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, norov9770@gmail.com

The study of mathematical models for predator-prey systems involving two species has garnered growing interest over the last few decades. Analyzing the spatial and temporal dynamics of predators and prey within an ecosystem remains a significant focus in the field of population ecology.

In this work, we study diffusive predator-prey model with a prey-taxis term

$$u_t - d_2 u_{xx} + (u\chi(u)v_x)_x = -au + \frac{buv}{c+u+mv}, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t), \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - vv_x = v(q-v) - \frac{ruv}{c+u+mv}, \quad 0 < t \le T, \quad 0 < x < s(t), \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0), \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$v(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$s'(t) = -\mu v_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

where $u(t,x)$ and $v(t,x)$ represent predator and prey densities, respectively. Constants a, b, c, m, q, r, d_1, d_2, s_0, μ are positive; a is the mortality rate of the predator, which does not depend on the prey density; the function $\frac{rv}{c+u+mv}$ is the Beddington-DeAngelis functional response; and $\frac{b}{r}$ is the conversion rate from prey to predator. $s(t)$ is a moving boundary and the free boundary is caused only by the prey. The initial functions $u_0(x)$ and $v_0(x)$ satisfy

$$u_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]), \quad u_0(x) > 0 \ \text{ in } \ (0,s_0), \ u_0(s_0) = 0, \ u_0'(s_0) = 0.$$

$$v_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]), \quad v_0(x) > 0 \ \text{ in } \ (0,s_0), \ v_0(s_0) = 0, \ v_0'(s_0) = 0.$$

Throughout this work, we assume that

$$\begin{cases} \chi(u) \in C^1([0,\infty)), \ \ \chi(u) = 0 \ \ u \ge u_m \ \text{ and } \ \chi'(u) \ \text{ is Lipschitz continuous,} \\ \text{i.e. } \ |\chi'(u_1) - \chi'(u_2)| \le L|u_1 - u_2| \ \text{ for } \ u_1, u_2 \in [0,\infty). \end{cases}$$

The assumption that $\chi(u) \equiv 0$ for $u \ge u_m$ has a clear biological interpretation, [1, 2] i.e., the predator stops to accumulate at a given point after its density attains a certain threshold value u_m and the prey-tactic cross diffusion $\chi(u)$ vanishes identically when

$u \geq u_m$. The assumption that $\chi'(u)$ is Lipschitz continuous is a regularity requirement for our qualitative analysis.

In this work, a priori estimates of the Schauder type are established. Based on the established estimates, the behavior of the free boundary is studied. The uniqueness theorem and the existence of a solution to problem (1)-(9) are proved.

References

1. Yousefnezhad M., Mohammadi S.A., Bozorgnia F. A. A free boundary problem for a predator-prey model with nonlinear prey-taxis // Appl. Math. 2018. №.63. pp. 125–147.

2. Jianping Wang , Mingxin Wang. The diffusive Beddington-DeAngelis predator-prey model with nonlinear prey-taxis and free boundary // Math. Methods Appl. Sci. 2018 Vol. 41, №. 6. pp. 6741–6762.

Mixed Problem For One-Dimensional Poroelasticity Dynamic System

A.M. Rakhimov

Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;
e-mail: abrorraximov2094@gmail.com

Let us consider the process of wave propagation in a porous medium in a reversible approximation taking into account the mass forces F, described by a one-dimensional inhomogeneous system of equations [2]

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = F_1(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = F_2(x,t), \tag{2}$$

where $\rho_s = \rho_s^f(1-d_0)$ and $\rho_l = \rho_l^f d_0$ are partial densities, ρ_s^f and ρ_l^f are physical densities of elastic porous body and liquid respectively, d_0- porosity,

$$a_{11} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_s} + \left(\rho\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho^2}\right)\rho_s - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho},\ a_{12} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho^2} - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho_s}\right)\frac{\rho_l}{\rho},$$

$$a_{21} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho} - \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho},\ a_{22} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda+2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho},$$

α_3, λ, $\mu-$ elastic parameters of a porous medium [3].

Let the following initial and boundary conditions be given for equations (1), (2):

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

$$u_1(0,t) = g_1(t),\ u_1(l,t) = h_1(t),\ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$u_2(0,t) = g_2(t),\ u_2(l,t) = h_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{6}$$

The solution of problems (1)-(6) represented by the following formulas:

$u_1(x,t) = (c_{l_1}^2 - a_{22})\tilde{u}_1(x,t) + (c_{l_2}^2 - a_{22})\tilde{u}_2(x,t), \quad u_2(x,t) = a_{21}\left(\tilde{u}_1(x,t) + \tilde{u}_2(x,t)\right),$

where

$$\tilde{u}_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c_{l_1}}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi c_{l_1}}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{1n}(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{g_1(t)}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2} + \frac{(a_{22}-c_{l_2}^2)g_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} + \frac{x}{l}\left[\frac{h_1(t)}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2} + \frac{(a_{22}-c_{l_2}^2)h_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} - \left(\frac{g_1(t)}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2} + \frac{(a_{22}-c_{l_2}^2)g_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)}\right)\right],$$

$$\tilde{u}_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi c_{l_2}}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c_{l_2}}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \frac{g_1(t)}{c_{l_2}^2 - c_{l_1}^2} + \frac{(c_{l_1}^2-a_{22})g_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} + \frac{x}{l}\left[\frac{h_1(t)}{c_{l_2}^2 - c_{l_1}^2} + \frac{(c_{l_1}^2-a_{22})h_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} - \left(\frac{g_1(t)}{c_{l_2}^2 - c_{l_1}^2} + \frac{(c_{l_1}^2-a_{22})g_2(t)}{a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)}\right)\right],$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\tilde{u}_1(x,0) - \tilde{u}_1(0,0) - \left[\tilde{u}_1(l,0) - \tilde{u}_1(0,0)\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c_{l_1}}\int_0^l \left(\left.\frac{\partial\tilde{u}_1(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial\tilde{u}_1(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left[\left.\frac{\partial\tilde{u}_1(l,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial\tilde{u}_1(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$m_{1n}(t) = \frac{l}{n\pi c_{l_1}}\int_0^t F_{1n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi c_{l_1}}{l}(t-\tau)\right)d\tau,$$

$$F_{1n}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\tilde{F}_1(x,t) - \tilde{u}_1''(0,t) - \left[\tilde{u}_1''(l,t) - \tilde{u}_1''(0,t)\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\tilde{u}_2(x,0) - \tilde{u}_2(0,0) - \left[\tilde{u}_2(l,0) - \tilde{u}_2(0,0)\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi c_{l_2}}\int_0^l \left(\left.\frac{\partial\tilde{u}_2(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial\tilde{u}_2(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left[\left.\frac{\partial\tilde{u}_2(l,t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial\tilde{u}_2(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$m_{2n}(t) = \frac{l}{n\pi c_{l_2}}\int_0^t F_{2n}(\tau)\sin\left(\frac{n\pi c_{l_2}}{l}(t-\tau)\right)d\tau,$$

$$F_{2n}(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\tilde{F}_2(x,t) - \tilde{u}_2''(0,t) - \left[\tilde{u}_2''(l,t) - \tilde{u}_2''(0,t)\right]\frac{x}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$\tilde{F}_1 = \frac{1}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2}\left(F_1 + \frac{a_{22} - c_{l_2}^2}{a_{21}}F_2\right), \quad \tilde{F}_2 = \frac{1}{c_{l_2}^2 - c_{l_1}^2}\left(F_1 - \frac{c_{l_1}^2 - a_{22}}{a_{21}}F_2\right).$$

References

1. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. 1995. New York: Nova Science Publishers Inc. 192 p.

2. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации. 2004. Сиб. журн. индустр. матем., том 7, номер 1, 3–8.

3. Доровский В. Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах. 1993. Горение. Взрыв, Ударные волны 29, №. 1, 93–103.

4. Abror Rakhimov, Kholmatzhon Imomnazarov D'alembert formula for poroelasticity system described by three elastic parameters. Journal of Mathematical Sciences, 2023, Vol. 274, №. 2, pp. 269-274.

5. Rakhimov Abror Maxmud o'g'li. Dirichlet boundary value problem for a model of inhomogeneous poroelasticity described by three elasticity parameters. QarDU Xabarlari 2024. 3(2)-son pp. 122-128.

Quaternionic Cauchy Integral Formula For α -Huperholomorphic Functions In Boundary Domain

Sattorov E.N.[1], **Rustamov S.U.**[2]

Uzbekistan-Finland pedagogical institute, Samarkand, Uzbekistan;
sattorov-e@rambler.ru
Navoi State Mining and Technology University, Navoi, Uzbekistan;
sohibjon_17@mail.ru

In this talk, we present an Cauchy integral formula for $\alpha-$ hyperholomorphic function.

Introduce the following notations: R^3 is the third dimensional real Euclidean space,

$$x=(x_1,x_2,x_3),\ \ y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3,\ \ x'=(x_2,x_3),\ \ y'=(y_2,y_3)\in R^2,$$

$$s=\alpha^2=|y'-x'|=(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2,\ \ r^2=s+(y_1-x_1)^2=|y-x|^2,\tau=tg\frac{\pi}{2\rho},\ \ \rho>1,$$

$$G_\rho=\{y:|y'|<\tau y_1,\ \ y_1>0\},\ \ \partial G_\rho=\{y:|y'|=\tau y_1,\ \ y_1>0\},\ \ \overline{G}_\rho=G_\rho\cup\partial G_\rho,\ \ \varepsilon,\varepsilon_1$$

and ε_2 sufficiently small positive constants,

$$G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|<\tau(y_1-\varepsilon)\},\ \ \partial G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|=\tau(y_1-\varepsilon)\}\ \ \overline{G}_\rho^\varepsilon=G_\rho^\varepsilon\cup\partial G_\rho^\varepsilon,$$

$$C=\{\varsigma:\varsigma=\xi+i\eta,\ \ -\infty<\xi<\infty,\ \ -\infty<\eta<\infty,\}.$$

$\Omega_\rho-$ is a bounded simply connected domain whose boundary in R^3 whose boundary $\partial\Omega_\rho$ consists of a part of the conic surface $T\equiv\partial G_\rho$ and a smooth surface S, lying inside the cone $\overline{G}_\rho$.

Let $H(C)$ be the set of complex quaternions. We shall consider continuously differentiable $H(C)$ - valued functions depending on three real variables $x=(x_1,x_2,x_3)$. On this set the well known Moisil-Theodoresco operator is defined by the expression $D:=\sum\limits_{k=1}^{3}i_k\partial_k$, where $\partial_k=\partial_k/\partial(x_k)$. The action of the operator D on an $H(C)$ -valued function f can be written in a vector form:

$$Df=-div\overrightarrow{f}+gradf_0+rot\overrightarrow{f}. \tag{1}$$

That is, $Sc(Df)=-div\overrightarrow{f}$ and $Vec(Df)=gradf_0+rot\overrightarrow{f}$. In a good number of physical applications (see [1] and [2]) the operators $D_\alpha=D+M^\alpha$ and $D_{-\alpha}=D-M^\alpha$ are needed, where α is a complex quaternion and M^α denotes the operator of multiplication by α from the right-hand side: $M^\alpha f=f\alpha$.

Let $\lambda \in H(C)\setminus\{0\}$, and let α be its complex- quaternionic square root:$\alpha \in H(C), \alpha^2 = \lambda$. The function $f : \Omega \subset R^3 \to H(C)$ is called $left-\alpha-hyperholomorphic$ if

$$D_\alpha f := f\alpha + i_1\frac{\partial}{\partial x_1}f + i_2\frac{\partial}{\partial x_2}f + i_3\frac{\partial}{\partial x_3}f = 0. \tag{2}$$

Let $\alpha \in H(C)$ and let

$$\Phi_0(x;\lambda) = -\frac{1}{4\pi|x|}e^{i\alpha|x|}, x \in R^3 \setminus \{0\}, Re\alpha > 0 \tag{3}$$

be the fundamental solution of the Helmholtz operator $\triangle_\lambda := \triangle + I\lambda = -D_\alpha D_{-\alpha}$, where $\triangle := \sum\limits_{k=0}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ and I is the identity operator.

Define the function $\Phi_\sigma(y-x,\lambda)$ for $s>0,\ \ v \geq 1$ by the equality

$$-2\pi^2\Phi_\sigma(y-x,\lambda) = \int\limits_0^\infty Im\left[\frac{e^{aw^2}E_\rho(\sigma w)}{w}\right]\frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{s+u^2}}du =$$

$$= e^{a(y_1-x_1)^2}\int\limits_0^\infty \varphi_\sigma(y,x,u)\frac{e^{-as-au^2}ch(\lambda u)}{u^2+r^2}du, \tag{4}$$

$E_\rho(\sigma w)$ Mitag-Leffler enter function,$w = i\sqrt{u^2+s} + y_1 - x_1$.

Then the fundamental solution of the operator D_α, K_α, is given by the formula(see [3])

$$K_\alpha(x) := -D_\alpha\Phi(y,x;\lambda),$$

and its explicit form can be seen.

For $\alpha-$ hyperholomorphic function the quaternionic left Cauchy integral formula is defined (see [3, Subsection 4.15]):

Theorem. *Let $f \in C^p(\Omega_\rho, H(C))$. Then*

$$K_\alpha^\sigma[f](x) := -\int\limits_S \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f_\sigma(x), x \in \Omega. \tag{5}$$

where

(1) If $\alpha = \alpha_0 \in C$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x-\tau)f(\tau). \tag{6}$$

(2) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}}K_{\xi_+}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} + \overrightarrow{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}}K_{\xi_-}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} - \overrightarrow{\alpha}. \tag{7}$$

(3) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 = 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x)f(\tau) + \frac{\partial}{\partial\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{8}$$

(4) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 \neq 0$, *then*

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := \frac{1}{2\alpha_0} K_{2\alpha_0}(x) f(\tau)\alpha + \frac{1}{2\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x) f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{9}$$

(5) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 = 0$, *then*

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := K_0(x) f(\tau) + \Phi_0(x) f(\tau)\alpha. \tag{10}$$

Investigation Of A Periodic Boundary Value Problem For Voltaire Integro-Differential Systems By The Extended Differentiation Operator Method

Sartabanov Zh. A.[1], Aitenova G. M.[2], Abdikalikova G. A.[1], Omarova B. Zh.[1], Zhumagaziyev A. Kh.[1]

K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan;
M. Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan;
sartabanov42@mail.ru

Many phenomena of hereditary dynamics, obeying the principle of a closed cycle [1,2], are described by a periodic Voltaire integro-differential system with a two-point boundary condition

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau-\sigma)x(\sigma)d\sigma + f(\tau, x(\tau)), x(\theta) = x(0), \tag{1}$$

where $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $\varepsilon = const > 0$ is period of hereditary, θ is period of phenomena, the kernel $K(\tau)$, the matrix $A(\tau)$, and the vector-function $f(\tau, x)$ have the properties of θвГ Yperiodicity and smoothness:

$$A(\tau+\theta) = A(\tau) \in C_{\tau}^{(0)}(R),$$

$$K(\tau) \in C_{\tau}^{(1)}(R), K(\varepsilon) = 0, \frac{dK(\tau)}{d\tau} = B(\tau) = B(\tau+\theta) \in C_{\tau}^{(0)}(R),$$

$$f(\tau+\theta, x) = f(\tau, x) \in C_{\tau,x}^{(0,e)}(R \times R^n). \tag{2}$$

It is clear that the history of a phenomenon that is ε-periodic in time $t = t(\tau)$ generates a θ-periodic history in time τ, the general history of which is described by problem (1). It is necessary to clarify the additional conditions to the requirements in (2) under which the phenomenon changes θ-periodically in τ.

In order for an event to run for a total period of θ, a proportional relationship between times τ and t is required. To ensure this proportionality, we assume that the relation $t = \tau - \varepsilon$ holds, where $\tau \in R$. Furthermore, after the θ-period of the event's life has passed, the ε-period of the phenomenon begins in time t with a velocity $dt/d\tau = 1$. It is evident that the θ-periodicity of the phenomenon is described by equation (1). To connect this with the rate of change of the variables, it is sufficient to move from the ordinary differentiation operator $d/d\tau$ to the advanced operator D, in the form $D = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t}$.

It should also be noted that the system (1)-(2), which is θ-periodic in τ, behaves as θ-periodic in t. Therefore, it is advisable to define the equation $dtd\tau = 1$ to a circular cylindrical manifold $\mathcal{M}$ with a phase circle S_θ of length $2\pi r = \theta$. Consequently, we have $(\tau, t) \in R \times S_\theta = \mathcal{M}$, moreover t and $t + k\theta, k \in Z$ represent identical points, where Z is the set of integers.

It is clear from [3] that the characteristic equation $dtd\tau = 1$ of the operator D has θ-periodic with respect to $\tau \in R$ characteristics

$$t = \beta(\tau - \xi, \eta), (\tau, t) \in \mathcal{M}, \tag{3}$$

with initial data $t = \eta$ for $\tau = \xi$.

Next, suppose

$$x(\tau) = y(\tau, \beta(\tau - \xi, \eta)) = y(\tau, t)|_{t=\beta(\tau-\xi,\eta)} \tag{4}$$

holds.

Thus, problem (1), by virtue of (3)–(4), appears to be an extended problem

$$Dy = A(\tau)y + \int_t^\tau K(\tau - \sigma)y(\sigma, \beta(\sigma - \tau, t))d\sigma + f(\tau, y), \tag{5}$$

$$y(\tau + \theta, t) = y(\tau, t + \theta) = y(\tau, t),$$

defined on a cylindrical surface $(\tau, t) \in \mathcal{M}$, with the definition (θ, θ)-periodic solutions with respect to (τ, t).

To investigate problem (5) we introduce substitution

$$\int_t^\tau K(\tau - \sigma)y(\sigma, \beta(\sigma - \tau, t))d\sigma = z. \tag{6}$$

Next, using the operator D from (6), taking into account condition (2), we have

$$Dz = K(0)y + B(\tau)z. \tag{7}$$

By virtue of (6), we write system (5) in the form

$$Dy = A(\tau)y + z + f(\tau, y). \tag{8}$$

By combining system (7) and (8) we obtain the extended system

$$Du = \Phi(\tau)u + \phi(\tau, u) \tag{9}$$

where $u = (y, z)$, $\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} A(\tau) & E \\ C & B(\tau) \end{pmatrix}$, $\phi(\tau, u) = (f(\tau, y), 0)$.

Further, θ-periodic solutions of systems (9) are investigated using methods of the theory of periodic systems of ordinary differential equations.

References

1. Volterra V. Theory of functionals, integral and integro-differential equations. Moscow: Nauka, 1982. [in Russian]

2. Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. Moscow: Higher School, 1995. [in Russian]

3. Sartabanov Zh.A. Periodicity of characteristics of the diagonal differentiation operator /Vestn. Abai KazNPU,Fiz. Mat. Nauka. 2023. P.82, – 2. P. 40–53. [in Russian]

Carleman's Formula Of A Solutions Of The Poisson Equation

Sattorov E.N.[1], **Ermamatova Z.E.**[2]

Uzbekistan-Finland pedagogical institute, Samarkand, Uzbekistan;
sattorov-e@rambler.ru
Samarkand branch of Tashkent State Economic University, Samarkand, Uzbekistan;
ermamatovazuxro94@gmail.com

The Cauchy problem for the Poisson equation (1) is well-known to be ill-posed [1], [2]. It has applications in many different areas such as plasma physic, electrocardiography, and corrosion non-destructive evaluation (e.g., [3], [5], [6]).

The result established by G.M.Goluzin, V.I.Krylov, V.A.Fok, and F.M.Kuni in the theory of holomorphic functions of one variable [8],[7] is a multidimensional analog of the Carleman-type formulas [4].

In this work we propose an explicit formula for reconstruction of a solution of the Poisson equation

$$-\triangle U(x) \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = f(x), \tag{1}$$

a domain from its values and the values of its normal derivative on part of the boundary, i.e., we give an explicit continuation formula of a solution of the Cauchy problem for the Poisson equation.

Introduce the following notations: R^3 is the third dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (x_2, x_3),\ \ y' = (y_2, y_3) \in R^2,$$

$\Omega-$ is a bounded simply connected domain whose boundary in R^3 whose boundary $\partial\Omega$ consists of a part of the surface $T \equiv \partial G_\rho$ and a smooth surface S, lying inside the $y_3 > 0, \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega, \partial\Omega = T \cup S$,

Theorem *Let $S \subset C^2, f_1(y) \in C^1(S_0) \cap L(S), f_2(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, and $f \in L_p(\Omega_\rho), (p > 3)$. Then for existence of a function $U(y) \in H(\Omega_\rho) \cap C(S_0)$, such that*

$$U(y) = f_1(y), \frac{dU}{dy}(y) = f_2(y), y \in S_0, \tag{2}$$

it is necessary and sufficient that the following improper integral converge (uniformly on compact sets in G_ρ) for each $x \in G_\rho$:

$$\left| \int_1^\infty J(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, \tag{3}$$

where $J(\sigma,x)$ is defined by

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}J(\sigma,x)=\int\limits_{\Omega_\rho}f(y)\frac{\partial^i\Psi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i}dy-\int\limits_S\left[f_1(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{d\Psi_\sigma(y-x)}{dn}-f_2(y)\frac{\partial^i\Psi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i}\right]dS_y, \tag{4}$$

$$x\in\Omega, i=0,1, j=1,2,3, \frac{\partial^0 U}{\partial x_j^0}=U, \frac{\partial^0\Phi}{\partial x_j^0}=\Phi, \frac{\partial^0\Psi}{\partial x_j^0}=\Psi, \frac{\partial^0 J}{\partial x_j^0}=J.$$

If (3) is satisfied then harmonic continuation is performed by equivalent formulas

$$\frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i}=\lim_{\sigma\longrightarrow\infty}\frac{\partial^i U_\sigma(x)}{\partial x_j^i}=$$

$$=\lim_{\sigma\longrightarrow\infty}\left[\int\limits_{\Omega_\rho}f(y)\frac{\partial^i\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i}dy-\int\limits_S\left\{f_1(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{d\Phi_\sigma(y-x)}{dn}-f_2(y)\frac{\partial^i\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i}\right\}dS_y\right], \tag{5}$$

$$\frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i}=\int_0^\infty\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}J(\sigma,x)+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\rho}f(y)\frac{\partial^i\Phi_0(r)}{\partial x_j^i}dy-\int\limits_S\left[f_1(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{d\Phi_0(r)}{dn}-f_2(y)\frac{\partial^i\Phi_0(r)}{\partial x_j^i}\right]dS_y, x\in\Omega, \tag{6}$$

.

where

$$-2\pi^2\Phi_\sigma(y-x)=\int\limits_0^\infty Im\left[\frac{e^{aw^2}}{w}\right]\frac{du}{\sqrt{s+u^2}}, \tag{7}$$

$$\Psi_\sigma(y-x)\equiv\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x)=\int\limits_0^\infty Im\left[e^{aw^2}\right]\frac{du}{\sqrt{s+u^2}}, \tag{8}$$

References

1. Alessandrini G., Rondi L., Rosset E., and Vessella S. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations// Inverse problems, 2009, 25. P. 123004.

2. Belgacem F. B. Why is the Cauchy problem severely ill-posed// Inverse Problems, 2007, 23. P. 823.

3. Blum J. Numerical simulation and optimal control in plasma physics, New York, NY; John Wiley and Sons Inc., 1989.

4. Carleman T. Les founctions quasi analitiques, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

5. Colli-Franzone P., Guerri L., Tentoni L., Viganotti L., Baruffi S., Spaggiari S., and Taccardi B. A mathematical procedure for solving the inverse potential problem of electrocardiography. Analysis of the time-space accuracy from in vitro experimental data, Mathematical Biosciences, 1985, 77. P. 353–396.

6. Fasino D. and Inglese G. An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, Inverse problems, 1999, 15. P. 41.

7. Fok V.A. and Kuni F.M. "On the introduction of a 'suppressing' function in dispersion relations,"// Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1959, 77. №. 6. P. 1195–1198.

8. Goluzin G. M. and Krylov V.I. "A generalized Carleman fornula and its application to analytic continuation of functions,// "Vat.Sb., 1933,40, №. 2. P. 144–149 .

An Inverse Problem For Pseudoparabolic Equation With Memory Term And Damping

Shakir Aidos

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
ajdossakir@gmail.com

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega,\ 0 < t \leq T\}$ is a cylinder with lateral Γ_T. Let us consider the following inverse problem of finding the pair of functions $(u(x,t), f(t))$, which satisfy the pseudoparabolic equation with memory term and damping

$$u_t - \kappa\Delta u_t - \lambda\Delta u - \int_0^t K(t-s)\Delta u(x,s)ds = \gamma\,|u|^{q-2}\,u + f(t)\cdot g(x,t), \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{1}$$

the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \tag{2}$$

the boundary condition

$$u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T, \tag{3}$$

and the integral overdetermination condition

$$\int_\Omega u(x,t)\omega(x)dx = h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Here, the coefficient κ, λ are given positive numbers, γ is the coefficient of the damping term might be positive $\gamma > 0$ either negative $\gamma < 0$. The functions $g(x,t),\ u_0(x),\ \omega(x)$ and $h(t)$ are given. The exponent q is given positive number such that

$$1 < q < \infty. \tag{5}$$

The main goal of this work is to show existence and uniqueness of weak solutions to the inverse problem (1)-(4).

Acknowledgment.
This research work has been funded by Grant number AP19676624 the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

On The Uniqueness Of The Solution Of A Boundary Value Problem For An Elliptic-Hyperbolic Equation

Nishonova Sh.T.[1], **Sodiqova M.S.**[2]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
shahnozanishonova910@gmail.com;
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
sodiqovamohlaroyim11@gmail.com

Let $\Omega = \Omega_0 \cup AB \cup \Omega_1$, where $\Omega_0 = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$, $AB = \{(x,y) : -1 < x < 1, y = 0\}$, $\Omega_1 = \{(x,y) : -1 < x < 1, -h < y < 0\}$, $h = const > 0$. In the domain Ω we consider the following equation

$$0 = \begin{cases} Lu \equiv u_{xx} + u_{yy}, & (x,y) \in \Omega_0, \\ Eu \equiv u_{xy} + \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

where $u(x,y)$ is the unknown function, λ is a given real number.

The equation (1) in the domain Ω, belongs to the mixed type, more precisely it belongs to hyperbolic type in the domain Ω_1 and elliptic type in the domain Ω_0.

Problem A. Find a function $u(x,y)$ satisfying the following conditions:

1) $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_{xy} \in C(\Omega_1)$, $u_{xx}, u_{yy} \in C(\Omega_0)$
2) It satisfies equation (1) in the domains Ω_0 and Ω_1;
3) It satisfies the following boundary conditions

$$u(-1,y) = \varphi(y), \quad u(x,y)\Big|_{\sigma} = \psi(x,y),$$

and the gluing conditions

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad u_y(x,+0) = u_y(x,-0),$$

where $\varphi(y), \psi(x,y)$ are given sufficiently smooth functions, $\sigma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$.

Theorem 1. If $\lambda < 0$, then the problem A has at the most one solution.

References

1. М.С.Салохиддинов, А.Уринов Гиперболик типдаги бузиладиган дифференциал тенгламалар.- Фаргона: Фаргона Давлат университети нашриҷти, 2005.

2. М.С.Салохиддинов, А.Уринов Аралаш типдаги дифференциал тенгламалар.- Фаргона: Фаргона Давлат университети нашриёти, 2007.

Mixed Problem for Time-Fractional Equations with Variable Coefficients

Toshtemirov B. H.[1], **Mamanazarov A. O.**[2]
Kokand University, Kokand, Uzbekistan;
e-mail: toshtemirovbh@gmail.com
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
e-mail: mamanazarovaz1992@gmail.com

In this thesis, we examine the unique solvability of a mixed boundary value problem for the following time-fractional partial differential equation with a degenerating coefficient:

$$ {}^{C}\left((t-a)^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha}u(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\beta}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=f\left(x,t\right), \tag{1}$$

where $\alpha\in(0,1)$, $\theta<1$, $\beta\in(0,2)$, $\beta\neq1$, $f(x,t)$ is a given source term and ${}^{C}D^{\alpha}_{a+,t}$ is the regularized Caputo-like counterpart of the hyper-Bessel operator with arbitrary starting point a (see [1]).

Statement of the problem Find a solution in the domain Ω of the equation (1) satisfying the following initial

$$u(x,a+)=\varphi(x),\quad x\in[0,1] \tag{2}$$

and the boundary conditions:

$$\frac{\partial^{\nu}u(0,t)}{\partial x^{\nu}}=0;\quad \nu=\overline{0,-[\beta]};\quad u(1,t)=0,\quad a\leq t\leq T \tag{3}$$

where φ is given function, $[\beta]$ denotes the integer part of β, $a\geq0$.

First, we will examine the form of the boundary condition (3) for different values of β.

Let $\beta\in(0,1)$. Then, the condition (3) takes the form

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad a\leq t\leq T. \tag{4}$$

For the values of $\beta\in(1,2)$, the condition (3) has the form

$$u(1,t)=0,\quad a\leq t\leq T, \tag{1}$$

so we do not need any conditions on the line $x=0$.

Therefore, the condition (3) encompasses the conditions (4), (5).

Utilizing a newly defined operator and the method of separation of variables, we demonstrate the existence of eigenvalues and eigenfunctions for the related spectral problem, confirming that the operator has a discrete spectrum (see [2], [3]). Moreover, we explore the connection between the problem's initial data and its unique solvability, providing valuable insights into the impact of degeneracy on fractional diffusion phenomena which are highlighted in the following theorems:

Theorem 1. Case I. Let the following conditions be fulfilled:

1. $0<\beta<1$;
2. $\varphi, A\varphi\in\dot{W}^{1}_{2,\beta}(0,1)$;

3. $f, Af \in C([a,T], \dot{W}^1_{2,\beta}(0,1))$.

Then, the unique classical solution to the considered Problem will be existed.

Theorem 2. Case II. Let the following conditions be fulfilled:

1. $1 < \beta < 2$;
2. $\varphi \in L^2(0,1)$
3. $f(\cdot, a) \in L^2(0,1)$ and $f \in C^1([a,T], L^2(0,1))$

then the unique weak solution to the considered Problem exists.

Literature

1. Karimov E., Ruzhansky M., Toshtemirov B. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative. Math Meth Appl Sci. 2023; 46(1): 54–70. doi:10.1002/mma.8491

2. S.G.Mikhlin Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon Press, New York, 1964.

3. V.I.Kondrashov On the theory of boundary-value problems with boundary conditions containing parameters, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 142(6) (1962), pp. 1243–1246.

Regularization Of The Cauchy Problem For The Biharmonic Equation In A Three-Dimensional Unbounded Domain

Tursunov F.R.[1], **Shodiev D.S.**[2]

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; farhod.tursunov.76@ mail.ru

Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan; dilshod.shodiev.76@ mail.ru

Let $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ be points of the real Euclidean space $\mathbb{R}^3$ and G be an unbounded domain in $\mathbb{R}^3$ lying inside the strip $0 < y_3 < h, h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$ whose boundary consists of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth piece of the Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, $\overline{G} = G \bigcup \partial \mathrm{G}, \partial G = S \bigcup T$.

Suppose that for some $b_0 > 0$ the following condition is satisfied:

$$\int_{\partial G} \exp\left\{-b_0 \cosh \rho_1 |y'|\right\} dS < \infty,\ 0 < \rho_1 < \rho,\ y' = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

We consider the following equation in the region G:

$$\Delta^2 U(y) = 0, \tag{1}$$

where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_3}^2}$ is the Laplace operator. Let us denote

$$K_\rho(G) = \Big\{U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\overline{G}) : U(y) + \frac{\partial U(y)}{\partial n} + \Delta U(y) + \frac{\partial (\Delta U(y))}{\partial n} \le \exp\left[0 \left(\exp \rho |y'|\right], y' \to \infty, y \in G\right]\Big\}.$$

Statement of the problem. We need to find the biharmonic function $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^4(G) \cap C^3(\overline{G})$ for which the values on part S of the boundary ∂G are known, that is,

$$\begin{aligned} U(y_1, y_2, y_3)|_S = f_1(y), \ \left.\frac{\partial U(y_1,y_2,y_3)}{\partial n}\right|_S = f_2(y) \\ U(y_1, y_2, y_3)|_S = f_3(y), \ \left.\frac{\partial(\Delta U(y_1,y_2,y_3))}{\partial n}\right|_S = f_4(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Here $f_j(y)$ are given sufficiently smooth functions, $j = 1, 2, 3, 4$, and $\frac{\partial}{\partial n}$ is the operator of differentiation along the outer normal to ∂G.

The problem under consideration (1)–(2) is related to ill-posed problems of mathematical physics, since there is no continuous dependence of the solution on the initial data.

In the work of Tikhonov [2], the practical importance of unstable problems was indicated, and it was proved that if the class of possible solutions is narrowed to a compact, then the stability of the solution follows from the existence and uniqueness.

Construction of the Carleman function. In 1926, Carleman [1] established a formula that gives a solution to the Cauchy-Riemann equations in a special type of domain.

A Carleman-type formula that uses a fundamental solution to a differential equation with special properties (Carleman function) was obtained by Lavrentev [3], [4] and a definition of the Carleman function was given for the case when the Cauchy data are given approximately, and a scheme for regularizing the Cauchy problem for the Laplace equation was given. Using this method, Yarmukhamedov [5], [6] constructed Carleman functions for a wide class of elliptic operators defined in spatial domains of a special type, when part of the boundary of the domain is a hypersurface or a conical surface. For the domain under consideration, the Carleman function was constructed by Yarmukhamedov [5] in his doctoral dissertation as follows:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi^2 K(x_3)}, \tag{3}$$

where

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{K(\omega)}{\omega - x_3}\right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}},$$

$$K(\omega) = \frac{e^{\sigma\omega}}{\omega - x_3 + 2h}, \ K(x_3) = \frac{1}{2h} e^{\sigma x_3}, \ \omega = i\sqrt{u^2 + x^2} + y_3, \tag{4}$$

$$x' = (x_1, x_2, 0), \ y' = (y_1, y_2, 0), \ r = |y - x|, \ \alpha = |y' - x'|, \ 0 < x_3 < h.$$

In formula (4), we choose

$$K(\omega) = \frac{e^{\sigma\omega^2}}{\omega - x_3 + 3h}, \ K(x_3) = \frac{1}{3h} e^{\sigma x_3^2},$$

then separating the imaginary part and taking into account (3), we obtain:

$$\begin{aligned}\Phi_\sigma(x,y) = {} & \frac{3h}{\pi^2} e^{-\sigma\left(x^2+x_3^2-{y_3}^2\right)} \int_0^\infty \frac{(y_3-x_3)\, e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_3 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)\left(u^2+\alpha^2+(y_3-x_3+3h)^2\right)} du + \\ & + \frac{9h^2}{2\pi^2} e^{-\sigma\left(x^2+x_3^2-{y_3}^2\right)} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_3 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)\left(u^2+\alpha^2+(y_3-x_3+3h)^2\right)} du + \\ & + \frac{3h}{2\pi^2} e^{-\sigma\left(x^2+x_3^2-y_3^2\right)} \int_0^\infty \frac{(y_3-x_3)\,(y_3-x_3+3h)\, e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_3 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)\left(u^2+\alpha^2+(y_3-x_3+3h)^2\right)} \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \\ & - \frac{3h}{2\pi^2} e^{-\sigma\left(x^2+x_3^2-y_3^2\right)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+\alpha^2} e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_3 \sqrt{u^2+\alpha^2}}{(u^2+r^2)\left(u^2+\alpha^2+(y_3-x_3+3h)^2\right)} du. \end{aligned} \tag{5}$$

In this work,using the Carleman function estimates were obtained for the deviation of the first-order derivatives of the approximate solution from the derivatives of the exact solution depending on the distance to the flat part of the boundary in three-dimensional regions for the biharmonic equation.

References

1. Carleman T. Les Functions quasi analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.

2. Tikhonov A.N. On the stability of inverse problems // Dokl. Akad. Nauk USSR. 1943. Vol. 39, №. 5. P. 147–160.

3. Lavrentev M.M. On the Cauchy problem for the Laplace equation // Izv. Akad. Nauk USSR. 1956. Vol. 20, №. 6. P. 819–842.

4. Lavrentev M.M. On some ill-posed problems of mathematical physics. Novosibirsk: Izd.So.Akad. Nauk USSR. 1962 [in Russian].

5. Yarmukhamedov Sh. On the Cauchy problem for the Laplace equation. Diss. doc. physical mat. Sci. Novosibirsk, 1983.

6. Yarmukhamedov Sh. Representation of harmonic functions as potentials and the Cauchy problem // Mathematical Notes. 2008. Vol. 83. P. 693–706.

Classes Of Solvability For Initial-Boundary Value Problems For Strongly Degenerate Hyperbolic Equations

Yergaliyev M. G.[1]

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
ergaliev@math.kz

Let $0 < T < \infty$ and let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with a boundary $\partial\Omega \in C^2$, $Q = \Omega \times (0,T)$, and $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. We consider the initial-boundary value problem for the following degenerate hyperbolic equation:

$$\partial_t \left(t^\beta \partial_t u(x,t)\right) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ in } Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \text{ on } \Sigma, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \lim_{t\to+0} t^\beta \partial_t u(x,t) = 0 \text{ in } \Omega. \tag{3}$$

Previously, in [1] the case of weak degeneracy, namely when $\beta \in [0,1)$ was studied. In our work, we investigate the solvability of these problems in the case of strong degeneracy, where $\beta \in [1,2]$.

References

1. Kakharman N. General regular boundary value problems for degenerate hyperbolic equations. Almaty. PhD thesis, 2023.

2. Hussein M.S., Lesnic D., Kamynin V.L., Kostin A.B. Direct and inverse source problems for degenerate parabolic equations //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. V.28, P. 425–448.

3. Jenaliyev M.T., Kassymbekova A.S. On the initial boundary problem for hyperbolic equations with exponential degeneration $t^{12/7}$ // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2024. V. 121, №. 1. P. 27–36.

Very Weak Solutions Of The Heat Equation For Sturm-Liouville Operator With Singular Propagation And Potential

Yeskermessuly A.

Altynsarin Institute, Arkalyk, Kazakhstan;
alibek.yeskermessuly@gmail.com

We consider the heat equation

$$\partial_t u(t,x) + a(t)\mathcal{L}u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times (0,1),$$

with initial condition

$$u(0,x) = u_0(x), \;\; x \in (0,1),$$

and with Dirichlet boundary conditions

$$u(t,0) = 0 = u(t,1), \qquad t \in [0,T],$$

where $a(t) \geq a_0 > 0$ in $[0,T]$ and $\mathcal{L}$ is defined by

$$\mathcal{L}u(t,x) := -\partial_x^2 u(t,x) + q(x)u(t,x), \qquad x \in (0,1),$$

and $q = \nu'(x)$, $\nu \in L^2(0,1)$. In this equation, the potential q, the propagation coefficient $a(t)$, and the initial condition u_0 are considered singular in the sense of distributions.

To establish our main results, we first analyze the equation assuming regular coefficients. Using the method of separation of variables, the problem is reduced to finding the eigenvalues of the Sturm-Liouville operator. The solution to the initial boundary value problem is then constructed as a Fourier series expansion. We also extend the analysis to the heterogeneous case. Finally, we demonstrate the very weak well-posedness of the equation when the potential, initial condition, and time-dependent coefficients are singular distributions.

Solvability Of Singular Peridynamic Equation Of Static

Yuldasheva A. V.

Lomonosov Moscow State University, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan ;
yuasv86@mail.ru

Let consider the peridynamic equation of an n-dimensional body under static conditions

$$c\int\limits_D \frac{[u(x+\xi)-u(x)]}{|\xi|^n}d\xi + f(x) = 0, \quad x \in D, \tag{1}$$

with boundary condition

$$u|_{\partial D} = 0. \tag{2}$$

Here $D \subset \mathbb{R}^n$, $c = \frac{2E}{\delta^2}$ represents the PD material constant, E is elastic modulus, D and δ represent the horizon and horizon size, ξ is the local coordinate.

We consider a PD continuum model which involves the integration over the differences of the displacement field ([1],[2]).

In the present paper, we consider a simplified model in which it is assumed that $n \geq 3$ and all functions in equation (1) are real-valued scalar functions, $u : D \to \mathbb{R}$ is unknown function, and $f : D \to \mathbb{R}$ is the body load (see [1]).

For any $\beta > 0$ we define the Hilbert space $H^\beta(D)$ with the finite norm

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, v_k)|^2 (1 + |\lambda_k|^2)^\beta,$$

where eigenfunctions $v_k(x)$ and eigenvalues λ_k satisfy the relations

$$-\triangle v_k(x) = \lambda_k v_k(x), x \in D, v_k(s) = 0, s \in \partial D, k = 1, 2, ...$$

The main result of the present paper is as follows.

Theorem. *Let $\alpha \in (0, 1)$ and $0 < \beta < \alpha/n$. Assume that the external force $f(x, t) \in W_2^\alpha(D)$, then solution of the problem (1)-(2) exists, belongs to $H^\beta(D)$, and is unique.*

We proved Theorem using Fourier series.

References

1. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids, 2000. 48(1). P. 175–209.

2. Alimov Sh. A. and Yuldasheva A. V. On the Solvability of the Peridynamic Equation with a Singular Kernel // Differential Equations. 2021. Vol. 57, №. 3. P. 353-365.

Задача Со Смешанными Граничными Условиями Для Многомерного Уравнения Лапласа В Частях Шара

Аббасова М.О.

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
abbasovamunira21@gmail.com

Через Ω обозначим конечную область, ограниченную плоскостями $x_1 = 0,... \, x_n = 0$ и первой 2^{-n}-ой частью сферы

$$S :\equiv S_m^n = \left\{x : \, x_1^2 + ... + x_m^2 = R^2, \; x_1 > 0, \; ..., x_n > 0 \right\}.$$

Боковые грани области Ω ообозначим через

$$D_p = \left\{x : \, \sum\nolimits_{i=1, i\neq p}^{m} x_i^2 < R^2, \; x_1 > 0, \; ..., x_{p-1} > 0, \; x_{p+1} > 0, ..., x_n > 0 \, , p = \overline{1, n} \right\}.$$

В настоящей работе мы исследуем в области Ω задачу со смешанными граничными условиями для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_m x_m} = 0. \tag{1}$$

Для нахождения явный решений поставленных задач используется метод функции Грина. Для постпрения функции Грина в случае облачтей с достаточно широкой гоуппой симметрий весьма эффективным оказывается метод симметрий. Именно шар, полушар, четверть шара и другие части шара относятся к числу областей, для которых функция Грина можеь быть легко построена.

Пусть $x = (x_1, ..., x_m)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ – две точки области Ω.

Введем обозначения

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \xi_i)^2 \, , \;\; \rho^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \;\; R^2 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2, \;\; \tilde{r}^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_i \right)^2 ,$$

$$r_{i_1 ... i_k}^2 = \sum_{j = i_1, ..., i_k} (x_j + \xi_j)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i_1, ..., i_k)}}^{m} (x_j - \xi_j)^2 ,$$

$$\tilde{r}_{i_1 ... i_k}^2 = \sum_{j = i_1, ..., i_k} \left(x_j + \frac{R^2}{\rho^2} \xi_j \right)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i_1, ..., i_k)}}^{m} \left(x_j - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_j \right)^2 ;$$

$$r_l = r|_{x_l = 0} \, , \;\; r_{i_1, ..., i_s(l)} = r_{i_1, ..., i_s}|_{x_l = 0} \, , \;\; l = \overline{1, n};$$

$$\tilde{x}_k = (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_m) \in R_{m-1}, \;\; \tilde{\xi}_k = (\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_m) \in R_{m-1}.$$

Здесь $i_1, ..., i_k$ – натуральные числа, причем $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$. Во всех обозначениях $k = 1, ..., n$.

Общеизвестно, что функция $v\,(x, \xi) = \dfrac{1}{r^{m-2}}$ является фундаментальным (сингулярным) решением уравнения Лапласа.

Задача со смешанными граничными условиями (**Задача** T^kN^{n-k}). Найти гармоническое решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{x_p=0} = \tau_p(\tilde{x}_p), p = \overline{1,k}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_p}\right|_{x_p=0} = \nu_p(\tilde{x}_p), p = \overline{k+1,n}, \quad u|_S = \varphi(x),$$

где $\tau_p \in C\left(\bar{D}_p\right)$ $(p = \overline{1,k})$, $\nu_p \in C(D_p)$ $(p = \overline{k+1,n})$ и $\varphi \in C\left(\bar{S}\right)$ – заданные функции, $\tau_i(\mathbf{0}) = \tau_j(\mathbf{0}), i,j = \overline{1,n}, \quad \tau_i\left(\tilde{x}^0_{iq}\right) = \tau_j\left(\tilde{x}^0_{jq}\right), \ i \neq q, \ j \neq q, \quad \tau_p(\tilde{x}_p)|_{S_p} = \varphi|_{S_p}, \tilde{x}_p \in \overline{D}_p, \quad i,j,p,q = \overline{1,k}.$

Здесь и далее k принимает неотрицательные целые значения: $k = 0,1,...,n$.

Единственность решения поставленной задачи доказывается методом abc, а существование – методом функции Грина. Функция Грина этой задачи имеет вид

$$G_m^{(k,n-k)}(x;\xi) = \frac{1}{4\pi^{m/2}}\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)\sum_{s=0}^{n}\sum_{I}\left[\frac{(-1)^{\alpha_k}}{r^{m-2}_{i_1\ldots i_s}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{(-1)^{\alpha_k}}{\tilde{r}^{m-2}_{i_1\ldots i_s}}\right], \qquad (2)$$

где

$$\alpha_{k,s} = \sum_{j=1}^{s}\delta_k(i_j), \quad \delta_k(i_j) = \begin{cases} 1, & 1 \le i_j \le k \le n, \\ 0, & 0 \le k > i_j \le n, \end{cases} \qquad k = \overline{0,n};$$

$$I := \{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n\}.$$

С помощью функции Грина (2) получим решение задачи T^kN^{n-k} в явном виде

$$u(x) = \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}\prod_{i=1}^{k}[x_i]\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{D_k}\tau_l\left(\tilde{\xi}_l\right)\sum_{\substack{s=0,\\ s\neq l}}^{n}\sum_{I}\left[\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{r^{m}_{i_1\ldots i_s(l)}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m}\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{\tilde{r}^{m}_{i_1\ldots i_s(l)}}\right]d\tilde{\xi}_k$$

$$-\frac{\Gamma(m/2-1)}{2\pi^{m/2}}\sum_{l=k+1}^{n}\int\limits_{D_k}\nu_l\left(\tilde{\xi}_l\right)\sum_{\substack{s=0,\\ s\neq l}}^{n}\sum_{I}\left[\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{r^{m-2}_{i_1\ldots i_s(l)}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{\tilde{r}^{m-2}_{i_1\ldots i_s(l)}}\right]d\tilde{\xi}_k$$

$$+\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2}}\int\limits_{S}\varphi(\xi)\frac{R^2-\rho^2}{R}\sum_{\substack{s=0,\\ s\neq l}}^{n}\sum_{I}\left[\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{r^{m}_{i_1\ldots i_s}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m}\frac{(-1)^{\alpha_{k,s}}}{\tilde{r}^{m}_{i_1\ldots i_s}}\right]d_\xi S.$$

В заключении отметим, что задача T^kN^{n-k} при $k = 0$ (задача Хольмгрена) и $k = n$ (задача Дирихле) исследованы в [1] и [2], соответственно.

Литература

1. Ergashev T.G., Abbasova M.O. Holmgren's problem for the Laplace equation in the hyperoctant of the multidimensional ball. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(6), p. 1303 – 1312.

2. Abbasova M.O., Ergashev T.G., Yuldashev T.K. Dirichlet problem for the Laplace equation in the hyperoctant of a multidimensional ball. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, 44(3), p. 1072 – 1079.

Об Усреднении Аттракторов Уравнений Реакции-Диффузии В Области С Шероховатой Границей

Ажмолдаев Г. Ф.[1], **Бекмаганбетов К. А.**[2], **Чечкин Г. А.**[3], **Чепыжов В. В.**[4]

[1]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
azhmoldaevgf@gmail.com

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Казахстанский филиал, Астана, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
bekmaganbetov-ka@yandex.kz

[3]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
chechkin@mech.math.msu.su

[4]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия;
chep@iitp.ru

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ с гладкой границей $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Ω лежит на полуплоскости $\{x_d > 0\}$ и $\Gamma_1 \subset \{x : x_d = 0\}$. Задавая гладкую неположительную 1-периодическую по $\hat{\xi}$ функцию $F(\hat{x}, \hat{\xi})$, $\hat{x} = (x_1, ..., x_{d-1}), \hat{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_{d-1})$, определим область Ω_ε следующим образом: $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1^\varepsilon = \{x = (\hat{x}, x_d) : (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d = \varepsilon^\alpha F(\hat{x}, \hat{x}/\varepsilon)\}$, $\alpha < 1$, т.е. мы добавляем тонкий осциллирующий слой $\Pi_\varepsilon = \{x = (\hat{x}, x_d) : (\hat{x}, 0) \in \Gamma_1, x_d \in [0, \varepsilon^\alpha F(\hat{x}, \hat{x}/\varepsilon))\}$ к области Ω (смотри [1]). Здесь предполагается, что $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет компактный носитель на Γ_1 по переменной $\hat{\xi}$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta u_\varepsilon - a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u_\varepsilon) + h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^\beta p(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}) u_\varepsilon = \varepsilon^{1-\alpha} g(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon}), & x = (\hat{x}, x_d) \in \Gamma_1^\varepsilon, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_2, t > 0, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u^1, \ldots, u^n)^\top$ – неизвестная вектор-функция, $f = (f^1, \ldots, f^n)^\top$ – заданная нелинейная функция, $h = (h^1, \ldots, h^n)^\top$ – заданная вектор-функция, а λ – $n \times n$-матрица с постоянными коэффициентами, имеющая положительную симметричную часть: $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^\top) \geq \varpi I$, $\varpi > 0$ (где I – единичная матрица размерности $n \times n$). Мы предполагаем, что $p\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right) = \mathrm{diag}\{p^1, \ldots, p^n\}$, $g\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right) = (g^1, \ldots, g^n)^\top$, где $p^i\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right)$ и $g^i\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right)$ – непрерывные, положительные и 1-периодические по $\hat{\xi}$ функции, $i = 1, \ldots n$. Символ $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает конормальную производную, т.е. $\frac{\partial}{\partial \nu} := \sum\limits_{k,j=1}^{d} \lambda_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} N_j$ и $N = (N_1, \ldots, N_d)$ – единичная внешняя нормаль к границе области.

Функция $a(x, \xi) \in C(\overline{\Omega}_\varepsilon \times \mathbb{R}^d)$ такова, что $0 < a_0 \leq a(x, \xi) \leq A_0$ с некоторыми константами a_0, A_0. Предполагаем, что функция $a_\varepsilon(x) = a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ имеет среднюю $\overline{a}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$, т.е.

$$\int\limits_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \to \int\limits_\Omega \overline{a}(x) \varphi(x) dx \quad (\varepsilon \to 0+)$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$.

Для вектор функции $h(x,\xi)$ предположим, что для любого $\varepsilon>0$ функции $h^i_\varepsilon(x)=h^i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\in L_2(\Omega_\varepsilon)$ и имеют средние $\overline{h^i}(x)$ в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$, т.е.

$$\int\limits_\Omega h^i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx\to\int\limits_\Omega \overline{h^i}(x)\varphi(x)dx\quad(\varepsilon\to 0+)$$

для любой функции $\varphi\in L_2(\Omega)$ и для всех $i=1,\dots,n$.

Предполагается, что вектор-функция $f(v)\in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^n|f^i(v)|^{p_i/(p_i-1)}\le C_0\left(\sum_{i=1}^n|v^i|^{p_i}+1\right),\quad 2\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n,$$

$$\sum_{i=1}^n\gamma_i|v^i|^{p_i}-C\le\sum_{i=1}^n f^i(v)v^i,\quad\forall v\in\mathbb{R}^n,$$

при некоторых $\gamma_i>0$ для всех $i=1,\dots,n$.

Нами показано, что траекторные аттракторы (смотри [2]) начально-краевой задачи (1) при $\varepsilon\to 0+$ сходятся в определенной слабой топологии к траекторным аттракторам начально-краевых задачи для усредненных систем уравнений реакции-диффузии с преобразованными граничными условиями на участке границы Γ_1 области Ω: усредненным условием Неймана (в субкритическом случае $\beta>1-\alpha$, подано в печать), усредненным условием Фурье (в критическом случае $\beta=1-\alpha$, смотри [3]) или нулевым условием Дирихле (в суперкритическом случае $\beta<1-\alpha$, подано в печать).

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP19677486).

Литература

1. Checkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L. The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1999. Vol. 231, № 1. P. 213–234.

2. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1996. Vol. 7, № 1. P. 49–76.

3. Azhmoldaev G.F., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Homogenization of attractors to reaction–diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Critical case // Networks and Heterogeneous Media. 2024. Vol. 19, № 3. P. 1381–1401.

О Продолжении Магнитного Потенциала В Двумерной Области

Сатторов Э. Н.[1], **Актамов Х. С.**[2]

[1]Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан, sattorov-e@rambler.ru;

[2]Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан, husan19860405@gmail.com

Замечательные успехи в теоретическом анализе плоские задачи магнитометрии достигнуты за счет представления магнитные поле в виде контурного интеграла в комплексной плоскости–интегралов типа Коши [1]. С помощью этого представления удалось построить удобные численные алгоритмы решения прямой двумерной задачи [2], полностью изучить вопрос об аналитическом продолжении внешних полей в области, занятые массами, и расположении особых точек поля [3-5], исследовать условия единственности решения плоской обратной задачи [6], а также решить ряд других принципиальных вопросов теории плоского геопотенциального поля [7].

Пусть область Ω заполнена намагниченными массами с интенсивностью намагничения $I(x,y) = (I_x(x,y), I_y(x,y))$. Плотность дипольных моментов соответствующего двумерного поляризованного источника при этом, известно, равна

$$m(x,y) = 4\pi I(x,y)$$

where

$$\varphi_\sigma(y-x,u) = \left[\frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}} ImE_\rho(\sigma w) - ReE_\rho(\sigma w)\right]\cos(\nu\sqrt{u^2+s})+$$

$$+\left[ImE_\rho(\sigma w) + \frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}} ReE_\rho(\sigma w)\right]\sin(\nu\sqrt{u^2+s}), \nu = 2a(y_1-x_1), \qquad (1)$$

Соответственно комплексная поляризация источника записывается в виде

$$\mu(\zeta) = 4\pi I_x(x,y) + 4\pi I_y(x,y) = 4\pi I(\zeta),$$

где $I(\zeta)$ – комплексная интенсивность намагничения магнитных масс, заполняющих область Ω.

Теорема. *Пусть область Ω_ρ однородной намагниченности, т.е. комплексная интенсивность намагничения магнитных масс $I_0 = Const$. Комплексный магнитный потенциал $W(z)$ функция, голоморфная в области Ω_ρ в комплексной плоскости $\varsigma = y_1 + iy_2$ принадлежит классу $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$. Тогда для любой точки $z = x_1 + ix_2$ справедлива формула Карлемана*

$$W(x) = iI_0 \lim_{\sigma\longrightarrow\infty} W_\sigma(x) =$$

$$= iI_0 \lim_{\sigma\longrightarrow\infty} \int_S E_\rho[\sigma(\zeta - z)]\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\overline{\zeta}-z} d\zeta, \qquad (2)$$

сходимость равномерен на каждом компакте из Ω_ρ, здесь $E_\rho(w)$ –целая функция Миттаг–Леффлера.

Литература

1. Страхов В.И. В кн.: Развитие идей Г.А. Гамбурцева в геофизике. М.: Наука, 1982, с. 17-88.

2. Страхов В.Н., Лапина М.И., Кузнецова О.А. В кн.: Прикладная геофизика. М.: Недра, 1974, вып. 74, с. 106-124.

3. Цирульский А.В., Сиротин М.И. - Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1964, №1, с. 105-109.

4. Страхов В.Н. - - Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1970, №9, с. 44-58.

5. Страхов В.Н. - - Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1970, №12, с. 32-43.

6. Гласно В.Б., Страхов ВМ. В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977, с. 96-107.

7. Жданов М.С . Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 326 с.

Задача Со Смещением На Внутренних Характеристиках Для Одного Класса Уравнением Со Смещением

Аллакова Ш. И.[1]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
shaxnoza.allakova@mail.ru1

Пусть $D-$ конечная односвязная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси $y = 0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m > 0, A = A(-1, 0), B = B(1, 0)$.

На отрезке AB рассмотрим точку $E = E(c, 0)$, где $c \in I = (-1, 1)-$ интервал оси $y = 0$, и введем линейную функцию $y = p(x) = ax - b$, и $y = q(x) = a - bx$ отображающее отрезок $[-1, 1]$ на отрезок $[-1, c]$ и $[c, 1]$ где $a = (1+c)/2, b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = c,\ q(1) = 1$. Введем обозначения

$$\theta_k^*(p(x)) = \frac{p(x) + kc}{1+k} - i\left[\frac{(c - p(x))(m+2)}{2(k+1)}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_0^*(q(x)) = \frac{q(x) + c}{2} - i\left[\frac{(q(x) - c)(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

аффикс точки пересечения характеристики AC и BC, где $1 < k < +\infty$.

Задача JN . (Задача Жегалова -Нахушева с условием смещения на внутренних характеристиках)[1],[2]. В области D найти регулярное решение $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x),\ x \in [-1, 1], \tag{2}$$

$$\nu(q(x)) - \mu\nu(p(x)) = f_0(x),\ x \in (-1, 1), \tag{3}$$

$$b_0 u[\theta_k^*(p(x))] + c_0 u[\theta_0^*(q(x))] = f_1(x),\ x \in [-1, 1], \tag{4}$$

где $1 < k < +\infty$, μ, b_0, $c_0, -$ некоторая положительная постоянная, $\tau(x),\ f_0(x), f_1(x) \in C^2(\bar{I})-$ заданные функции.

Теорема 1. *Задача JN при выполнении условия*

$$|\lambda| = \left| \frac{2ab_0}{b\mu(k+1)c_0} \right| < 1$$

однозначно разрешима.

Литература

1. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии. // Учен.зып. Казанск. ун-та. 1962. 122(3). С.3-16.

2. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. // Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5.(1). С.44-59.

О Решение Краевой Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка, Содержащее Третью Производную По Времени В Полуограниченной Области

Апаков Ю. П.[1,2], **Меликузиева Д. М.**[2]

[1]Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз.,Ташкент,Узбекистан;
yusupjonapakov@gmail.com

[2]Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан;
meliquziyevadilshoda@gmail.com

Краевые задачи для уравнений четвертого порядка, содержащее третью производную по времени мало изучены [1-4].

В области $D^+ = \{(x,y): \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < +\infty\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \tag{1}$$

где p - действительное число, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A . Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $u(x,y) \in C^{4,3}_{x,y}(D^+) \cap \ C^{3,2}_{x,y}(D^+ \cup \Gamma_1)$, ограниченное вторую производную по y при $y \to +\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = u_{xx}(0,y) = u_x(p,y) = u_{xxx}(p,y) = 0, \ 0 \le y < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \ u_y(x,0) = \psi_2(x), \ \lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \ 0 \le x \le p, \tag{3}$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ -граница области D^+ , $\psi_1(x) \in C^4[0,p]$, $\psi_2(x) \in C^2[0,p]$ - заданные функции, причем

$$\psi_1(0) = \psi_1'(p) = \psi_1''(0) = \psi_1'''(p) = 0, \ \psi_2(0) = \psi_2'(p) = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однародными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^+.

Для этого уравнение (1) умножим на u , тогда получим

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy} - \frac{1}{2}u_y^2\right) + u_{xx}^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области $D_d = \{(x,y) : 0 < x < p, \quad 0 < y < d\}$, где $d > 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^d [u(p,y)\, u_{xxx}(p,y) - u(0,y)\, u_{xxx}(0,y)]dy - \\ &- \int_0^d [u_x(p,y)\, u_{xx}(p,y) - u_x(0,y)\, u_{xx}(0,y)]dy - \\ &- \int_0^p [u(x,d)\, u_{yy}(x,d) - u(x,0)\, u_{yy}(x,0)]dx + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^p \left[u_y^2(x,d) - u_y^2(x,0)\right]dx + \iint_{D_d} u_{xx}^2 dxdy = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Если $d \to +\infty$, то $D_d \to D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A, т.е. $\psi_i(x) = 0, \quad i = 1,2$, и свойства функции $u(x,y)$ при $y \to +\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^+)$, из (6) получаем

$$\frac{1}{2}\lim_{d\to+\infty}\int_0^p u_y^2(x,d)\,dx + \iint_{D^+} u_{xx}^2(x,y)\,dxdy = 0.$$

Из второго слагаемого имеем

$$u_{xx} = 0 \;\Rightarrow\; u(x,y) = x \cdot f_1(y) + f_2(y),\ (x,y) \in D^+ \cup \Gamma_1.$$

где $f_1(y), \quad f_2(y) -$ произвольные функции, удовлетворяюшие всем условиями задачи.

Полагая $x = 0$, имеем

$$u(0,y) = f_2(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2(y) = 0,$$

а $x = p$, имеем

$$u_x(p,y) = f_1(y) = 0.$$

Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$, в $D^+ \cup \Gamma_1$.

Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

Используя метода Фурье решение задачи A построено в виде:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(e^{-\frac{1}{2}k_n y}\left(C_{2n}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right) + C_{3n}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right)\right)\right), \tag{7}$$

здесь $X_n(x)$ - собственные функции, имеют вид:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{\pi}{2p}(2n-1)\,x.$$

Теорема 2. Если функции $\psi_1(x) \in C^4[0,p]$, $\psi_2(x) \in C^2[0,p]$, и выполняется условия (4), то решение задачи A сушествуют, и представляется в виде (7).

Доказана, что ряд (7) и его производные u_{xxxx}, u_{yyy} сходится абсолютно и равномерно.

Литература

1. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. // Вестник. НамГУ. 2022 г, (5).С.82–91.

2. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate.// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023 Vol. 44, No. 8. pp.3218–3224. DOI:10.1134/S1995080223080061

3. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time.// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2023. №.4(112).pp.30–40. DOI:10.31489/2023M4/30-40

4. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On the solution of a boundary problem for a fourth order equation containing a third time derivative in semi- bounded domains.// Uzbek Mathematical Journal. 2024. Volume 68. Issue 3. pp 5–11. DOI: 10.29229 / uzmj. 2024-3-1

Конфлюэнтные Гипергеометрические Функции И Их Применение К Решению Задачи Дирихле Для Уравнения Гельмгольца С Тремя Сингулярными Коэффициентами

З. Арзикулов[1], А. Хасанов[2], Т.Г. Эргашев[3]

[1]Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан;
zafarbekarzikulov1984@gmail.com;
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан; anvarhasanov@yahoo.com;
[3] Национальный исследовательский университет "ТИИИМСХ" ;
ergashev.tukhtasin@gmail.com;

Исследуется конфлюэнтная гипергеометрическая функция от $n+1$ переменных

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{array}{c} a, b_1, ..., b_n; \\ c_1, ..., c_n; \end{array} x_1, ..., x_n; y\right] = \sum_{k_1,...,k_n,l=0}^{\infty} (a)_{k_1+...+k_n-l} \prod_{j=1}^{n} \frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!} \cdot \frac{y^l}{l!}, \ \sum_{j=1}^{n} |x_j| < 1,$$

установленные новые свойства которой применяются к решению задачи Дирихле первом октанте для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами. Конфлюэнтная функция $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ впервые появилась при построении фундаментальных решений многомерного сингулярного уравнения Гельмгольца [1].

Здесь и далее $(\nu)_0 = 1, \quad (\nu)_m = \nu(\nu+1)...(\nu+m-1), \ m = 1, 2, ...$ обозначает символ Похгаммера.

Первую получетверть трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}_3$ обозначим через $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, \ y > 0, \ z > 0\}$. Пусть (x, y, z) и (ξ, η, ζ) – две точки области Ω. Обозначим $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

В области Ω рассмотрим обобщенное трехмерное уравнение Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z - \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

где α, β и γ – действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$.

Задача Дирихле. Найти регулярное решение $u(x,y,z)$ сингулярного уравнения Гельмгольца (1) из класса функций $C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,y,0) = \tau_1(x,y), \quad 0 \le x,y < \infty, \; u(x,0,z) = \tau_2(x,z), \quad 0 \le x,z < \infty,$$

$$u(0,y,z) = \tau_3(y,z), \quad 0 \le y,z < \infty, \; \lim_{R\to\infty} u(x,y,z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

где $\tau_{1,2,3}(t,s)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования в начале координат $\tau_1(0,0) = \tau_2(0,0) = \tau_3(0,0)$ и в боковых ребрах области Ω:

$$\tau_1(x,0) = \tau_2(x,0), \; \tau_1(0,y) = \tau_3(y,0), \quad \tau_2(0,z) = \tau_3(0,z), \; x,y,z \in \overline{\Omega}.$$

Единственность решения поставленной задачи доказывается методом принципа экстремума для эллиптических уравнений.

Воспользовавшись известным фундаментальным решением

$$q = k_3 xyz\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}r^{4\alpha+4\beta+4\gamma-2a-6}\times$$
$$\times \mathrm{H}_A^{(3,1)}\left[\begin{matrix} a+3-2\alpha-2\beta-2\gamma, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} \; -\frac{4x\xi}{r^2}, -\frac{4y\eta}{r^2}, -\frac{4z\zeta}{r^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r^2\right],$$

решение задачи Дирихле выпишем в явном виде

$$u(x,y,z) = (1-2\gamma)\, k_3 x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\tau_1(t,s)\,ts}{r_1^{2a}}\times$$
$$\times \mathrm{A}_2\left[\begin{matrix} a,\, 1-\alpha, 1-\beta; \\ 2-2\alpha,\, 2-2\beta; \end{matrix} \; -\frac{4xt}{r_1^2}, -\frac{4ys}{r_1^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_1^2\right] dtds$$
$$+ (1-2\beta)\, k_3 x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\tau_2(t,s;)\,ts}{r_2^{2a}}\times$$
$$\times \mathrm{A}_2\left[\begin{matrix} a,\, 1-\alpha, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha,\, 2-\gamma; \end{matrix} \; -\frac{4xt}{r_2^2}, -\frac{4zs}{r_2^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_2^2\right] dtds$$
$$+ (1-2\alpha)\, k_3 x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}z^{1-2\gamma}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\tau_3(t,s;)\,ts}{r_3^{2a}}\times$$
$$\times \mathrm{A}_2\left[\begin{matrix} a,\, 1-\gamma, 1-\beta; \\ 2-2\gamma,\, 2-2\beta; \end{matrix} \; -\frac{4yt}{r_3^2}, -\frac{4zs}{r_3^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_3^2\right] dtds,$$

где

$$a = 7/2 - \alpha - \beta - \gamma, \;\; r_1^2 = (x-t)^2 + (y-s)^2 + z^2,$$
$$r_2^2 = (x-t)^2 + y^2 + (z-s)^2, \quad r_3^2 = x^2 + (y-t)^2 + (z-s)^2,$$
$$\mathrm{A}_2\left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} \; x,y,z\right] = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-k}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^k}{k!}, \;\; |x|+|y|<1.$$

Отметим, что конфлюэнтные гипергеометрические функции A_2 и $\mathrm{H}_A^{(3,1)}$ являясь трех- и четырехмерными аналогами конфлюэнтной функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$, впервые введены и исследованы в работах [2] и [3], соответственно.

Литература

1. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, 41(1), p. 15 – 26.

2. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations, 2007, 52(8), p. 673 – 683.

3. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients. Computers and Mathematics with Applications, 2019 77(1), p. 69 – 76.

Обыкновенные Интегро-Дифференциальные Уравнения Второго Порядка С Вырождением

Баротов Б. Х.[1], **Кожанов А. И.**[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
b.barotov@g.nsu.ru
Институт математика им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsu.ru

В настоящей работе рассматриваются постановка и разрешимость краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с вырождением и с коэффициентами произвольного вида

$$h_0(t)u''(t) + h_1(t)u'(t) + h_2(t)u(t) - \int_0^t R(t,\tau)u(\tau)d\tau = f(t)$$

в которых $t \in (0,T)$, функции $h_0(t)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ могут обращаться в нуль на отрезке $[0,T]$. Данное уравнение в случае $h_0(t) \equiv 0$ совпадает с уравнениями, рассмотренными в работе [1] а в случае $h_0(t) \equiv 0$ и $h_1(t) \equiv 0$ – с уравнениями, изученными в работе [2]. Для таких уравнений плохо работают методы, основанные на явных представлениях решений, и тем самым требуются какие-либо иные подходы.Одним из основных подходов в настоящей работе будет подход, основанный на методе регуляризации. Суть этого подхода состоит в том, что исходное уравнение с вырождением (исходная задача) заменяется уравнением без вырождения, содержащим слагаемое с малым параметром. Для нового уравнения работают результаты той или иной классической теории. Далее для решений новой (регуляризованной) задачи доказывается, что они обладают некоторыми свойствами, позволяющими перейти к пределу при стремлении малого параметра к нулю, и что предельная функция будет представлять собой решение исходной задачи для вырождающегося обыкновенного интегро - дифференциального уравнения.

Литература

1. Kozhanov, A.I., Barotov, B.K. Volterra Type Integro-Differential Equations with Degeneracy. J Math Sci 287, 69–75 (2025).

2. Кожанов А. И. Исследование разрешимости некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений третьего рода Вольтерровского типа. Доклады Академии Наук, 2018, том 478., №3., с. 262–265.

Нелокальные Задачи Для Эллиптических И Псевдоэллиптических Уравнений

Ван Минь

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
m.van2@g.nsu.ru

В работе изучается разрешимость нелокальной по временной (выделенной) переменной краевых задач для псевдоэллиптического уравнения. Особенностью изучаемых задач является то, что нелокальное условие включает в себя известное условие Самарского-Ионкина. Ранее подобные задачи для псевдоэллиптических уравнений не изучались. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, а имено, решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

В процессе исследования разрешимости изучаемых задач будут использоваться метод априорных оценок.

Об Эллиптическом Псевдодифференциальном Уравнении В Трехгранном Угле

Васильев В. Б.[1], Гебресласи Х. Ф.[2]

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия;
vbv57@inbox.ru
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия;
rhadishfe@gmail.com

Основной объект исследования в этой работе – модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в конусе евклидова пространства. Модельный псевдодифференциальный оператор A в конусе $C \subset \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$(Au)(x) = \int\limits_C \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\xi) u(y) e^{i(y-x)\xi} d\xi dy, \quad x \in C,$$

где заданная функция $A(\xi)$ называется символом оператора A.

Мы исследуем уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^a \times (0, +\infty)} \tag{1}$$

с интегральными условиями

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3) dx_2 = f(x_1, x_3), \tag{2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 = g(x_1, x_2), \tag{3}$$

где: $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, и

$$C_+^a \times (0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = (x_1, x_2, x_3), x_2 > a|x_1|, x_3 > 0, a > 0\},$$

решение u разыскивается в пространстве $H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^a \times (0,+\infty)})$, f, g – заданные функции из $H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$. Относительно символа предполагается, что $A(\xi)$ обладает свойством

$$|A(\xi)| \sim (1+|\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

и допускает волновую факторизацию [1]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

относительно $-(C_+^a \times (0,+\infty))$ с индексом æ , таким, что æ $- s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$.

Выбор интегральных условий (2),(3) при таком индексе волновой факторизации связан со структурой общего решения уравнения (1) и возможностью получения достаточно простой формулы решения задачи (1),(2),(3).

Введем два оператора

$$P = \frac{1}{2}(I+S), \qquad Q = \frac{1}{2}(I-S),$$

где I – единичный оператор, S – одномерный сингулярный интегральный оператор, действующий по формуле

$$(Su)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{i}{\pi} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta,\xi_2,\xi_3)d\eta}{\xi_1 - \eta}.$$

Преобразование Фурье функции u обозначается $\tilde{u}$.

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+^a \times (0,+\infty))$ с индексом æ таким, что æ $- s = 1+\varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$, то общее решение уравнения (1) может быть записано в виде*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)((P\tilde{c}_0)(\xi_1+a\xi_2,\xi_2)+(P\tilde{d}_0)(\xi_1+a\xi_2,\xi_3)+(Q\tilde{c}_0)(\xi_1-a\xi_2,\xi_2)+(Q\tilde{d}_0)(\xi_1-a\xi_2,\xi_3)).$$

где $c_0, d_0 \in H^{s-æ-1/2}(\mathbb{R}^2)$ – произвольные функции.

Теорема 2. *Предположим, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+^a \times (0,+\infty)$ с индексом æ таким, что æ $- s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$. Если существует*

$$\lim_{a\to 0} A_{\neq}(\xi) = a_{\neq}(\xi),$$

то единственное решение задачи (1),(2),(3) можно записать в виде

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)((P\tilde{h})(\xi_1 + a\xi_2, \xi_2, \xi_3) + (Q\tilde{h})(\xi_1 - a\xi_2, \xi_2, \xi_3))$$

где

$$\tilde{h}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = A_{\neq}(\xi_1,0,\xi_3)\tilde{f}(\xi_1,\xi_3)) + a_{\neq}(\xi_1,\xi_2,0)\tilde{g}(\xi_1,\xi_2) - A_{\neq}(\xi_1,0,0)\tilde{f}(\xi_1,0))$$

Некоторые другие типы канонических негладких областей и другие типы граничных условий рассмотрены в работах [2,3].

Литература

1. Vasil'ev V.B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers,, 2000.

2. Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф. О задаче Дирихле в плоской области с разрезом //ПМ&Ф. 2023. Т.55, № 3. С. 258–264.

3. Gebreslasie H.F., Vasilyev V.B. On elliptic pseudo-differential equations with an integral condition in a special multidimensional cone // Lobachevskii J. Math. 2024. V.45, № 11. P. 5487–5496.

О Линейной Двухточечной Обратной Задаче Для Многомерного Волнового Уравнения С Нелокальными Граничными Условиями

Джамалов С. З.[1], **Худойкулов Ш. Ш.**[2]

[1] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
siroj63@mail.ru

[2] Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства;
xudoykulov1194@gmail.com

Пусть Ω-односвязная область в пространстве R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области

$$G = \Omega \times (0,T) \times (0,l) = Q \times (0,l) \subset R^{n+2}$$

рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$Lu = u_{tt} - \Delta_x u - u_{yy} + a(x,t)u_t + c(x,t)u = g(x,t,y) + \sum_{i=1}^{2} h_i(x,t) f_i(x,t,y), \qquad (1)$$

где $\Delta_x u = \sum\limits_{m=1}^{n} u_{x_m x_m}$-оператор Лапласа, по переменим x, здесь $a(x,t)$, $c(x,t)$, $g(x,t,y)$ и $f_i(x,t,y)$, $i = 1,2$-заданные функции, $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$-неизвестные функции.

Постановка задачи. Найти функции $u(x,t,y), h_1(x,t), h_2(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\,|_{t=0} = D_t^p u\,|_{t=T},\ p = 0,1, \qquad (2)$$

$$\eta D_x^p u\,|_{x=0} = D_x^p u\,|_{x=1},\ p = 0,1\ , \qquad (3)$$

$$u\,|_{y=0} = u\,|_{y=l} = 0, \qquad (4)$$

где γ, η-некоторые постоянные числа. Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительными условиями

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \qquad (5)$$

$$u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t), \qquad (6)$$

где $0 < \ell_1 < \ell_2 < \ell < +\infty$, а функции $u(x,t,y)$ и $h_i(x,t),\ i = 1,2$ принадлежат классу

$$U = \{u, h_i,\ i = 1,2 |\, u \in W_2^{2,3}(G),\ h_i \in L_2(Q)\}.$$

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропная пространства Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1+\mu_k^2)^3 \left\|u_k\,(x,t)\right\|^2_{W_2^2(Q)},$$

где через $u_k(x,t)$ обозначены коэффициенты разложения Фурье функций $u(x,t,y)$ по системе $Y_k(y) = \left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_k y\right\}$, $\mu_k = \frac{\pi k}{\ell}$, $k = 1,2,3,...$; $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент.: «Fan ziyosi», 2021.

Об Одной Линейной Обратной Задаче Для Трехмерного Уравнения Чаплыгина С Полупериодическими Краевыми Условиями В Неограниченном Параллелепипеде

Джамалов С. З.[1], **Туракулов Х. Ш.**[2]

[1] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[2] Кокандский государственный университет;
siroj63@mail.ru hamidtsh87@gmail.com

В данной работе с использованием результаты работ [1], с применением преобразования Фурье, изучено однозначная разрешимость некоторой линейной обратной задачи с полупериодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x) u_{tt} - \Delta u + a\,(x)\, u_t + c\,(x,t)\, u = \psi\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $x\,K(x) > 0,\ x \neq 0, x \in (-1,1)$; $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа.
Здесь $\psi\,(x,t,z) = g\,(x,t,z) + h\,(x,t) \cdot f\,(x,t,z)$, $g\,(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,z),\ h(x,t)\}$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u\,(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полупериодическим краевым условиям:

$$D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0 \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. (4)

и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \tag{5}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу $U = \{(u,h) |\ u \in W_2^{2,3}(G);\ h \in W_2^2(Q)\}$. Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизатропная пространство Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ пространство Соболева.

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент.: «Fan ziyosi», 2021.

Об Одной Линейной Обратной Задачи Для Многомерного Уравнения Смешанного Типа Второго Рода, Четвертого Порядка

Джамалов С. З.[1], **Халхаджаев Б. Б.**[2]

[1] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
siroj63@mail.ru

[2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
xalxadjaev@yandex.ru

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами [1]. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнения математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений математической физики и для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка [2],[3-6]. Практические не исследовании обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка. В данной работе предлагается новый метод, который позволяет доказать однозначное разрешимость некоторых линейных обратных задач для многомерного уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка. Работа выполнена при финансовой поддержке научного гранта №Ф-ФА-2021-424 при Министерстве инновационного развития Республики Узбекистан.

Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский. А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. ДАН.СССР, 1969, т.185, №.4, с.740.

2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.

3. K.B. Sabitov, "On the uniqueness of solutions to inverse problems for equations of various types in finding their right-hand side."Lobachevski Jour.Math. 45 (1) 532-539 (2024). [in Russian]

4. С.З.Джамалов, Р.Р.Ашуров Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка. // Дифференциальные уравнения. 2019. Т.55. №. 1, с.34-44.

5. С.З.Джамалов, Р.Р.Ашуров Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. // Известия ВУЗов. Математика. 2019, №.6, с.1-12.

6. С.З.Джамалов Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа// Монография. Ташкент. 2021 г., с. 176.

Об Одной Коэффициентной Обратной Задаче С Полунелокальными Краевыми Условиями Для Трехмерного Уравнения Трикоми В Параллелепипеде

Джамалов С. З.[1], **Шакиров А. А.**[2]

[1,2] Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
siroj63@mail.ru; shokirov.abduvosiq96@gmail.com

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) =$$

$$= \{(x,t,y) |\ -1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - au_{xx} - u_{yy} + \alpha(x,t)u_t = c(x,t)u + \psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $a-$достаточно большое число, $\alpha(x,t)-$ достаточно большая функция, $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ заданные функции, а функции $h(x,t)$ и $c(x,t)$ подлежат определению.

Коэффициентная обратная задача

Найти функции $(u(x,t,y),\ h(x,t),\ c(x,t))$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. полунелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0,1 \tag{2}$$

$$D_x u|_{x=-1} = D_x u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0 \tag{4}$$

где γ - некоторое постоянное число, отличное от нуля;

2. дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t) \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_1)=\varphi_1(x,t),\quad 0<\ell_0<\ell_1<\ell<+\infty \tag{6}$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, $c(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\left\{(u,\ h,\ c)|\ u\in W_2^{2,3}(G),\ h\in W_2^2(Q),\ c\in W_2^2(Q),\ \ \|c\|^2_{(Q)}\le r\right\}$$

где $r-$положительное число точное значения, которое будет определено ниже. Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропная пространства Соболева с нормой

$$\langle u\rangle^2_{l,s}=\|u\|^2_{W_2^{l,s}(G)}=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k^2)^s\left\|u_k\left(x,t\right)\right\|^2_{W_2^l(Q)}, \tag{A}$$

где $W_2^l(Q)$ пространства Соболева, $u_k(x,t)$ означают коэффициентов Фурье функции $u(x,t,y)$, $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}, k=1,2,3....$

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент. «Fan ziyosi», 2021.

Коэффициентная Обратная Задача Для Уравнения Смешанного Параболо-Гиперболического Типа С Нелокальными Условиями

Дурдиев Д. К.

Институт Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, г. Ташкент 100170, ул. Университет, 46.
Бухарский государственный университет, Узбекистан, 200117, Бухара, ул. М. Икбола, 11.
e-mail: durdievdd@gmail.com

Изучены прямая и обратная задачи для модельного смешанного параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа. В прямой задаче исследована нелокальная задача для этого уравнения с внутреннекраевыми условиями в гиперболической части области. Неизвестным обратной задачи является переменный коэффициент при младшем члене в параболическом уравнении. Для его определения изучается обратная задача, если известно относительно решения, определяемого в параболической части области, интегральное условие переопределения. Доказана теорема однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Пусть Ω_{lT} - область на плоскости переменных x,y, опеделяемая соотношением $\Omega_{lT}=\Omega_{1lT}\bigcup\Omega_{2l}\bigcup\{0<x<l,y=0\}$, где $\Omega_{1lT}=\{(x,y):0<x<l,0<y\le T\},\Omega_{2l}=\left\{(x,y)\ :\ -y<x\le y+l,-\frac{l}{2}<y<0\right\},l>0,T>0-$ фиксированные числа. В этой области рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu(x,y)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1-\operatorname{sign}y}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1+\operatorname{sign}y}{2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1+\operatorname{sign}y}{2}q(x)u(x,y)=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) является смешанным и для него линия изменения типа $y = 0$ является характеристикой.

Прямая задача. Найти в области Ω_{lT} решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad y \in [0,T], \tag{2}$$

и условиям смещения

$$\begin{gathered} u\left[\theta_0(x)\right] = \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-j}^i u\left[\theta_{x_i}(x)\right] + \psi_{n-j}(x), \\ x_{n-1-j} \le x \le x_{n-j}, \quad j = n-1, \ldots, 1, 0; \quad x_0 = 0, \quad x_n = l, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_k(x)$ - заданные функции; $\theta_{x_i}(\xi) = \left(\frac{x_i+\xi}{2}, \frac{x_i-\xi}{2}\right)$ - точка пересечения характеристики $x-y=\xi$ с характеристикой $x+y=x_i; \theta_0(\xi) = \theta_0, a_k^i = \text{const}$ и $a_k^i = 0$ для $i = k$.

Краевые условия вида (3) впервые были предложены А.М. Нахушевым [1]. Определение.

Классическим решением задачи (1)-(3) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C\left(\bar{\Omega}_{lT}\right) \cap C^1\left(\Omega_{lT}\right) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(\Omega_{1lT}\right) \cap C^2\left(\Omega_{2l}\right)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В обратной задаче предполагается неизвестным коэффициент $q(x)$ уравнения (1). В данной работе, мы изучим задачу определения этого коэффициента $q(x) \in C[0,T]$, если относительно решения прямой задачи (1)-(3) задано дополнительное условие

$$\int_0^T h(y)u(x,y)dy = f(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

где $h(y), f(x)$ - заданные достаточно гладкие функции. Таким образом, обратную задачу можно трактовать как задачу определения пары функций $u(x,y)$ и $q(x)$ из класса $C\left(\bar{\Omega}_{lT}\right) \cap C^1\left(\Omega_{lT}\right) \cap C_{x,y}^{1,2}\left(\Omega_{1lT}\right) \cap C^2\left(\Omega_{2l}\right) \times C[0,T]$, удовлетворяющую равенствам (1)-(4).

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

$B1: \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0,T], \psi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l);$

$B2: \varphi_1(0) = \varphi_2(0),$

$$m_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_k^i \neq 0, (m_k)^{-1} \lim_{x \to x_k - 0} \frac{d^\lambda \psi_k(x)}{dx^\lambda} = (m_{k+1})^{-1} \lim_{x \to x_k + 0} \frac{d^\lambda \psi_{k+1}(x)}{dx^\lambda},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1; \lambda = 1, 2;$$

$$B3: h(y) \in C^1[0,T], h(0) = h(T) = 0, f(x) \in C^2[0,l], \int_0^T h(y)\varphi_1(y)dy = f(0),$$

$$\int_0^T h(y)\varphi_2(y)dy = f(l), f(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in [0,l].$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $B1, B2, q(x) \in C[0,l]$ и

$$l\|q\|_{C[0,l]} < 1.$$

Тогда существует в области Ω_{lT} *единственное решение прямой задачи (1)-(3).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $B1 - B3$. *Тогда существуют числа* $l^* \in (0,l), T^* \in (0,T)$ *такие, что в области* $\Omega_{1l^*T^*}$ *обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение* $u(x,y) \in C\left(\Omega_{1l^*T^*}\right), q(x) \in C\left[0,l^*\right]$.

Литература

1. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений смешшаного типа // Дифференц. уравнения. 1969. 5:1. С. 44–59.

Разрешимость Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка С Импульсным Воздействием

Елгондиев К.К.[1], **Бекиев А.Б.**[2]

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Каракалпакстан;
elgondiev.61@gmail.com
Каракалпакский государственный университет, Нукус, Каракалпакстан;
ashir1976@mail.ru

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важное прикладное значение в строительной механике, теория устойчивости вращающихся валов, вибрация кораблей и др. Такие задачи приводят k исследованию дифференциальных уравнений и частных производных четвертого порядка. В данной работе рассмотрен случай уравнения в частных производных четвертого порядка с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [1].

В области $\Omega = \{(x,t): \ x \in [0,p], \quad t \in [0,+\infty) \backslash \{t_k, k \in N\}\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv a^2 t^m u_{xxxx} + u_{tt} = 0, \ \ t \neq t_k, \ k = 1,2,... \tag{1}$$

где $a = const, \ m = const > 0$.

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнение (1) удовлетворяющее условиям импульсных воздействий

$$\Delta u_t|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x,t_k+0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t_k-0)}{\partial t} = I_k(x), \ 0 \leq x \leq p, \tag{2}$$

а также граничным условием

$$u(0,t) = u(p,t) = 0, \ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(p,t) = 0, \ \ 0 \leq t < +\infty, \tag{3}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x), \ \ 0 \leq x \leq p, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $I_k(x)$, $k = 1,2,...$ заданные функций удовлетворяющий условиям $\varphi(0) = \varphi(p) = 0, \ \psi(0) = \psi(p) = 0, \ I_k(0) = I_k(p) = 0, \ k = 1,2,\ldots$. Смешанные задачи для уравнения (1) при $m = 0$ рассмотрены в литературе [5-6]. Решением уравнения

(1) с импульсным воздействием (2) называется функция $u(x,t)$, удовлетворяющие при $t \neq t_k$, $k = 1,2,...$ уравнению (1), при $t = t_k$, $k = 1,2,...$ условиям импульсных воздействии (2), а также граничным и начальным условиям (3) и (4) соответственно. Относительно моментов импульсных воздействий предполагаем, что $t_m < t_k$ при $m < k$ и $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Решение задачи (1)-(4) при $t \neq t_k$, $k = 1,2,...$ получена в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{p} x$$

по собственным функциям $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{p} x,\ n = 1,2,...$ граничной задачи

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < p,\quad X(0) = X(p) = 0,\ X''(0) = X''(p) = 0.$$

Коэффициенты $T_n(t),\ n = 1,2,...$ ряда Фурье определены как решения счетной системы дифференциальных уравнений

$$T_n{}''(t) + a^2 t^m T_n(t) = 0,\ t \neq t_k$$

с импульсным воздействием

$$\Delta T_n{}'(t)|_{t=t_k} = T_n{}'(t_k + 0) - T_n{}'(t_k - 0) = I_{kn},$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = \varphi_n,\ T_n{}'(0) = \psi_n,$$

где

$$I_{kn} = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p I_k(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx, \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx, \psi_n = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \psi(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Показано, что решение задачи (1)-(4) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_n}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}} \psi_n J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) + \Gamma\left(1 - \frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_n}{2}\right)^{\frac{1}{2q}} \varphi_n J_{-\frac{1}{2q}}(p_n t^q) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_{jn}\sqrt{t_j}}{p_n t_j^q q \Delta(t_j)} \left(J_{\frac{1}{2q}}\left(p_n t_j^q\right) J_{-\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_n t_j^q\right) J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right) \right] \sqrt{t} \sin \frac{\pi n}{p} x. \qquad (5)$$

Проверено, что полученное решение полностью согласуется с формулами для решения задачи (1), (3) и (4) построенного, без учета условий импульсных воздействий (2). Приведены условия, при выполнении которых ряд в правой части формулы (5) равномерно сходится. Аналогичные задачи для уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа при $t = 1$ рассмотрены в работах [2-4].

Литература

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non–linear Sciences. Ser. A. V.14. Singapore: World Scientific. 1995. 462 p.

2. Елгондиев К.К., Бекимов М.А. Многомерные колебания с импульсным воздействием// Вестник ККГУ им. Бердаха . 2008. №1. С.10-14.

3. Елгондиев К.К. Колебания струны с импульсным воздействием // Ж. Вестник Крас.ГУ. Серия: физико–математические науки. 2006. №9.С.114-118.

4. Elgondiev K.K., Kurbanbaev O.O., Matmuratova S.R. String oscillations with impulse effects// Karakalpak Scientific journal, 2020, Vol. 3, 46–52 p.

5. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, №2. С. 311–324

6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. –М.: Мир, 1985. –384 с.

О Единственности Задачи С Комбинированным Локальным И Нелокальным Условиями На Одной Граничной Характеристике Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа

Эргашева С. Б.[1], Аманов Б. Б.[2], Мирсабурова У. М.[3]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
sarvinozergasheva96@mail.ru1
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
amonovbobur91@mail.ru2
Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru3

В настоящей работе в некоторой конечной смешанной области для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0$ исследуется задача с комбинированными условиями Трикоми и аналогом условия Франкля на одной граничной характеристике. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума А.В.Бицадзе.

Постановка задачи Трикоми-Франкля (TF)**.**

Пусть $D-$ ограниченная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\sigma_0\,(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1,0),\ B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C^* соответственно точки пересечения характеристики AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$ и $E(1/2,0)$.

Пусть $\omega(x) = 1 - x$ линейная функция, отображающая отрезок $[0,1/2]$ на отрезок $[1/2,1]$, причем $\omega(0) = 1,\ \omega(1/2) = 1/2$.

В задаче Трикоми [1, с.29] во всех точках характеристики AC задается значения искомой функции. В данной работе исследуется корректность задачи, которая отличается от задачи Трикоми тем, что куски C_0C^* и C^*C, характеристики AC освобождены от локального краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условия Франкля [2] на кусках $C_0C^* \subset AC$ и $C^*C \subset AC$ и на сегментах OE и EB отрезка AB оси $y = 0$.

Задача TF**.** Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщенным решением класса R_1 уравнения (1) ($u(x, y) \in R_1$, если в формуле Даламбера $\tau'(x),\ \nu(x) \in H$);

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\ x \in (-1, 1)/\{0, 1/2\},$$

причем эти приделы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)\mid_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$u(x, y)\mid_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, -1/2],$$

$$u\left[\theta(x)\right] - u\left[\theta\left(\omega(x)\right)\right] = f_0(x), \quad x \in [0, 1/2], \tag{2}$$

$$u(x, 0) - u\left(\omega(x), 0\right) = u(1/2, 0) + f(x), \quad x \in [0, 1/2], \tag{3}$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0}{2} - i\left[\frac{x_0(m+2)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0)-$ аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $(x_0, 0),\ x_0 \in [0, 1/2]$.

Заданные функции $\varphi(x),\ \psi(x),\ f_0(x),\ f(x)-$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1 - x^2)\varphi_0(x),\ \varphi_0(x) \in C^1[-1, 1],\ f(0) = 0,\ f(1/2) = 0$.

Заметим, что условия (2) и (3) являются аналогами условия Франкля [2] соответственно на участках C_0C^* и C^*C характеристики AC и на сегментах OE и EB отрезка AB оси $y = 0$.

Единственность решения задачи TF**.**

Теорема. *Решение задачи* TF *при однородных краевых данных:* $\psi(x) \equiv 0,\ f_0(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 0$, *своих наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области* $\bar{D}^+$ *принимает только в точках кривой* σ_0.

Доказательство теоремы приводиться методом работ [3].

Из доказанной теоремы следует:

Следствие. *Задача* TF *имеет не более одного решения.*

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.Гос.тех.издат, 1947.

2. Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.// Прикладная математика и механика 1956. Том 20, №2. С.196-202.

3. Мирсабуров М. Задача с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. // Дифференциальные уравнения 2017 г. Том 53, №6, с. 778-788.

О Продолжении Решений Обобщенной Системы Коши-Римана В Многомерной Пространственной Области По Их Значениям На Куске Границы Этой Области

Эрмаматова Ф.Э.

Узбекско - Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан;
fotimaermamatova817@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача восстановления решения система уравнений [1],[2]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}+H_i\right)=0,$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_j}-H_kF_j+H_jF_k=0,(i,k,j=1,...,n), \tag{1}$$

которая является n- мерным аналогом обобщенной системы Коши-Римана, по ее известным значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Пусть R^n- вещественное $n-$ мерное евклидово пространство,

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ \ y=(y_1,\dots,y_n)\in R^n,\ \ x'=(x_1,\dots,x_{n-1}),\ y'=(y_1,\dots,y_{n-1})\in R^{n-1},$$

$$s=\alpha^2=|y'-x'|=(y_1-x_1)^2+\dots+(y_{n-1}-x_{n-1}^2,\ \ r^2=s+(y_n-x_n)^2=|y-x|^2,$$

$\Omega-$ ограниченная односвязная область в R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_n=0$ и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_n>0,\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega,\partial\Omega=T\cup S$,

$F(x)=(F_1(x),F_2(x),\dots,F_n(x))-$ вектор-функция, которые имеют в этой области непрерывные производные первого порядка.

Постановка задачи (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S :

$$F(y)=f(y),y\in S, \tag{2}$$

где $f(y)=(f_1(y),\cdots,f_n(y))-$ заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить функцию $F(x)$ в Ω, исходя из заданной f,

Предположим, что вектор-функции $F(y)\in A(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ на поверхности $\partial\Omega$ удовлетворяют неравенству

$$|F(y)|\le K,y\in T, \tag{3}$$

где K - заданное положительное число. При этом предположении верна обобщенная интегральная формула Коши [2]

$$F(x) = \int\limits_{\partial\Omega} M_\sigma(y, x; H)F(y)dS_y, x \in \Omega. \tag{4}$$

Обозначим

$$F_\sigma(x) = \int\limits_{S} M_\sigma(y, x; H)F(y)dS_y, x \in \Omega. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть вектор-функции $F(y) \in A(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ удовлетворяют условию (3). Тогда для любого $x \in \Omega$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство*

$$|F(x) - F_\sigma(x)| \leq K\psi_1(\sigma; H)exp(-\sigma x_n^2), x \in \Omega. \tag{6}$$

где

$$\psi_1(\sigma; H) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2+\pi}{2\sqrt{\pi}} + \frac{|H|}{\sqrt{\sigma}} \right). \tag{7}$$

Следствие. *Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\lim_{\sigma\to\infty} F^\sigma(x) = F(x), \tag{8}$$

причем предел достигается равномерно на компактах из Ω.

Литература

1. Е.И. Оболашвили "Обобщенная система Коши-Римана в многомерном евклидовом пространстве // Сборник трудов конференции "Комплексный анализ"ГДР, Гале, 1976.

2. Е.И. Оболашвили "Обобщенная система Коши-Римана в многомерном пространстве Труды Тбилисского Математического Института, 1978, т. 58. С. 168-173.

Нелокальные Задачи С Условиями Интегрального Вида Для Вырождающихся Уравнений

Эшонкулов А. Ю.,[1] Кожанов А. И.[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]a.eshonkulov@g.nsu.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[2]kozhanov@math.nsc.ru

В работе изучается разрешимость нелокальных краевых задач с интегральными условиями для вырождающихся параболических уравнений второго порядка.

Нелокальные задачи с интегральными условиями можно считать естественным обобщенном обычных краевых задач для или иных классов дифференциальных уравнений. Подобные задачи хорошо изучены для обычных параболических и гиперболических уравнений, для некоторых неклассических дифференциальных уравнений прежде всего в работах А.И. Кожанова , Л.С. Пулькиной и их учеников – см.работы [1]-[5].

Работа будет посвящена исследованию разрешимости задач с интегральными условиями для дифференциальных уравнений

$$u_t - h(t)\Delta u + c(x,t)u = f(x,t)$$

Эти уравнения являются вырождающимися параболическими уравнениями,но,поскольку функция $h(t)$ в этих уравнениях будет неотрицательной и может обращаться в нуль, то данные уравнения будут вырождающимися параболическими уравнениями.

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми необходимыми обобщенными производными по С.Л.Соболеву.

Литература

1. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещеннем для линейных гиперболических уравнений.Математический журнал (Казахстан). 2009. Т.9., №2. С. 78-92.

2. Пулькина Л.С. Задача с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-Самарского ун-та.2012

3. Кожанов А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений. 2014. Т.457, №2. С.152-156

4. А.И. Кожанов, А. В. Дюжева Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:3 (2021), 423–434

5. А.И. Кожанов, А.В.Дюжева Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка, Матем. заметки, 111:4 (2022), 540–550

Краевые Задачи С Разрывными Условиями Для Нагруженного Уравнения Смешанного Типа, Вирождающегося Внутри Области

Жураев Ф. М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
fjm1980@mail.ru

Краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева [1], В.М. Казиева [2], Б. Исломова и Ф. Джураева [3], Р.Р. Ашурова и С.З. Жамалова [4]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Данная работа изучаются локальные краевые задачи с разрывными условиями для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y , ограниченная кривыми:

$$S_j: \ \ |x| = 1, \ \ 0 < y < 1, \ S_3: \ \ 0 < x < 1, \quad y = 1, \ S_4: \ \ -1 < x < 0, \quad y = 1,$$

$$\Gamma_j: \ |x| - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \quad \Gamma_{j+2}: \ \ |x| + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, \ \ y \le 0,$$

здесь и далее $x \geq 0$, при $j = 1$, $x \leq 0$, при $j = 2$, причем $m < 0$.
Введем обозначения $\Omega_1^+ = \Omega \cap \{(x,y) : \ x > 0, \ y > 0\}$,

$$\Omega_2^+ = \Omega \cap \{(x,y) : \ x < 0, \ y > 0\}, \ \Omega_1^- = \Omega \cap \{(x,y) : \ x > 0, \ y < 0\},$$

$$\Omega_2^- = \Omega \cap \{(x,y) : \ x < 0, \ y < 0\}, \quad I_1 = \{(x,y) : \ 0 < x < 1, \ y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x,y) : \ -1 < x < 0, \ y = 0\}, \ I_3 = \{(x,y) : \ x = 0, \ 0 < y < 1\},$$

$$\Omega_j = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^- \cup J_j, \ \Omega_3 = \Omega_1^+ \cup \Omega_2^- \cup J_3, \ \ A_j((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j,$$

$$C_j \left[(-1)^{j+1} \frac{1}{2}; \ \ -\left((-1)^{j+1} \frac{2-m}{4} \right)^{2/(2-m)} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, \ (j = 1,2),$$

$$O(0,0) = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \ B_1(1,1) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3, \ B_2(-1,1) = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, \ B_0(0,1) = \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u(x,0), & (x,y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u(x,0), & (x,y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \quad p, \quad \rho_j, \quad \mu_j \ (j = 1,2)$−любые действительные числа, причем

$$m < 0, \quad p > 0, \quad \rho_j > 0, \quad \mu_j > 0, \ (j = 1,2). \tag{2}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются следующие задачи.
Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3\right) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+\right) \cap C^2\left(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-\right)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j = 1,2)$;
3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_j} = \psi_j(x), \qquad 0 \leq (-1)^{j+1} x \leq \frac{1}{2}, \ (j = 1,2); \tag{4}$$

4) на линии вырождения $I_i \ (i = \overline{1,3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = a_j(x) \lim_{y \to -0} u_y(x,y) + b_j(x), \ (x,0) \in I_j, \ (j = 1,2), \tag{5}$$

$$\lim_{x \to +0} u_x(x,y) = a_3(y) \lim_{x \to -0} u_x(x,y), + b_3(y), \ (x,0) \in I_3; \tag{6}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $a_i(t)$, $b_i(t) (i = 1,2,3)$− заданные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\varphi_j(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \ (j = 1,2), \tag{7}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2},0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right). \tag{8}$$

$$a_j(x),\ \ b_j(x) \in C(\bar{J}_j) \cap C^2(J_j), \quad a_j(x) \neq 0,\ \ \forall x \in \bar{J}_j,\ \ (j=1,2), \tag{9}$$

$$a_3(y),\ \ b_3(y) \in C(\bar{J}_3) \cap C^2(J_3), \quad a_3(y) \neq 0,\ \ \forall x \in \bar{J}_3. \tag{10}$$

Задача 2(3). Найти функцию $u(x,y)$, обладающую всеми свойствами задачи 1 кроме условий (4), которые заменяются условиями

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ \ u|_{\Gamma_4} = g_2(x), \quad -1 \le x \le -\frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\left(u|_{\Gamma_2} = f_1(x), \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0, \quad u|_{\Gamma_3} = f_2(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1\right), \tag{12}$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$, $(f_1(x),\ \ f_2(x))$ – заданные функции, причем $g_1(-1) = \varphi_2(0)$, $(f_2(1) = \varphi_2(0))$,

$$g_1(x) \in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\ g_2(x) \in C^1\left[-1,-\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \tag{13}$$

$$\left(f_1(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2},0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right),\ f_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2},1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2},1\right)\right). \tag{14}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (7)–(10), то в области Ω решение задачи 1 существует и единственно.*

При доказательство единственности решения задачи 1 важную роль играет следующая лемма.

Леммы. *Если* $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0, \quad \forall y \in [0,1]$, $\psi_1(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, *и* $\psi_2(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2},0\right]$, *то*

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2). \tag{15}$$

Лемма доказывается с помощью метода интегральной энергии. Доказательства теоремы существования решения задачи 1 основана на теории вольтерских и фредгольмских интегральных уравнений.

Замечанме. Точно также как выше изложено, можно доказать теоремы единственность и существования решения задачи 2 (3).

Литература

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1976.**12**(1). С. 103-108.

2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения. 1978. **14**(1). С.181-184.

3. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. Узбекский математический журнал. 2011. **2**. С. 75-85.

4. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle. Uzbek Mathematical Journal. 2018. **3**. pp. 63-72.

О Некоторых Задачах С Интегральными Условиями Для Нагруженного Уравнения Третьего Порядка

Зикиров О.С.[1], **Рахматов Н.Б.**[2]

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент
[1]zikirov@yandex.ru; [2]nodirbekrakhmatov0@gmail.com

В докладе рассматривются некоторые смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) + \int_0^\ell k(x,t)u(x,t)dx, \tag{1}$$

Пусть $d(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $k(x,t)$, $p(x,t)$ и $\alpha(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$.

В настоящее работе для уравнения (1) изучаются следующие нелокальные задачи с интегральными условиями.

Нелокальная задача А. *Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \int_0^\ell p(x,t)u(x,t)dx + \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,2})$ — заданные, непрерывные на $[0,\ell]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0) = \mu_2(0), \quad \varphi(0) = \int_0^\ell p(x,0)\varphi(x)dx + \mu_1(0).$$

Нелокальная задача В. *От нелокальной задачи А отличается тем, что условие (4) заменяется условием вида*

$$u_x(\ell,t) = \alpha(t)u(\ell,t) + \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

где $\alpha(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные, непрерывные функции и удовлетворяющие соответствующие условиям согласования

$$\varphi(0) = \int_0^\ell p(x,0)\varphi(x)dx + \mu_1(0) \quad \varphi'(\ell) = \alpha(0)\varphi(\ell) + \mu_2(0).$$

С помощью функции Римана для псевдопараболических уравнений, изучаемые нелокальные задачи сводятся к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо.

Смешанные Задачи С Интегральными Условиями Для Уравнения Третьего Порядка

Зикиров О.С.[1], **Сагдуллаева М.М.**[2]

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент

[1]zikirov@yandex.ru; [2]sagdullayevam@mail.ru

В настоящем докладе излагаются результаты о разрешимости нелокальных краевых задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных с оператором теплопроводности в главной части.

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданная функция.

Нелокальная задача 1. *Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(\ell,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \int_0^\ell k(x)u(x,t)dx + \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ — заданные, непрерывные на $[0,\ell]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(\ell) = \mu_2(0), \quad \varphi'(0) = \int_0^\ell k(x)\varphi(x)dx + \mu_3(0).$$

Нелокальная задача 2. *От нелокальной задачи 1 отличается тем, что вместо условия (4) берется условие*

$$\int_0^\ell u(x,t)dx = \int_0^t h(t,\tau)u(\ell,\tau)d\tau + \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

где $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ и $h(t,\tau)$ – заданные, непрерывные функции и удовлетворяют соответственные условия согласования.

В поставленных задачах краевые условия содержит нелокальность по времени, что впервые рассмотрена в работе А.И.Кожанова [1].

С помощью сведения задач к интегральному уравнения Вольтерра второго рода установлено существование единственного решения рассматриваемых нелокальных задач.

Литература

1. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера.//*Дифференц. уравнения.* 2004. Том 40, № 6. – С. 763 – 774.

Об Одной Нелокальной Задаче Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода, В Области Эллиптическая Часть Которой - Прямоугольник

Зуннунов Р. Т.[1], **Эргашев А. А.**[2], **Худаёров А. А.**[3]

Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, Узбекистан; Кокандский государственный педагогический институт; "Nordic International University"в г. Ташкенте

zunnunov@mail.ru, akramkhonergashev@gmail.com

Известно, что краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода остаются малоизученными. В своих работах Ф.И. Франкль указал на важные приложения теории уравнений смешанного типа второго рода к проблемам газовой динамики и магнитогидродинамики. В одной из них Ф.И. Франкль свел задачу определения течения внутри плоско-параллельного симметрического сопла Лаваля заданной формы кпрямую задачу сопла Лавалянь к краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода с показателем $m = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y|y|^m u_{yy} = 0,\ 0 < m < 1, \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup J \cup \Omega_2$, где
$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $J = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ а Ω_2 - область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками

$$AC :\ x - [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 0, \quad BC :\ x + [2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2} = 1,$$

уравнения (1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right)$.

Задача S**.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:
1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;
2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;
3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,1) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad u(1,y) = \psi_2(y), \quad 0 \le y \le 1,$$

$$a\,(x)\,D_{0x}^{1-\beta} u\,[\theta_0\,(x)] + b\,(x)\,D_{x1}^{1-\beta} u\,[\theta_1\,(x)] = c\,(x)\,, \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi(x) \in C\,[0,1]$, $\psi_1\,(y) \in C\,[0,1]$, $\psi_2\,(y) \in C\,[0,1]$; $a\,(x)\,, b\,(x)\,, c\,(x) \in C\,[0,1] \cap C^2\,(0,1)$-заданные функции, причем $a\,(x)\,x^{-\beta} + b\,(x)\,(1-x)^{-\beta} \neq 0$, $0 \le x \le 1$;$\beta = \frac{m}{2(m-2)}$, $-\frac{1}{2} < \beta < 0,$; $D_{sx}^{\delta}[f(x)]$ - операторы дробного интегродифференцирования

в смысле Римана-Лиувилля. Кроме этого на линии параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$u(x,-0)=u\left(x,+0\right),\quad u_y(x,-0)=-u_y\left(x,+0\right).$$

Здесь, $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ - аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in J$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Теорема. Решение задачи S единственно и существует.

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения задачи методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

Решение Краевой Задачи Для Вязко-Трансзвукового Уравнения С Несимметричными Условиями По Времени

Иброхимов Х. К.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан;
xusniddin571@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1]. В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx},\quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p,\ 0<y<q\}$ рассмотрим уравнение

$$L\left[u\right]\equiv\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

где $p,q\in R$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача A . Найти функцию $u\left(x,y\right)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}\left(D\right)\cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и следующим краевым условиям:

$$u\left(x,0\right)=u_y\left(x,q\right)=0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au\left(0,y\right)+bu_{xx}\left(0,y\right)=\psi_1\left(y\right),\\ cu\left(p,y\right)+du_{xx}\left(p,y\right)=\psi_2\left(y\right),\\ u_x\left(0,y\right)=\psi_3\left(y\right), \end{cases} \tag{3}$$

где a, b, c и d - заданные постоянные, а также $a^2+b^2\neq0$, $c^2+d^2\neq0$, а $\psi_i\left(y\right)$, $i=\overline{1,3}$, - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi_{in}\left(0\right)=\psi'_{in}\left(q\right)=0, i=\overline{1,3}. \tag{4}$$

Отметим, что для уравнения (1) в работе [4], исследована краевая задача с симметричными условиями по времени.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab \leq 0, cd \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два различных решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u\,L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right) - u_y^2 = 0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D, учитывая однородные краевые условии и требуя $a \neq 0, c \neq 0$, получим

$$\tfrac{d}{c}\int\limits_0^q u_{xx}^2\,(p,y)\,dy - \tfrac{b}{a}\int\limits_0^q u_{xx}^2\,(0,y)\,dy + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^q u_x^2\,(p,y)\,dy + \int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,(x,y)\,dxdy = 0.$$

Учитывая условия $ab \leq 0,\ cd \geq 0$, получим $u_y\,(x,y) = 0$, т.е. $u\,(x,y) = f\,(x)$, здесь $f\,(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда из условии (2), т.е. $u\,(x,0) = 0$, получим $f\,(x) = 0$. Следовательно $u\,(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1\,(x,y) = u_2\,(x,y)$.

В случаях $b \neq 0$, $d \neq 0$; $a \neq 0$, $d \neq 0$; $c \neq 0$, $b \neq 0$, аналогично получаем равенство $u\,(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если функции $\psi_i\,(y) \in C^2\,[0,q]$, $i = \overline{1,3}$ и выполняются условия (4), то решение задачи существует.

Теорема 2 доказана с помощью метода разделения переменных, т.е. ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$. Для определения $Y(y)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями на границах сегмента $[0,q]$. Для этой задачи найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции при $n \in N$. Для определения $X(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями на границах сегмента $[0,p]$. Решения указанной задачи найдена в виде бесконечного ряда, доказана равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования при некоторых условиях на заданные функции. Сходимость производной второго порядка решения по переменной у доказывается с помощью неравенств Коши-Буняковского и Бесселя. При обосновании равномерной сходимости решения доказывается отсутствие "малого знаменателя".

Литература

1. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - №1(34). - С.56-65.

2. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - №5. - С. 1265-1279.

4. Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К. О разрешимости краевой задачи для вязко-трансзвукового уравнения// Научный вестник НамГУ. 2024. №10. С. 43–48.

Нелокальная Задача С Условием Франкля На Разных Частях Краев Разреза Вдоль Отрезка Линии Вырождения Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода

Исламов Н.Б.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан, e-mail: nosir_24@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - x^p u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где D_1 −область, ограниченная отрезками AB, AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, соответственно при $y > 0$, а D_2 − характеристический треугольник, ограниченный характеристиками

$$AB: \ y = 0, \ \ 0 < x < 1, \quad AC: x - (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = 0 \, ,$$

$$BC: \quad x + (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$, здесь $2\beta = m/(m-2)$, причем

$$p > 0, \quad 0 < m < 1, \quad -1 < 2\beta < 0 \, . \tag{2}$$

Введем следующие обозначения: $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$,

$$J_1 = \{(x,y) : 0 < x < c, \ \ y = 0\} \, , \quad J_2 = \{(x,y) : \ \ c < x < 1, \ \ y = 0\} \, ,$$

$$E(c,0) \in AB, \ \ c \in (0,1),$$

$$EC_1: \ x - (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c, \quad EC_0: \ x + (1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c,$$

$$C_1 \in BC, \ C_0 \in AC.$$

Через D_{21}, D_{22} и D_{23} соответственно обозначим характеристические треугольники AC_0E, EC_1B и четырехугольник EC_1CC_0.

В настоящей работе исследуется корректности задачи, где часть характеристики AC освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми эквивалентно заменена условием Франкля [1] на разных частях краев разреза вдоль отрезка вырождения AB.

Пусть $\mu(x) \in C^1[0,c]$–диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $\mu'(x) < 0$, $\mu(0) = 1$, $\mu(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $\mu(x) = 1 - kx$, где $k = (1-c)/c$.

Задача $F(Nol)$**.** Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$; 2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1;

3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2[2, стр. 113] в области $D_2\setminus(EC_0\bigcup EC_1)$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y),\qquad u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1,$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}u\left[\theta(x)\right]+a(x)u(x,0)=b(x),\qquad 0<x<c\,,\\ &u(\mu(x),-0)=\rho u(x,+0)+f(x)\,,\quad 0\le x\le c,\end{aligned}\tag{3}$$

5) $u_y\in C\left(D_{21}\bigcup J_1\right)\bigcap C\left(D_1\bigcup J_1\right)$ и на интервалах J_1 выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=\delta(x)\lim_{y\to+0}u_y(x,y)+\gamma(x),(x,0)\in J_1,$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ a(x),\ b(x),\ f(x),\ \delta(x),\ \gamma(x)-$ заданные функции, причем

$$0<\rho<1,\ b(0)=b\left(c\right)=0,\quad a(0)\ne 0,\ a(x)\le 0,\ a'\left(x\right)\le 0,\ \delta(x)<0,\ \forall\, x\in[0,c]\,,\tag{4}$$

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C\left[0,1\right]\cap C^1(0,1),\quad f(x)\in C(\bar J_1)\cap C^{1,\alpha}(J_1),\ \ 0<\alpha<1,\tag{5}$$

$$a(x),\quad b(x)\in C(\bar J_1)\cap C^2(J_1),\quad \delta(x),\ \ \gamma(x)\in C(\bar J_j)\cap C^2(J_j).\tag{6}$$

Условие (3) является аналогом условия Франкля [1]. Связывающей значения искомой функций соответственно на верхнем и нижнем краях разрезов вдоль отрезков $[0,c]$ и $[c,1]$.Заметим, что аналог задачи $F(Nol)$ для уравнения смешанного типа второго рода изучены в работах[3-4].

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2),(4),(5),(6), то в области D решение задачи $F(Nol)$ существует и единственно.*

Единственность решение задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а сушествования решения - методом интегральных уравнений.

Литература

1. Мирсабуров М. Задача с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа. // Дифференциальные уравнения. 2014. **50**(1). С. 78–87.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: "Высшая школа" 1985. 301 с.

3. Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарскогодля уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Известия вузов. Математика. Россия. 2015. №6. С. 43–52.

4. Исламов Н. Б. Аналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода.// Уфимск. матем. журнал. 2015. **7**(1).
С.31–45.

Краевая Задача Для Нагруженного Уравнения Смешанного Типа Третьего Порядка В Бесконечной Трехмерной Области

Исломов Б. И.[1], **Аликулов Е. К.**[2]

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Каршинский государственный университет, Ташкент, Узбекистан; islomovbozor@yandex.com

[2]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий и Ташкентский педиатрический медицинский институт, Ташкент, Узбекистан; aliqulov.yolqin.1984@mail.ru

Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов второго порядка в трехмерной области были исследованы в работах А.В. Бицадзе [1], А.М. Нахушева [2], М.С.Салохитдинова и Б.И. Исломова [3], Т.Д.Джураева, А.Сопуева и М. Мамажонов [4].

Насколько нам известно, краевые задачи для нагруженных уравнений параболо-гиперболического типов в бесконечных призматических областях мало изучены. Отметим работе [5].

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию аналога задачи Трикоми для нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в трехмерной области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_1,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & в\ \Omega_2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть Ω - область трехмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями

$$\Gamma_0: x=0,\ \ 0\le y\le h,\quad z\in R=(-\infty,+\infty),\quad \Gamma_1: x=1,\ \ 0\le y\le h,\ \ z\in R,$$

$$\Gamma_2: y=h,\ \ 0\le x\le 1,\quad z\in R,\quad S_1:\ \ x+y=0,\quad y\le 0,\quad 0\le x\le \frac{1}{2},\quad z\in R,$$

$$S_2:\ \ x-y=1,\quad y\le 0,\quad \frac{1}{2}\le x\le 1,\quad z\in R,\quad \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\left(\bar\Omega_1\cap\bar\Omega_2\right),$$

где

$$\mu=const<0. \tag{2}$$

Введем обозначения: $A(0,0,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\bar S_1,\ C\left(\frac{1}{2},0,z\right)=\bar S_1\cap\bar S_2,\ B(1,0,z)=\bar\Gamma_1\cap\bar S_2,$

$$\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y,z): x>0,\ y>0,\ z\in R\},\ \Omega_2=\Delta ABC,\ D=\Omega\cap\{z=0\},$$

$$I=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0, z\in R\}, l_0=\bar\Gamma_0\cap\bar S_1, l_1=\bar\Gamma_1\cap\bar S_2,\ D_k=\Omega_k\cap\{z=0\},$$

$$(\sigma_k=S_k\cap\{z=0\},\ k=1,2), \gamma_i=\Gamma_i\cap\{z=0\}, r_i=l_i\cap\{z=0\}, (i=\overline{0,2}), J=I\cap\{z=0\}.$$

Определение 1. $L(-\infty,+\infty)$ −множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $U(x,y,z)\in C(\bar\Omega)\cap L(-\infty,+\infty)$; 2) $U_x(x,y,z),\quad U_y(x,y,z),\quad U_z(x,y,z)\in C(\bar\Omega)\cap L(-\infty,+\infty)$, кроме

того, функции $U_x(x,y,z)$ и $U_y(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на линиях l_0 и l_1; 3) $U_{xxx}, U_{xzz} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap L(-\infty,+\infty), U_{xy} \in C(\Omega_1) \cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xyy} \in C(\Omega_2) \cap L(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j (j=1,2)$.

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача T_μ. Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x,y,z)$уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U|_{\Gamma_0} = \Phi_0(y,z), \quad U|_{\Gamma_1} = \Phi_1(y,z), \; U_x|_{\Gamma_0} = \Phi_2(y,z), \; 0 \le y \le h, \; z \in R, \tag{3}$$

$$U|_{S_1} = \Psi_1(x,z), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_1} = \Psi_2(x,z), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad z \in R, \tag{4}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_x(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_y(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_z(x,y,z) = 0, \tag{5}$$

где $n-$ внутренняя нормаль, $\Phi_0(y,z)$, $\Phi_1(y,z)$, $\Psi_j(x,z)$, $(j=\overline{1,3})-$ заданные гладкие функции, причем $\Psi_1(0,z) = \Phi_0(0,z) = 0$, $\Psi_2(0,z) = \Phi_0'(0,z) + (\sqrt{2}-1)\Phi_2(0,z)$.

Решение задачи T_μ будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y;\lambda) e^{-i\lambda z} d\lambda. \tag{6}$$

На основании (8), уравнения (1) сведем к следующему уравнению

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_y - u_{xx} + \lambda^2 u - \mu\, u(x,0,\lambda), & (x,y) \in D_1, \quad \lambda \in R, \\ u_{yy} - u_{xx} + \lambda^2 u - \mu\, u(x,0,\lambda), & (x,y) \in D_2 \end{cases} \tag{7}$$

В силу (8), задача T_μ эквивалентно сводится к следующей задаче.

Задача T_μ^λ. Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что 1) $u(x,y,\lambda) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup \sigma_1 \cup \gamma_0)$, причем $u_y(x,y,\lambda)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках r_0 и r_1; 2) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (7) в областях $D_j (j=1,2)$; 3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{\gamma_0} = \varphi_0(y,\lambda), \quad u|_{\gamma_1} = \varphi_1(y,\lambda), \; u_x|_{\gamma_0} = \varphi_2(y,\;\lambda), \quad 0 \le y \le h, \quad \lambda \in R, \tag{8}$$

$$u|_{\sigma_1} = \psi_1(x,\lambda), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = \psi_2(x,\lambda), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \lambda \in R, \tag{9}$$

где $\varphi_0(y,\lambda)$, $\varphi_j(y,\lambda)$, $\psi_j(x,\lambda)$, $(j=1,2)$ –заданные функции, причем

$$\varphi_i(y,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(y,z) e^{i\lambda z} dz, \quad (i=\overline{0,2}), \tag{10}$$

$$\psi_j(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j(x,z) e^{i\lambda z} dz, \quad (j=1,2), \tag{11}$$

$$\varphi_0(0,\lambda) = \psi_1(0,\lambda), \quad \psi_2(0,\lambda) = \varphi_0'(0,\lambda) + (\sqrt{2}-1)\varphi_2(0,\lambda), \tag{12}$$

$$\varphi_i(y,\lambda) \in C[0;h] \cap C^1(0,h), \; (i=\overline{0,2}), \tag{13}$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \psi_2(x,\lambda)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2), (12), (13), (14), *то решение задачи* T_μ^λ *для уравнения* (7) *в области* D *существует и единственно.*

Теорема 2. *Если выполнены условия* (2), (12), (13), (14), *то решение задачи* T_μ^λ *для уравнения* (7) *в области* D *существует, единственно и дается формулой*

$$u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,z)e^{i\lambda z}dz, \tag{15}$$

причем при больших значениях $|\lambda|$ *допускает оценку* $u(x,y,\lambda)=O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right)$, $k>3$, *то в области* Ω *решение задачи* T_μ *для уравнения* (1) *существует, единственно и находится формулой* (6).

Доказательство теоремы 1-2 следуют из принципа экстремума для нагруженных уравнений третьего порядка и метода интегральных уравнений.

Литература

1. Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях. "Доклады АН СССР". 1962. Т.143. С. 1017-1919.

2. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта. Дифференциальные уравнения. 1968. **4**(1). С. 52-62.

3. Салахитдинов М.С., Исломов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. Доклады АН СССР. 1990. **311**(4).С. 797-801.

4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан. 1986.

5. Islomov B.I., Alikulov Y.K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. International journal of applied mathematics. 2021. **34**(2). P.158-170.

Об Одной Нелокальной Краевой Задачи Для Нагруженного Параболо-Гиперболического Уравнения С Тремя Линиями Изменения Типа, Когда Нагруженная Часть Содержит Интегральный Оператор Дробного Порядка

Исломов Б.И.[1], **Холбеков Ж.А.**[2]

[1]Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан, e-mail islomovbozor@yandex.com

[2]Ташкентский государственный технический университет им. И.Каримова, г. Ташкент, Узбекистан, e-mail juratxolbekov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\mu_0 D_{0,x}^{\alpha_0}u(x,0) & (x,y)\in\Omega_0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_1 D_{0,\xi}^{\alpha_1}u(\xi,0), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_2 D_{0,\eta}^{\alpha_2}u(0,\eta), & (x,y)\in\Omega_2,\\ u_{xx}-u_{yy}-\mu_3 D_{0,\zeta}^{\alpha_3}u(1,\zeta), & (x,y)\in\Omega_3, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_1 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x+y=0$, $BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N(0,5;\ -0,5)$; Ω_2 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$, $DK: y-x=1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $K(-0,5;\ 0,5)$; Ω_3 –характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характер-истиками $CM: x+y=2$, $BM: x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$, пересекающимися в точке $M(1,5;\ 0,5)$. В уравнении (1) $\xi=x+y$, $\eta=y-x$, $\zeta=y-x+1$, μ_j, $\alpha_j(j=\overline{0,3})$ –заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geq 0, \qquad 0 \leq \alpha_j < 1, \ \ (j=\overline{0,3}). \tag{2}$$

Здесь $D_{0x}^{c} f(x)$ - оператор интегро-дифференцирования дробного порядка $|c|$ в смысле Римана - Лиувилля[1].

Определение 1. *Через $AC^n(V)$, где $n=1,2,\ldots,$ $V-$отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на V до порядка $n-1$,причем $f^{(n-1)}(x)\in AC(V)$ и $AC^1(V)=AC(V)-$ класс абсолютно непрерывных функций*[1, стр. 21; лемма 2.4, §2, стр.46].

Определение 2. *Пусть $0\leq c<1$ и $f(x)\in AC([0,1])$, тогда $D_{0x}^{c} f(x)$ существует почти всюду и может быть представлена в виде*[1,стр.46]:

$$D_{0x}^{c} f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-c)}\left[f(0)x^{-c}+\int_0^x (x-t)^{-c} f'(t)\,dt\right].$$

Введем обозначения: $\Omega=\sum_{j=0}^{3}\Omega_j\cup\ AB\cup BC\cup DA$,

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_0, \quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup AD\cup\Omega_0\cup BC\cup\Omega_3.$$

Задача C_1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$; 2) $u(x,y)\in AC[0,1]$ для $\forall x\in[0,1]$;
3) $u_y(x,y)\in C(\Omega_1^*)$, $u_x(x,y)\in C(\Omega_2^*)$;
4) $u(x,y)\in C_{x,y}^{2,1}(\Omega_0)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0 и $\Omega_j\,(j=\overline{1,3})$;
5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$a(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+b(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\right)=$$

$$=m(x)u_x(x,0)+n(x)u_y(x,0)+d(x)u(x,0)+c(x),\ \ x\in(0,1),$$

$$u(x,y)|_{AK}=\varphi_1(y), \qquad 0\leq y\leq\frac{1}{2}, \qquad u(x,y)|_{BM}=\varphi_2(y), \ \ 0\leq y\leq\frac{1}{2},$$

6) на линиях изменения типа AB, BC и DA выполняются условия склеивания

$$u_y(x,-0) = a_1(x)u_y(x,+0) + b_1(x), \qquad x \in (0,1),$$

$$u_x(-0,y) = a_2(y)u_x(+0,y) + b_2(y), \qquad y \in (0,1),$$

$$u_x(1-0,y) = a_3(y)u_x(1+0,y) + b_3(y), \quad y \in (0,1),$$

где $a(x)$, $b(x)$, $m(x)$, $n(x)$, $d(x)$, $c(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a_1(t)$, $b_1(t)$ $a_j(y)$, $b_j(y)(j=2,3)$−заданные функции, причем

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad m^2(x) + n^2(x) + d^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in [0,1], \tag{3}$$

$$a_1(x), \ \ b_1(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \quad a_1(x) \neq 0, \ \ \forall x \in [0,1], \tag{4}$$

$$a_j(y), \ \ b_j(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \quad a_j(y) \neq 0, \ \ \forall y \in [0,1], \ \ (j=2,3), \tag{5}$$

$$a(x), \ \ b(x), \ \ d(x), \ \ m(x), \ \ n(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1), \quad c(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \tag{6}$$

$$\varphi_1(0) = 0, \ \ \varphi_2(0) = 0, \ \varphi_1(y), \ \ \varphi_2(y) \in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2)-(7) и*

$$\tilde{a}(x) = a_1(x)[a(x) - b(x) + 2n(x)] \neq 0, \quad \frac{a(x) + b(x) - 2m(x)}{\tilde{a}(x)} \geq 0,$$

$$\frac{xa(x) + (1-x)b(x)}{\tilde{a}(x)} \geq 0, \quad \frac{d(x)}{\tilde{a}(x)} \leq 0, \quad \forall x \in [0,1],$$

то в области Ω решение задачи C_1 существует и единственно.

Заметим, что локальные и нелокалные задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа с тремя линиями изменения, когда нагруженная часть содержит след от искомой функции, изучены в работах [2-4].

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987. 688с.

2. Исломов Б.И., Холбеков Ж.А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. **25**(3). С. 407–422.

3. Исломов Б., Холбеков Ж.А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – I. Узбек. мат. журнал. 2015. №4. С. 47–56.

4. Исломов Б., Холбеков Ж.А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – II. Узбек. мат. журнал. 2016. №1. С. 49–56.

Обратная Задача Опеделения Источника Уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу

Исмоилов А. И.[1]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
ismoilovaxrorjon@yandex.com

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\xi-\eta}u_\xi + \frac{\alpha}{\xi-\eta}u_\eta = f(\xi)g(\eta), \tag{1}$$

в характеристическом треугольнике Δ плоскости $\xi O\eta$, ограниченной отрезками $\overline{OA} = \{(\xi,\eta) : \eta = \xi, 0 \le \xi \le 1\}$, $\overline{CA} = \{(\xi,1) : 0 \le \xi \le 1,\}$, $\overline{OC} = \{(0,\eta) : 0 \le \eta \le 1\}$, где $0 < \alpha, \beta, \alpha+\beta < 1$, $u(\xi,\eta)$, $f(\xi)$ неизвестные функции а $g(\eta)$ заданная непрерывная функция.

Задача D. Найти $f(\xi)$, $u(\xi,\eta) \in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(\xi,\xi) = 0, \quad 0 \le \xi \le 1; \qquad u(0,\eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{2}$$

$$u(\xi,1) = w(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1 \tag{3}$$

где $w(\xi)$ – заданные непрерывные функции.

Приняв функцию $f(\xi)$ за известную, решим эту задачу методом Римана и запишем решение в следующем виде [2]:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\xi f(t)\,dt \int_t^\eta g(z)H(t,z;\xi,\eta)\,dz, \tag{4}$$

где $H(x,y;\xi,\eta)$ Римана-Адамара для уравнения (1) [1].

Подчиним (4) условию (3). Затем, выполнив некоторые вычисления, мы получим интегральное уравнение в следующем виде:

$$f(\xi) + \frac{1+\beta}{1-\xi}\int_0^\xi f(t)\,dt \int_t^1 \frac{\partial}{\partial\xi}H(t,z;\xi,1)\,dz = \frac{1+\beta}{1-\xi}w'(\xi), \tag{5}$$

Если интегральное уравнение (5) имеет решение, то и задача D также будет иметь решение.

Литература

1. Уринов А.К., Исмоилов А.И. Задачи Дарбу и принцип абсолютного экстремума для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Доклады АН РУз.. -2011, №5, –С. 20-23.

2. Исмоилов А.И. Задача Дарбу для неоднородного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу // Бюллетень Института математики. 2022-г.-Vol. 5, №1, –С. 56-65.

Функция Грина Одной Задачи Для 3-Гармонического Уравнения

Карачик В. В.[1]

[1]Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
karachik@susu.ru

В настоящей работе рассматривается построение решения следующей краевой задачи для 3-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^3 u(x) = f(x),\ x \in S; \quad u|_{\partial S} = \varphi_0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1,\ \Delta u|_{\partial S} = \varphi_2, \tag{1}$$

которую можно назвать задачей Дирихле-2, поскольку, как оказалось, она близка к задаче Дирихле: у них одна и та же функция Грина $G_{2m}(x,\xi)$. Граничные условия задачи (1) представляют собой некий симбиоз условий Дирихле и условий Навье [1]. В работе [2, Теорема 2] найдена функция Грина 3-гармонической задачи Дирихле

$$\mathcal{G}_{2m}(x,\xi) = \mathcal{E}_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k (|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k (2,2)_k} \mathcal{E}^*_{2m-2k}(x,\xi),$$

где $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ – элементарное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$.

Теорема. *Функция $u(x)$, определяемая из равенства*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Big(-\frac{\partial \Delta^2 \mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial \nu} \varphi_0(\xi) + \Delta^2 \mathcal{G}_6(x,\xi) \varphi_1(\xi) - \frac{\partial \Delta \mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial \nu} \varphi_2(\xi) \Big)\, ds_\xi$$

$$- \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_6(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

при $\varphi_k \in C^{2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0,1,2$ и $f \in C(\bar{S})$, является решением задачи (1).

При доказательстве указанной в теореме гладкости решения $u(x)$ были использованы результаты, полученные Ш.А. Алимовым в статье [3, лемма 2.7 и лемма 2.2], а также свойства элементарных решений $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ из работы [4].

Литература

1. Karachik V.V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball. Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 269. P. 189–204.

2. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. Mathematical Notes. 2020. V. 107. P. 105–120.

3. Алимов Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной. Дифференциальные уравнения. 1981. Т.17. №10. С. 1738–1751.

4. Karachik V.V. On Green function of the Dirichlet problem for polyharmonic equation in the ball. Axioms. 2023. Т. 12, № 6. С. 543.

Начально-Краевая Задача Для Одного Вырождающегося Уравнения В Частных Производных Высокого Четного Порядка

Каримов К. Т.[1,2], **Орипов Д. Д.**[3]

[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан,
karimovk80@mail.ru;
[3]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
dastonbekoripov94@gmail.com

В данной работе в прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right) = f(x,t), \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ - неизвестная функция, $f(x,t)$ - заданная функция, а α - заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$, $n \in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу:

Задача U_1. Найти функцию $u(x,t)$, которая:

1) u_t, $(\partial^j/\partial x^j)\, u$, $(\partial^j/\partial x^j)\left[x^\alpha (\partial^{2n}/\partial x^{2n})\, u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $(\partial^{2n}/\partial x^{2n})\left[x^\alpha (\partial^{2n}/\partial x^{2n})\, u\right]$, $u_{tt} \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) выполняются следующие начальные и граничные условия

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,1], \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1]$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(0,t) + \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}} u(1,t) = 0, \ \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} u(1,t) = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \ \ t \in [0,T]; \\ \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t)\right)\Big|_{x=0} + \dfrac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t)\right)\Big|_{x=1} = 0, \\ \dfrac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0, \ j = \overline{0, n-1}, \ \ t \in [0,T], \end{array}\right\}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - заданные непрерывные функции.

Подобные начально-краевые задачи для уравнения (1) при $\forall n \in N$ и $\alpha \in (0,1)$ исследованы в работах [1],[2].

Литература

1. Уринов А.К., Орипов Д.Д., О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т.27, №4. С. 621–644.

2. Уринов А.К., Орипов Д.Д. Начально-граничная задача с локальными и нелокальными условиями для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка/ Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева (24–26 октября 2024 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во "Маърифат". 2024. 236 с.

Задача Коши Для Неоднородного Уравнения Колебания Балки С Оператором Бесселя

Каримов Ш. Т.[1], **Тулашева Ё. И.**[2]

[1]Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
shaxkarimov@gmail.com

[2]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;
tulasheva@gmail.com

Известно [1], что решение линейного неоднородного уравнения

$$u_{tt} + L_x(u) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \ x \in R^n, \tag{2}$$

может быть представлено в виде (второй принцип Дюамеля)

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t,\tau)d\tau,$$

где L_x- не зависящий от t линейный дифференциальный оператор действующий по пременной $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, а $f(x,t)-$ заданная функция. Здесь $U(x,t,\tau)-$ решение вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$U_{tt} + L_x(U) = 0, \ \ x \in R^n, \ t > \tau,$$

удовлетворяющее полуоднородным начальным условиям

$$U(x,\tau,\tau) = 0, \ x \in R^n, \ \ U_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \ x \in R^n.$$

Последняя задача называется сопутствующей к исходной задаче {(1), (2)}

Однако, если уравнение (1) по переменной t вырождается или имеет сингулярный коэффициент при младшем члене, то невозможно применить втрой принцип Дюамеля. В таких случаях предлагаем использовать оператор преобразования Эрдейи-Кобера.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши с однородными начальными условиями (2) (при $n = 1$) для уравнения колебания балки с сингулярным коэффициентом

$$u_{tt} + (2\beta/t)u_t + u_{xxxx} = f(x,t), \ x \in R^1, \ t > 0, \tag{3}$$

где $\beta \in R$, причем $0 < 2\beta < 1$.

Предположим, что решение задачи {(3), (2)} существует. Это решение ищем в виде

$$u(x,t) = I^{(t)}_{\eta,\alpha} v(x,t), \tag{4}$$

где $\eta = -1/2$, $\alpha = \beta$, $v(x,t)$ - неизвестная, четырежды непрерывно дифференцируемая функция, $I^{(t)}_{\eta,\alpha} v(x,t)$- оператор Эрдейи-Кобера, которая имеет вид

$$I^{(x)}_{\eta,\alpha} f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{\alpha-1} \xi^{2\eta+1} f(\xi)d\xi, \tag{5}$$

где $\alpha, \eta \in R$, $\alpha > 0$, $\eta \geqslant -(1/2)$, $f(x) \in L_1(0,b)$, $b > 0$, $\Gamma(\alpha)$- гамма-функция. Основные свойства оператора (5) можно найти в работе [2, стр. 246].

Оператор, обратный к оператору (5), при $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$\left(I_{\eta,\alpha}^{(x)}\right)^{-1} g(x) = \frac{x^{-2\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\alpha} s^{2(\eta+\alpha)+1} g(s) ds. \tag{6}$$

Известно [2], что оператор (5), когда $\alpha > 0$, $\eta \geq -1/2$, $f(x) \in C^2(0,b), b > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1} f'(x) = 0$, действует как оператор преобразования по формуле

$$I_{\eta,\alpha}^{(x)} B_{\eta}^{(x)} f(x) = B_{\eta+\alpha}^{(x)} I_{\eta,\alpha}^{(x)} f(x), \tag{7}$$

где $B_{\eta}^{(x)} = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2\eta+1}{x} \dfrac{d}{dx}$ - оператор Бесселя. В случае многих переменных, верхний индекс в операторах означает переменную, по которой действует этот оператор.

Подставляя (4) в уравнение (3) и начальные условия (2), а затем используя равенство (7), получим задачу нахождения решения $v(x,t)$ уравнения

$$v_{tt} + v_{xxxx} = F(x,t),\ x \in R^n,\ t > 0, \tag{8}$$

удовлетворяющее начальным условиям (2), где

$$F(x,t) = \left(I_{-1/2,\beta}^{(t)}\right)^{-1} f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\beta} s^{2\beta} f(x,s) ds. \tag{9}$$

Далее, применяя второй принцып Дюамеля к задаче {(8), (2)} и пользуясь решением сопутствующей задачи, решенный в работе [3], а затем подставляя найденное решение $v(x,t)$ в равенство (4), после некоторых вычислений, находим решения задачи {(3), (2)}.

Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. -М.:МИР, 1964. -830 с.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.-Минск: Наука и техника, 1987. -688 с.

3. Sergey Sitnik, Shakhobiddin Karimov, Yorkinoy Tulasheva. The Cauchy problem for the degenerate beam vibration equation. Journal of Mathematical Sciences, 2023, Vol. 277, №. 3, p. 458-466.

Краевая Задача С Разрывными Условиями Склеиваниями Для Уравнения Третьего Порядка С Эллиптико-Гиперболическим Оператором В Прямоугольной Области

Г.К. Кылышбаева

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха
e-mail kalbaevna85@mail.ru

Корректные краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и парабо-ло-гиперболического типов третьего порядка, в первые изучены работах А.В. Бицадзе и М.С.Салохитдинова [1], М.С.Салохитдинова [2], Т.Д.Джураева [3], Т.Д.Джураева, А.Сопуева и М. Мамажонова [4], где смешанная область, состоящая из характеристи-ческих треугольников и прямоугольника (или полуокружность).

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа третьего порядка является одним из развивающихся разделов теории уравнений в частных производных. Опубликованы многочисленные теоретические исследования [5-6]. В этих работах изучены ряд корректных локальных и нелокальных краевых задач нового типа.

В последние годы, используя методы спектрального анализа [7-8] изучены прямых и обратных задач [9-11] для модельного уравнения смешанного типа второго порядка в прямоугольной области. Прямые краевые задачи для смешанных уравнений второго порядка с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто, изучены в работах[12-14].

В настоящей работе изучается краевая задача с разрывными условиями склеивани-ями для уравнения эллиптико-гиперболического типа третьего порядка в прямоуголь-ной области.

В прямоугольной области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, -p < y < q\}$,рассмотрим уравнение

$$0 = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, \ \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & x > 0, \ \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ, $p > 0$, $q > 0-$ действительные числа, $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $c \in (-\infty, +\infty)$.

Введем обозначения:

$$J = \{(x,y) : \ 0 < x < 1, \ y = 0\}, \ AA_0 : \ x = 0, \ 0 < y < q, \ BB_0 : \ x = 1, 0 < y < q,$$

$$D_1 = D \cap \{(x,y) : \ x > 0, \ y > 0\}, \ D_2 = D \cap \{(x,y) : \ x > 0, \ y < 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

Через $C^{k,m}_{\xi,\eta}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных по $\xi(\eta)$ до $k(m)-$ го порядка включительно в области M.

Задача C_p. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}), \ \ u \in C^{3,2}_{x,y}(D_1 \cup D_2) \cap C^{\,2}_{x}(D \cup AA_0 \cup BB_0), \ \ u_{xyy} \in C(D_1 \cup D_2), \tag{2}$$

$$0 = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & (x,y) \in \ D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & (x,y) \in \ D_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$(au_{xx}(x,y) + cu_x(x,y))|_{x=0} = 0, \ \ (au_{xx}(x,y) + cu_x(x,y))|_{x=1} = 0, \quad -p \le y \le q, \tag{4}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad -p \le y \le q, \ \ u(x,q) = g(x), \quad u(x,-p) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$u(x,+0) = a_1 u(x,-0) + b_1(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

$$u_y(x,+0) = a_2 u_y(x,-0) + b_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$

где $\varphi(y), \psi(x), g(x), b_1(x), b_2(x)$−заданные достаточно гладкие функции, $a_1, a_2 \neq 0$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если существует решение задачи C_p, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех $N_0 = N \cup \{0\}$ выполнены условия*

$$\Delta_n(p,q) = a_1 ch\ \rho_n q\ \ sin\ \rho_n p + a_2 sh\ \rho_n q\ \ cos\ \rho_n p \neq 0\,, \quad \rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}, \quad \mu_n = \pi n. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (8), $|\Delta_n(p,q)| \ge C_1 e^{\pi n q} > 0$ при всех $q > q_0(p)$ и $n \in N_0$; $\varphi(y) \in C^2[-p,q]$, $\varphi(0) = \varphi'(0)$, $g_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^4[0,1]$, $g_1'(0) = \psi_1'(0) = 0$, $g_1'''(0) = \psi_1'''(0) = 0$, $g_1'(1) = \psi_1'(1) = g_1'''(1) = \psi_1'''(1) = 0$, $b_1(x)$, $b_2(x) \in C^3[0,1]$, $b_1'(0) = b_2'(0) = 0$, $b_1'(1) = b_2'(1) = 0$, то в области D решение задача C_p существует и единственно и оно определяется по формуле*

$$u(x,y) = \varphi(y)\, e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c}\upsilon_0(y)\left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n(y)\cdot\int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)} cos\mu_n t\, dt, \tag{9}$$

где $g_1(x) = ag'(x) + cg(x)$, $\psi_1(x) = a\psi'(x) + c\psi(x)$, $0 \le x \le 1$,

$$\upsilon_n(y) = \begin{cases} \alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_n cos\rho_n y + \theta_n sin\rho_n y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad n \in N,$$

$$\upsilon_0(y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_0 cos\lambda y + \theta_0 sin\lambda y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad \alpha_n = \frac{\gamma_n - \theta_n}{2},\ \beta_n = \frac{\gamma_n + \theta_n}{2},\ n \in N_0,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n} sin\ \rho_n p + a_2\psi_{1n} sh\ \rho_n q\right] - \frac{a\ sin\rho_n p}{\Delta_n(p,q)\,\rho_n}\left[b_{2n} sh\ \rho_n q + \rho_n b_{1n} ch\ \rho_n q\right],$$

$$\theta_n = \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n} cos\ \rho_n p - a_1\psi_{1n} ch\ \rho_n q\right] - \frac{a\ cos\rho_n p}{\Delta_n(p,q)\,\rho_n}\left[b_{2n} sh\ \rho_n q + \rho_n b_{1n} ch\ \rho_n q\right],$$

$$g_{10} = \int_0^1 g_1(x)\, dx\,, \quad g_{1n} = \sqrt{2}\int_0^1 g_1(x)\, cos\ \mu_n x dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi_1(x) dx,$$

$$\psi_{1n} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi_1(x)\, cos\ \mu_n x dx, \quad b_{k0} = \int_0^1 b_k(x)\, dx\,, \quad b_{kn} = \sqrt{2}\int_0^1 b_k(x)\, cos\,\mu_n x dx, (k = 1,2).$$

Литература

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // "Сибирский мат.журнал". 1961. **2**(1). С. 7-19.

2. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Т.: Фан. 1974. 156 с.

3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Издательство: ФАН. 1979. 240 с.

4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220 с.

5. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений смешаноного типа третьего порядка в прямоугольной области. "Дифференц. уравнения". 2011. **47**(5). С.705–713.

6. Islomov B. I, Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptichyperbolic type. Labachevskii Journal of Mathematics, 2020. **41**(1). P. 32–38.

7.Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи. Дифференц. уравнения. 1999. **35**(8). С.1094–1100.

8. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. "Доклады РАН". 2007. **413**(1). С. 23–26.

9. Хачев М. М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев–Бицадзе в прямоугольной области. Дифференц. уравнения, 1978. Т. 14, №1, С. 136–139.

10. Islomov B.I., Kilishbaeva G.K. Boundary value problems for third-order mixed equations in there ctangular domain. Science and Education in Karakalpakstan, 2022. 1/2(24). P. 32–41.

11. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. Изв. Вузов. Математика. 2011. №2. С. 71–85.

12.Salakhitdinov M. S., Karimov E. T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation. Euroasian Mathematical Journal. 2016. №1. P. 74–83.

13. Islomov B.I., Убайдуллаев У.Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области Изв. вузов. Матем. 2021. №3. С. 29–46.

14. Yuldashev T.K., Islomov B.I., Ubaydullaev U. Sh.Value problems for a mixed type fractional differential equation with Caputo operator. Bulletin of the Karaganda University .Mathematics series. 2021. **101**(1). P. 127–137.

Краевые Задачи Для Гиперболических Уравнений С Двумя Временными Переменными В Нецилиндрических Областях

Кожанов А.И.[1], **Бердимуродов А.Ж.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
a.berdimurodov@g.nsu.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений

$$u_{xt} - au_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

в которых $x \in \Omega = (0,1), t \in (0,T), 0 < T < +\infty, a \in \mathbb{R}$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ известные функции.

Особенностью таких уравнений является то, что в них как переменная t, так и переменная x могут считаться временной переменной, и в соответствии с этим для них могут быть предложены постановки краевых задач с разными носителями граничных условий. Как показано в работах [1]-[3], наличие двух временных переменных позволяет изучать для уравнений (1) краевые задачи с принципиально различными носителями граничных условий.

Для изучаемых задач в работе доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, а именно решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

References

1. Ларькин Н. А. К теории линеаризованного уравнения Линя–Рейсснера – Цзяня // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1980. С. 126–131.

2. Ларькин Н. А. О линеаризованном уравнении нестационарной газовой динамики //Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: Ин-т математики, 1983. С. 107–118.

3. Кожанов А. И. О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешенных относительно временной производной // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики, 1987. С. 84–98.

Разрешимость Краевых Задач С Общими Условиями Для Тригармонического Уравнения В Шаре

Кошанов Б.Д.[1], Сматова Г.Д.[2], Шыныбаева Н.М.[1]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,
koshanov@math.kz, shynybayeva001@mail.ru
[2]Сатпаев университет, Алматы, Казахстан
smatova1977@mail.ru

Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен различными способами в работах [1-5]. В [6,7] исследованы разрешимость и построены функции Грина для нескольких локальных и нелокальных краевых задач с инволюцией для бигармонического уравнения. Условия разрешимости некоторых вариантов краевых задач для бигармонического уравнения в шаре получены также в [8]. В [9] найдены решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения без использования функции Грина. В [10] приведены функции Грина задач Навье [11] и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в [12] построены функции Грина таких задач для полигармонического уравнения. В [13,14] найдены условии разрешимости некоторых краевых задач для полигармонического уравнения и приведены примеры для бигармонического и тригармонического уравнения. В [15,16] исследованы фредгольмова разрешимость и вычислены формулы индекса обобщенной задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях.

В данной работе исследуется следующая краевая задача с общими условиями для тригармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^3 u(x) = 0, \quad x \in S, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{00}u + a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{02}\Delta u + a_{03}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{04}\Delta^2 u = \varphi_1(x),\ x \in \partial S, \\ a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{12}\Delta u + a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{14}\Delta^2 u + a_{15}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^2 u = \varphi_2(x),\ x \in \partial S, \\ a_{21}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{22}\Delta u + a_{23}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{24}\Delta^2 u + a_{25}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^2 u = \varphi_3(x),\ x \in \partial S, \end{cases} \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$– внешняя нормальная производная к ∂S, a_{ij}, $(i = 0,\ j = \overline{0,4},\ i = 1,2,\ j = \overline{1,5})$– некоторые постоянные.

Эта задача обобщает задачу Дирихле ($a_{00} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ для остальных i, j), задачу Рикье ($a_{00} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ для остальных i, j), но не обобщает задачу Неймана.

Теорема 1. *a) Решение задачи (1)-(2) из класса $C^3(\overline{S})$ при произвольных функциях $\varphi_1(x) \in C^2(\partial S)$, $\varphi_2(x) \in C^1(\partial S)$, $\varphi_3(x) \in C^1(\partial S)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда полином*

$$\det P(\lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{00}+\lambda a_{01} & 2[a_{01}+2(2\lambda+n)(a_{02}+\lambda a_{03})] & 8[a_{02}+a_{03}+(2+2\lambda+n)(2\lambda+n)a_{04}] \\ \lambda a_{11} & 2[a_{11}+2(2\lambda+n)(a_{12}+\lambda a_{13})] & a^*_{12} \\ \lambda a_{21} & 2[a_{21}+2(2\lambda+n)(a_{22}+\lambda a_{23})] & a^*_{22} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$a^*_{i2} = 8\left[a_{i2} + a_{i3} + (2+2\lambda+n)(2\lambda+n)(a_{i4}+\lambda a_{i5})\right],\ i = 1,2,$$

не имеет целочисленных корней в $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
b) Если $P(m) = 0$, то однородная задача (1)-(2) имеет решение

$$u(x) = \left[C_1 - C_2 + (C_2 - C_3)\,|x|^2 + (C_3 - C_2)\,|x|^4\right] H_m(x), \tag{4}$$

где $H_m(x)$–однородный гармонический полином степени m [17], а константы C_1, C_2, C_3 находятся из системы уравнений

$$P(m)\overrightarrow{C} = 0.$$

Работа выполнена при поддержке грантов BR20281002 и AP19678182 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Литература

1. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m //Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.

2. Begerh H., Vu TN.H., Zhang Z.X. Polyharmonic Dirichlet Problems //Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. V. 255. P. 13–34.

3. Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation in the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equations in a Ball //Doklady Mathematics. 2008. V.78(1). P. 528–530.

4. Koshanov B.D., Kuntuarova A.D. Equivalence of the Fredholm solvability condition for the Neumann problem to the complementarity condition //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. V. 111(3). P. 39–51.

5. Karachik V.V. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Comp. Math. and Math. Physics. 2014. V. 54. P. 1122–1143.

6. Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67. P. 1712–1736.

7. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball //Mathematics. 2022. 10. 1158.

8. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations //Math. Notes. 2017. V. 102. P. 31–42.

9. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball //Mathematics. 2021. 9. 1907.

10. Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball //Differential Eq. 2021. V. 57. P. 654–668.

11. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic //Complex Var. and Elliptic Eq. 2009. V. 54. P. 79–93.

12. Karachik V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Mathematics. 2023; 11: 1000.

13. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения //Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2(2). С. 41–52.

14. Koshanov B.D. About solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a ball //Journal Advances in Pure and Applied Math. 2013. V. 4(4). P. 351–373.

15. Soldatov A.P. On the Fredholm property and index of the generalized Neumann problem //Differential eq. 2020. V. 56. P. 212–220.

16. Koshanov B., Soldatov A. On Fredholm solvability and on the index of the generalized Neumann problem for an elliptic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67(12). P. 2907–2923.

17. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М.: Наука, 1974. -809 с.

О Корректности Нелокальных Краевых Задач С Интегральным Условием Для Квазигиперболических Уравнений Высокого Порядка

Кошанов Б.[1], Султангазиева Ж.[2], Оралбекова Н.[3]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, koshanov@math.kz;

[2]Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан zhanat_87@mail.ru

[2]Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева, Алматы, Казахстан aisu0409@mail.ru

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$ рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^p D_t^{2p} u + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, Δ – оператор Лапласа, λ – действительный параметр, $f(x,t)$ – заданная функция.

Краевая задача $I_{p,\lambda}$: Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q такое, что

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0,\ k = m, ..., m+p,\ x \in \Omega \tag{3}$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Постановку краевых задач для таких операторов (1) впервые предложен В.Н. Враговым [1,2]. Дальнейшие исследования для подобных операторов связаны работы [3-6]. Одним из основных условий корректности в этих работах было условие неотрицательности параметра λ.

В данной работе будут представлены результаты о корректности (единственности и неединственности, существовании и несуществовании) нелокальных краевых задач с частично интегральными по времени переменной для вышеприведенного уравнения. Также будут анализированы случаи неотрицательности и положительности параметров λ. Будет также доказана, что однородная задача (1)-(4) имеет линейно независимых решений. Обычно такое не имеет место при гиперболическом операторе.

Работа выполнена при поддержке грантов AP19678182 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задах для уравнений смешанного типа //Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 13, №6. С. 1098-1105.

2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задах для уравнений смешанного типа //Матем. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.

3. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд ВЦ СО РАН, 1995.

4. Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Укр. мат. Висник. 2014. Т. 11, №2. С. 181–202.

5. Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка //Мат. Зам. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 403–412.

6. Kozhanov A.I., Koshanov B.D., Sultangazieva Zh.B., Emir Kady oglu A.N., Smatova G.D. The spectral problem for nonclassical differential equations of the sixth order //Bulletin of the Karaganda University, series Mathematics. 2020. V. 97, №1. P. 79–86.

Некоторые Классы Обратных Коэффициентных Задач Для Вырождающихся Дифференциальных Уравнений

Кожанов А.И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsc.ru

В настоящем докладе излагаются последние результаты о разрешимости линейных и нелинейных обратных коэффициентных задач для некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных.

Обратные коэффициентные задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений изучены сравнительно мало. Можно отметить лишь работы Н.И. Иванчова, В.Л. Камынина, Г.Р. Ашуровой.

В докладе излагаются результаты о разрешимости в классах регулярных решений (решений имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение) линейных и нелинейных обратных коэффициентных задач для

- вырождающихся параболических уравнений;
- вырождающихся гиперболических уравнений;
- вырождающихся уравнений с кратными характеристиками;
- вырождающихся уравнений Соболевского типа;

Доклад подготовлен при поддержке Международного математического центра в Академгородке (Новосибирск, Россия)

Об Одной Нелокальной Задаче Для Уравнения Смешанного Параболо-Гиперболического Типа Третьего Порядка С Линией Сопряжения $x = 0$

Кожобеков К.Г.[1], **Сопуев А.А.**[1]

[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru, sopuevv@gmail.com

В прямоугольнике $D = \{(x, y) : -\ell_1 < x < \ell, 0 < y < h\}, \quad (\ell, \ell_1, h > 0)$ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, & (x, y) \in D_1 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u, & (x, y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – заданные функции, $D_1 = D \cap (x > 0)$, $D_2 = D \cap (x < 0)$, C^{n+m} означает класс функций, имеющие непрерывные все производные $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} \quad (r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{3+1}(D_1) \cup C^{2+1}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \neq 0$ и следующим краевым условиям:

$$u(\ell, y) = \varphi_1(y),\ u_{xx}(\ell, 0) = \varphi_2(y),\ 0 \leq y \leq h, u(x, 0) = \psi_1(x),\ 0 \leq x \leq \ell,$$

$$u(-\ell, y) + \alpha(y)u(x_0, y) = \varphi_3(y),\ 0 \leq y \leq h, u(x, 0) = \psi_2(x),\ -\ell_1 \leq x \leq 0,$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\alpha(y)$ – заданные функции, причем $\varphi_i(y) \in C^1[0,h]\,(i=1,2,3)$, $\psi_1(x) \in C^1[0,\ell]$, $\psi_2(x) \in C^1[-\ell_1,0]$, $\psi_1(\ell)=\varphi_1(0)$, $\psi_2(-\ell_1)+\alpha(0)\psi_2(x_0)=\varphi_3(0)$, $-\ell_1<x_0<0$.

Отметим, что уравнение характеристик уравнения (1) при x>0 имеет 3 кратных корня, а при x<0 имеет 1 простой и 2 кратных корней, поэтому уравнение (1) является уравнением смешанного параболо-гиперболического типа [1], а линия x=0 является линией изменения типа уравнения (1).

Существование и единственность решения нелокальной задачи 1 доказана следующим образом. Используя функции Грина и метод интегральных уравнений, решение задачи 1 эквивалентным образом сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со слабым ядром, разрешимость которого доказывается методом последовательных приближений.

Решение задачи 1 при x>0 строится методом функции Грина, а при x<0 методом функции Римана, сведением задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Обзор краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков рассмотрены в работах [1]-[2].

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.

Разрешимость Краевой Задачи Для Неоднородного Вырождающегося Уравнения Четвертого Порядка

Жамалов К.Н.[1], **Реимова Л.Ж.**[2], **Бекиева А.А.**[3]

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Каракалпакстан;
qayratdinjamalov95@gmail.com
Каракалпакский государственный университет, Нукус, Каракалпакстан;
reimovalaura@gmail.com
Каракалпакский государственный университет, Нукус, Каракалпакстан;

В настоящее время теория краевых и смешанных задач для уравнений четвертого порядка интенсивно развивается, и представляют собой основной раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Постановка задачи. В прямоугольной области $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<p,\ 0<y<\beta\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - a^2 t^m u_{xxxx} - b^2 t^m u = F(x,t) \tag{1}$$

где a, b, p, β, $m>0$ - заданные действительные числа, $F(x,t)$ - заданная функция.

Задача 1. Найти в области Ω функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,0)=\xi(x),\ u(x,\beta)=\eta(x),\quad 0\le x\le p, \tag{2}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(p,t)=\mu_2(t),\ u_{xx}(0,t)=\mu_3(t),\ u_{xx}(p,t)=\mu_4(t),\ 0\le t\le\beta, \quad (3)$$

где $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,4}$-заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\xi(0)=\mu_1(0),\xi(p)=\mu_2(0),\eta(0)=\mu_3(\beta),\eta(p)=\mu_4(\beta)$$

$$\xi''(0)=\mu_3(0),\xi''(p)=\mu_4(0),\eta''(0)=\mu_3(\beta),\eta''(p)=\mu_4(\beta)$$

Эта задача при $m=0$, $b=0$ и с нулевыми краевыми условиями изучены в работе [1-3].

Доказано однозначная разрешимость рассматриваемой задачи. Установлены критерии единственности и существования решения задачи для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Существование решения задачи показано методом разделения переменных. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям, соответствующей спектральной задачи. Установлены достаточные условия на граничные функции, которые гарантируют выполнимость теоремы существования и устойчивости решения рассматриваемой задачи. В замкнутой области показана абсолютная и равномерная сходимость найденного решения задачи в виде ряда, а также рядов, полученных почленным дифференцированием по t и x соответственно два и четыре раза, в зависимости от гладкости функции заданными граничными условиями. Единственность решения задачи вытекает из полноты ортонормированных систем, составленной из собственной функции соответствующей спектральной задачи. Доказана также, устойчивость решения задачи по нормам пространств L_2 и $C(\Omega)$, относительно изменения входных данных.

Литература

1. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. 2005, №3. С. 72-77.

2. Аманов Д., Юлдашева А.В. Сильная разрешимость полупериодической самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. 2009, №2. С.3-8.

3. Бекиев А. Б. Разрешимость нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. С. 9-26.

О Полноте Системы Ортонормированных Собственных Векторов Четырёхмерного Оператора Дирака В Классах Соболева

Мадрахимов У. С.[1], **Ражапова А. М.**[1], **Матёкубова С. Ш.**[1]

[1]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
us.madrakhimov@gmail.com

В данном работе рассмотрены вопросы полноты системы ортонормированных собственных векторов четырёхмерного оператора Дирака в классах Соболева.

Рассмотрим задачу на собственные значения для четырчхмерной стационарной системы Дирака [2]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial y} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi(x,y,z)}{\partial z} + \lambda \psi(x,y,z) = 0. \tag{1}$$

Предположим, что вектор-функция $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ в системе (1) рассматривается в параллелепипеде $T^3 = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$, где $\psi_k(x,y,z) \in C^1([0,a] \times [0,b] \times [0,c])$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$. В связи с системой (1) рассмотрим следующие краевые условия:

$$\begin{cases} \alpha_k \psi_k(0,y,z) + \beta_k \psi_k(a,y,z) = 0, \\ \beta_k \dfrac{\partial \psi_k(0,y,z)}{\partial x} + \alpha_k \dfrac{\partial \psi_k(a,y,z)}{\partial x} = 0, \ k = \overline{1,4}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \gamma_k \psi_k(x,0,z) + \delta_k \psi_k(x,b,z) = 0, \\ \delta_k \dfrac{\partial \psi_k(x,0,z)}{\partial y} + \gamma_k \dfrac{\partial \psi_k(x,b,z)}{\partial y} = 0, \ k = \overline{1,4}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \chi_k \psi_k(x,y,0) + \sigma_k \psi_k(x,y,c) = 0, \\ \sigma_k \dfrac{\partial \psi_k(x,y,0)}{\partial z} + \chi_k \dfrac{\partial \psi_k(x,y,c)}{\partial z} = 0, \ k = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{4}$$

Краевая задача (1)–(4) называется: периодической, если $\alpha_k = -\beta_k \neq 0$, $\gamma_k = -\delta_k \neq 0$, $\chi_k = -\sigma_k \neq 0$, $k = 1,2,3,4$; антипериодической, если $\alpha_k = \beta_k \neq 0, \gamma_k = \delta_k \neq 0$, $\chi_k = \sigma_k \neq 0$, $k = 1,2,3,4$; полупериодической, если $|\alpha_k| \neq |\beta_k|$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1,2,3,4$ и $|\gamma_k| \neq |\delta_k|$, $\gamma_k \neq 0$, $\delta_k \neq 0$, $k = 1,2,3,4$ и $|\chi_k| \neq |\sigma_k|$, $\chi_k \neq 0$, $\sigma_k \neq 0$, $k = 1,2,3,4$ (см например, [3], [4]). Чтобы несколько упростить вычисления, ограничимся случаем $|\alpha_k| \neq |\beta_k|$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ и $|\gamma_k| \neq |\delta_k|$, $\gamma_k \neq 0$, $\delta_k \neq 0$ и $|\chi_k| \neq |\sigma_k|$, $\chi_k \neq 0$, $\sigma_k \neq 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. [1] Пусть

$$X_{k,n}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{\beta_k\cos\mu_{k,n}\frac{\pi}{a}x+\varepsilon_{k,n}\,\mathrm{s}\,ign(\beta_k^2-\alpha_k^2)\alpha_k\sin\mu_{k,n}\frac{\pi}{a}}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}\cdot\sqrt{1+|\mu_{k,n}|^{2s}}},\quad n\in\mathbb{Z},\ k=1,2,3,4,$$

$$Y_{k,m}(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\cdot\frac{\delta_l\cos\tau_{l,n}\frac{\pi}{b}y+\bar{\varepsilon}_{k,n}\,\mathrm{s}\,ign(\delta_k^2-\gamma_k^2)\gamma_k\sin\tau_{k,n}\frac{\pi}{b}y}{\sqrt{\gamma_k^2+\delta_k^2}\cdot\sqrt{1+|\tau_{k,n}|^{2s}}},\quad m\in\mathbb{Z},k=1,2,3,4$$

и

$$Z_{k,l}(z)=\sqrt{\frac{2}{c}}\cdot\frac{\sigma_k\cos\rho_{k,l}\frac{\pi}{c}z+\bar{\bar{\varepsilon}}_{k,l}\,\mathrm{s}\,ign(\sigma_k^2-\chi_k^2)\chi_k\sin\rho_{k,l}\frac{\pi}{c}z}{\sqrt{\chi_k^2+\sigma_k^2}\cdot\sqrt{1+|\rho_{k,l}|^{2s}}},\quad l\in\mathbb{Z},\ k=1,2,3,4$$

– полные ортонормированные системы собственных функций в $W_2^s(0,a)$, $W_2^s(0,b)$ и $W_2^s(0,c)$ соответственно. Тогда системы собственных функций $\psi_{k,n,m,l}(x,y,z)=X_{k,n}(x)\cdot Y_{k,m}(y)\cdot Z_{k,l}(z)$, $k=1,2,3,4$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{Z}$, отвечающие вспомогательным одномерным спектральным задачам соответственно, ортонормированы и полны в пространстве $W_2^s([0,a]\times[0,b]\times[0,c])$, где $\varepsilon_{k,n}=\pm1$, $,\bar{\varepsilon}_{k,m}=\pm1$, $\bar{\bar{\varepsilon}}_{k,l}=\pm1$.

Тем самым мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $|\alpha_k|\neq|\beta_k|$, $\alpha_k\neq0$, $\beta_k\neq0$ и $|\gamma_k|\neq|\delta_k|$, $\gamma_k\neq0$, $\delta_k\neq0$ и $|\chi_k|\neq|\sigma_k|$, $\chi_k\neq0$, $\sigma_k\neq0$, $k=1,2,3,4$ и пусть $\omega=\max\limits_k\{\max\{\omega_k,\bar{\omega}_k,\bar{\bar{\omega}}_k\}\}<1$. Тогда система нормированных собственных векторов $\{\psi_{k,n,m,l}\}$, $k=1,2,3,4$, $n,m,l\in\mathbb{Z}$ четырехмерного оператора Дирака (1)–(4) есть четырехкратная полная ортонормированная система в классах Соболева $W_2^s([0,a]\times[0,b]\times[0,c])$, $s=0,1,2,\ldots$, где $\omega_k=\sqrt{\theta_k^2+2(\frac{\theta_k}{\sqrt{2}}+(\varphi_k+1)^s-1)^2}\cdot\phi(s)$, $\theta_k=\sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,a]}\left|e^{i\varphi_k\frac{\pi}{a}x}-1\right|$, $\varphi_k=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_k\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$, $\bar{\omega}_k=\sqrt{\bar{\theta}_k^2+2(\frac{\bar{\theta}_k}{\sqrt{2}}+(\bar{\varphi}_k+1)^s-1)^2}\cdot\phi(s)$, $\bar{\theta}_k=\sqrt{2}\max\limits_{y\in[0,b]}\left|e^{i\bar{\varphi}_k\frac{\pi}{b}x}-1\right|$, $\bar{\varphi}_k=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\gamma_k\delta_k}{\gamma_k^2+\delta_k^2}$, $\bar{\bar{\omega}}_k=\sqrt{\bar{\bar{\theta}}_k^2+2(\frac{\bar{\bar{\theta}}_k}{\sqrt{2}}+(\bar{\bar{\varphi}}_k+1)^s-1)^2}\cdot\phi(s)$, $\bar{\bar{\theta}}_k=\sqrt{2}\max\limits_{z\in[0,c]}\left|e^{i\bar{\bar{\varphi}}_k\frac{\pi}{c}x}-1\right|$, $\phi(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi(s)=1$ при $s=0,1,2,\ldots$.

Литература

1. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. О полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи $Au=$ в классах Соболева // Узбекский математический журнал. 2009, №2. С.101-111.

2. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. – Издательство "Наука" Сибирский отделение, Новосибирск 1974, 60 с.

3. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. Москва: Наука, 1979. - 400 с.

4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. - Москва: Наука, 1970. - 672 с.

Нелокальные Задачи С Интегральными Условиями Для Уравнений Фоккера-Планка

Маматов Ж. А.,[1] **Кожанов А. И.**[2]
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
z.mamatov@g.nsu.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,;
kozhanov@math.nsc.ru

В докладе представлены результаты о разрешимости нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений Фоккера-Планка.

$$u_t + tu_x - u_{yy} + c(x,y,t)u = f(x,y,t)$$

Здесь x, y, t есть независимые переменные такие, что Ω есть интервал (0,1) оси OX, $y \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$, . В области $Q = \Omega \times (0,1) \times (0,T)$ рассматривается ультрапараболическое уравнение. (c(x,y,t), f(x,y,t) – заданные функции).

Для изучаемых уравнения получены теоремы единственности и существования регулярных решений-то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Литература

1. Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных ультрапараболических уравнений некоторых математических моделей динамики биологических систем, Сиб. журн. индустр. матем., 2009, том 12, номер 4, 64–78

О Второй Краевой Задаче По Времени Для Неоднородного Уравнения Четвертого Порядка С Переменными Коэффициентами

Мамажонов С. М.
Кокандский университет, Коканд, Узбекистан
sanjarbekmamajonov@gmail.com

Рассмотрим уравнение четвертого порядка вида

$$L(u) \equiv u_{xxxx} + a_1(x)u_x + a_2(x)u - u_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

где $f_{xyy}(x,y) \in C(\bar{\Omega})$.

Для уравнения (1) в области $\Omega = \{(x,y) : \ 0 < x < p, \ 0 < y < q, \ p,q \in \mathbb{R}\}$ ставится следующая краевая задача:

Задача *A*. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u\Big|_{x=0} = \psi_{m-1}(y), \quad \frac{\partial^m}{\partial x^m} u\Big|_{x=p} = \psi_{m+1}(y), \quad m = 2,3, \quad 0 \le y \le q, \tag{3}$$

где $\psi_i(y), \ i = \overline{1,4}$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1]-[6] исследованы различные краевые задачи для уравнений четвертого порядка с кратными характеристиками, где модельная часть этих уравнений совпадает с модельной частью уравнения (1).

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(p) \geq 0$, $a_1(0) \leq 0$, $2a_2(x) - a_1'(x) \geq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$\begin{gathered} uL(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + \tfrac{1}{2}a_1(x)u^2\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right) + u_{xx}^2 + \left(a_2(x) - \tfrac{1}{2}a_1'(x)\right)u^2 + u_y^2 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int_0^p\int_0^q (2a_2(x) - a_1'(x))u^2(x,y)dxdy + \int_0^p\int_0^q u_y^2(x,y)dxdy + \\ + \frac{1}{2}a_1(p)\int_0^q u^2(p,y)dy - \frac{1}{2}a_1(0)\int_0^q u^2(0,y)dy = 0.$$

При $2a_2(x) - a_1'(x) > 0$, из второго интеграла имеем $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$, если $2a_2(x) - a_1'(x) = 0$, тогда из третьего интеграла получим $u(x,y) = h(x)$, а первого интеграла – $u(x,y) = xb_1(y) + b_2(y)$. Отсюда вывод, что $u = xb_1 + b_2$, $b_1,\ b_2 = const$. Из пятого интеграла имеем $u(0,y) = b_2 = 0$, а из четвертого интеграла – $u(p,y) = pb_1 = 0$. Отсюда получим $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Приведем следующую теорему без доказательства:

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1. $a_1(p) = a_1(0) = 0$
2. $D < \frac{4}{9}\mu_1^7 p^3(2+\mu_1)^{-1}e^{-2\mu_1 p}$, $D = \max\limits_{\xi\in[0,p]}\{|a_i(\xi)|, |a_1'(\xi)|,\ i = \overline{1,2}\}$, $\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}$;
3. $\psi_i'(0) = \psi_i'(q)$, $\psi_i(y) \in C^3[0,q]$, $i = \overline{1,4}$;
4. $f_\eta(x,q) = f_\eta(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq p$, то решение задача A существует.

Литература

1. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients // Journal of Mathematical Sciences. 2024, 284(2), pp. 153-165.

2. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Second Boundary Value Problem for a Fourth-Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024, 45(8), pp. 3849-3859.

3. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201.

4. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198.

5. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. The boundary value problem for a fourth-order nonhomogeneous equation with variable coefficients // Uzbek Mathematical Journal. 2023, 67(3), pp. 23-32.

6. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172.

Нелокальные Краевые Задачи Для Квазипараболических Уравнений Третьего Порядка С Вырождением

Маманазаров Д. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
d.mamanazarov@g.nsu.ru

Нелокальные краевые задачи с обобщенным условием СамарскогоЦИонкина для квазипараболических уравнений рассматриваются в монографии А.И. Кожанова [1].

В настоящей работе будет изучаться пространственно-нелокальная задача с обобщенным условием Самарского Ц Ионкина для квазипараболических уравнений вида

$$D_t^{2p+1}u + \sum_{k=0}^{2p} a_k(x,t)D_t^k u + u_{xx} + b(x,t)u_x = f(x,t), \qquad (*)$$

в которых $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, p – целое неотрицательное число, $a_k(x,t)$, $k = \overline{0,...,2p}$, $b(x,t), f(x,t)$ – заданные функции.

Уравнения (*) представляют собой квазипараболические уравнения без вырождения. Целью же настоящей работы является исследование разрешимости нелокальных краевых задач для вырождающихся уравнений вида

$$h(t)D_t^{2p+1}u + \sum_{k=0}^{2p} a_k(x,t)D_t^k u + u_{xx} + b(x,t)u_x = f(x,t), \qquad (**)$$

с неотрицательной функцией $h(t)$.

Более точно, в настоящей работе изучаются задачи для уравнений (**) в случае $p = 1$ при задании обобщенных условий Самарского–Ионкина.

Разрешимость нелокальных задач с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квазипараболических уравнений изучалась в работе [2]. Для вырожденных квазипараболических уравнений в качестве примера можно привести работу [3].

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, обладающих всеми необходимыми обобщенными производными по С.Л. Соболеву. Полученные результаты предоставляют новые подходы к решению нелокальных задач в данной области, что может быть полезно для применения в теоретических и прикладных исследованиях.

Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи.–М.: Наука, 2024.

2. А.И. Кожанов, А.М. Абдрахманов Пространственно–нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квазипараболических уравнений, Сиб. электрон. матем. изв., 20:1 (2023), 110–123

3. А.И. Кожанов, Квазипараболические уравнения со слабым вырождением, Математические заметки СВФУ, 28:1 (2021), 27–36

Задача С Недостающим Условием Смещения На Граничных Характеристиках Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа С Различными Порядками Вырождения

Мирсабуров М.[1], Маматмуминов Д.Т.[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru1
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
dilshod310797mdt@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается некоторая смешанная область для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения и с сингулярными коэффициентами, доказываются теоремы единственности и существования решения задачи с условием типа условия В.И.Жегалова и А.М.Нахушева на граничних характеристиках и аналогом условия Ф.И.Франкля на отрезке вырождения. На границе области эллиптичности задается условие Дирихле.

Введение

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x+iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0(y = \sigma_0(x)){:}x^2 + 4(l+2)^{-2}y^{l+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y < 0$- характеристиками AC и BC уравнения

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, \ \textit{при } y > 0, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \ \textit{при } y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где постоянные $l > 0,\ m > 0, \delta_0 \in (-l/2, 1),\ \beta_0 \in (-m/2, 1)$, причем $l \neq m$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $E(c,0)$, где $c \in J = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$- линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1,1]$ в множество точек отрезков $[-1, c]$ и $[c,1]$ соответственно, где $a = (1+c)/2$, $b = (1-c)/2$, причем $p(-1) = -1$, $p(1) = c$, $q(-1) = 1$, $q(1) = c$.

0.1 Постановка задачи с недостаюшим условием смещения

Задачи $JNKK$ (Жегалова, Нахушева, Крикунова, Каратопраклиева).

В области Ω требуется найти функцию $u\left(x,y\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) Функция $u(x,y)$ является непрерывной функцией в замкнутой смешанной области $\overline{\Omega}$, за исключением прямой $y=0$, где существуют конечные односторонние пределы $u(x,-0)$ и $u(x,+0)$;

2) функция $u\left(x,y\right)$ принадлежит классу $C^2\left(\Omega^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+ ;

3) функция $u\left(x,y\right)$ является обобщенным решением класса R_1 в области Ω^-;

4) Сушествуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$, причем при $x\to\pm1$ предел $\lim\limits_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$ может иметь особенность порядка ниже $1-2\delta$, а предел $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}$ может иметь особенность порядка ниже $1-2\beta$, где $\delta=\left(l+2\delta_0\right)/2(l+2)$, $\beta=\left(m+2\beta_0\right)/2(m+2)$, $\delta<1/2,\ \beta<1/2,\ \delta\neq\beta$.

5) на интервале вырождения AB имеет место условия склеивания,

$$u(x,-0)=a_1(x)u(x,+0)+a_0(x),\quad x\in[-1,1], \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=b_1(x)\lim_{y\to+0}y^{\delta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\ x\in(-1,1)/\{c\}, \tag{3}$$

6) для любых $x\in\overline{J}$ выполняются равенства

$$u(x,\,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x)\,,\ x\in\bar{J}; \tag{4}$$

$$\mu_0u\left[\theta_0(p(x))\right]+\mu_1u\left[\theta_1(q(x))\right]=\psi(x)\ ,\ x\in\overline{J}; \tag{5}$$

$$u(p(x),-0)-u(q(x),-0)=f(x)\,,\ x\in\overline{J}\,; \tag{6}$$

где $\theta_0(p(x_0))$ и $\theta_1(q(x_0))$ аффиксы точек пересечения граничних характеристик AC_0 и BC_1 с характеристиками, исходящими из точек $M\left(p\left(x_0\right),0\right)$ и $M\left(q\left(x_0\right),\ 0\right)$ соответственно, где $x_0\in\overline{J}$, $\varphi\left(x\right)$, $f\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)-$ заданные достаточно гладкие функции; μ_0 , μ_1-некоторые постоянные, причем $\varphi(\pm1)\equiv0,\ \psi(-1)\equiv0$, $f(\pm1)\equiv0$, $f\left(c\right)\equiv0$, $\mu_0^2+\mu_1^2\neq0$.

2. Единственность решения задачи $JNKK$**.** Единственность решения задачи $JNKK$ доказывается методом принцип экстремума.

Теорема 1. *Решение задачи* $JNKK$ *при выполнении условий* $\psi\left(x\right)\equiv0$, $f\left(x\right)\equiv0$,

$$\mu_0>0,\ \ \mu_1>0,\ \ b_1\left(x\right)>0,\ a_1\left(x\right)>0 \tag{7}$$

имеет не более одного решения.

Доказательство теоремы 1 идентичен работе [4].

3. Существование решения задачи $JNKK$**.**

Теорема 2. *Решение задачи* $JNKK$ *при выполнении условий* $\varphi\left(x\right)\in C^{0,\alpha}\left[\overline{J}\right]$, $\psi\left(x\right)\in C\left(\overline{J}\right)\cap C^2\left(J\right)$, $f\left(x\right)\in C\left(\overline{J}\right)\cap C^2\left(J\right)$, *(12) и*

$$\beta<\delta<1/4, \tag{8}$$

существует. Доказательство теоремы 2 проводиться методом работы [3],[4].

Литература

1. Жегалов В.И . Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии, Учен. записки Казанск. ун-та. 122 (3), 3-16 . (1962).

2. Нахушев А. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа, Дифференц.уравнения. 5 (1), 44-59. (1369).

3. Крикунов Ю.М. Задача Трикоми для одного частного случая уравнения $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$: Труды семинара по краевым задачам, Изд-во Казанского гос. ун-та. вып.4, 75-89. (1967).

4. Мирсабуров М. Задача с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Известия вузов, Математика., Известия вузов, Математика. 5, 52- 63 (2018).

Задача Коши Для Бигармонического Уравнения Теплопроводности

Махмудов К.О.[1], Махмудов О.И.[2]

Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан;
komil.84@mail.ru[1], makhmudovo@rambler.ru[2]

Данная задача мотивирована работой [6] в которой развивается подход к изучению динамики решения эллиптического уравнения в ограниченной области $\subset^n$ с данными задачи Коши, заданными на открытом участке S граничной поверхности ∂. Пусть ограниченная область с гладкой границей в пространстве ^{n} и пусть S непустая открытая часть граничной поверхности ∂. Рассмотрим задачу Коши для бигармонического уравнения теплопроводности в цилиндре $_T = \times(0,T)$ с начальными данными на полосе $S \times (0,T)$ боковой поверхности цилиндра, где $T > 0$ некоторое фиксированное число. Точнее, при заданных функциях f на $_T$ и u_0, u_1, u_2, u_3 на $S \times (0,T)$, требуется найти функцию $u \in C^4(_T) \cap C^3(\overline{T})$ в цилиндре $_T$ удовлетворяющую условиям задачи

$$\begin{array}{rcll} u'_t & = & {}^2u + f & \text{в} \quad {}_T, \\ u & = & u_0 & \text{на} \quad S \times (0,T), \\ u & = & u_1 & \text{на} \quad S \times (0,T), \\ u'_\nu & = & u_2 & \text{на} \quad S \times (0,T), \\ (u)'_\nu & = & u_3 & \text{на} \quad S \times (0,T), \end{array} \tag{1}$$

где ν единичный вектор внешней нормали к границе ∂.

Из результатов статьи [1] следует, что задача (1) имеет самое большее одно гладкое решение u.

На боковой поверхности нет характеристических точек уравнения теплопроводности, и таким образом теорема Коши–Ковалевской применима к задаче (1). Следовательно, если к тому же область S является действительно аналитической, то для всех действительных аналитических начальных данных f and u_0, u_1, u_2, u_3 эта задача имеет локально близкое к $S \times (0,T)$ действительное аналитическое решение u. Из предыдущих соображений следует, что это решение единственно.

Чтобы построить приближенное решение задачи Коши (1), продолжим начальные данные f и u_0, u_1, u_2, u_3 на весь полуцилиндр $t > 0$, т.е., в дальнейшем будем считать, что $T = \infty$. Применяя преобразование Лапласа по $t \in (0,\infty)$ ко всем уравнениям задачи (1)

$$\hat{u}(x,\tau) := \mathcal{L}u\,(x,\tau) = \int_0^\infty e^{-\imath\tau t} u(x,t)\,dt$$

получим семейство задач Коши

$$\begin{array}{rcll} (^2-\imath\tau)\hat{u}(\cdot,\tau) & = & -u(\cdot,0)-\hat{f}(\cdot,\tau) & \text{в} \quad , \\ \hat{u}(\cdot,\tau) & = & \hat{u}_0(\cdot,\tau) & \text{на} \quad S, \\ \hat{u}(\cdot,\tau) & = & \hat{u}_1(\cdot,\tau) & \text{на} \quad S, \\ \hat{u}'_\nu(\cdot,\tau) & = & \hat{u}_2(\cdot,\tau) & \text{на} \quad S \\ (\hat{u})'_\nu(\cdot,\tau) & = & \hat{u}_3(\cdot,\tau) & \text{на} \quad S, \end{array} \tag{2}$$

в области , параметризованных комплексным параметром τ меняющимся вдоль горизонтальной линии в нижней полуплоскости. Для любого фиксированного τ, соотношения (2) определяют задачу Коши для типа бигармонической версии уравнения Гельмгольца в области с начальными данными на части границы S. Хорошо известно, что эта задача неустойчива в естественной постановке, если S не совпадает со всей границей. А это подтверждает, что задача (1) некорректна, см., [2], [4], [5].

Через $\hat{G}(x;\tau)$ обозначим фундаментальное решение типа свертки для оператора $^2-\imath\tau$ в пространстве ^{n}.

Тогда для фиксированного τ, приближенное решение задачи (2) получается из так называемой формулы Карлемана

$$\hat{u}(x,\tau)=\lim_{N\to\infty}\Big(-\int_S\Big(\hat{C}_N(x,\cdot;\tau)\partial_\nu(\hat{u})-\partial_\nu\hat{C}_N(x,\cdot;\tau)\hat{u}+\hat{C}_N(x,\cdot;\tau)\partial_\nu\hat{u} \\ -\partial_\nu\hat{C}_N(x,\cdot;\tau)\hat{u}\Big)\,ds+\oint\hat{C}_N(x,\cdot;\tau)(^2-\imath\tau)\hat{u}\,dy\Big) \tag{3}$$

при всех $x\in$, где ds поверхностная мера на границе ∂.

Положим

$$C_N(x,y;t)=\mathcal{L}^{-1}\hat{C}_N(x,y;\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Im\tau=\gamma}e^{\imath t\tau}\hat{C}_N(x,y;\tau)\,d\tau$$

при (x,y) лежащих вне диагонали в $\times$ и при $t>0$, где γ достаточно малое отрицательное число.

Кроме того, $C_N(x,y;t)$ в некотором смысле стремится к нулю по y вне S на границе области , при $N\to\infty$. Следовательно, последовательность ядер $C_N(x,y;t)$ является обобщением на случай задачи (1) the понятия функции Карлемана в задаче Коши для эллиптических уравнений, развитого в работе [3].

Формулу для приближенного решения задачи (1) легко получить, если функция Карлемана C_N задана явным образом.

Если $C_N(x,y;t)$ функция Карлемана задачи (1), то формула

$$u_N=\mathcal{P}_{i,N}(u(\cdot,0))+\mathcal{P}_{s,N}(u_3)+\mathcal{P}_{d,N}(u_1)+\mathcal{P}_{g,N}(u_2)+\mathcal{P}_{j,N}(u_0)+\mathcal{P}_{v,N}(f)$$

дает приближенное решение задачи в цилиндре $_T$, где

$$\mathcal{P}_{i,N}(u(\cdot,0))=-\int C_N(x,\cdot;t)u(\cdot,0)dy, \qquad \mathcal{P}_{s,N}(u_3)=-\iint\limits_{S0}^{t} C_N(x,\cdot;t-t')u_3 dsdt',$$

$$\mathcal{P}_{d,N}(u_1)=\iint\limits_{S0}^{t}\partial_\nu C_N(x,\cdot;t-t')u_1 dsdt', \qquad \mathcal{P}_{g,N}(u_2)=\iint\limits_{S0}^{t}\partial_\nu C_N(x,\cdot;t-t')u_2 dsdt'.$$

$$\mathcal{P}_{j,N}(u_0)=-\iint\limits_{0}^{t}\partial_\nu \Delta C_N(x,\cdot;t-t')u_0 dsdt', \quad \mathcal{P}_{v,N}(f)=-\iint\limits_{0}^{t} C_N(x,\cdot;t-t')f dydt'.$$

Литература

1. Е.М. Ландис, О.А. Олейник Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений, УМН, 29:2(176) (1974), 190–206.

2 М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский Некорректные задачи математической физики и анализа, Наука, М., 1980.

3 N.N. Tarkhanov The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Math. Top., 7, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

4 R.E. Puzyrev, A.A. Shlapunov On an ill-posed problem for the heat equation, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 5:3 (2012), 337–348.

5. K.O. Makhmudov, at al., Equations of Maxwell type. J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), Issue 1, 64–75.

6. К.О.Махмудов , О.И. Махмудов, Н.Н.Тарханов Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности // Мат. заметки. 2017. Т. 102, 2. С. 270–283.

Задача В Неограниченной Области С Условием Бицадзе-Самарского На Части Граничной Характеристике И Параллельной Ей Внутренней Характеристики Для Уравнения Геллерстедта С Сингулярными Коэффициентами

Тураев Р. Н.[1], Мирзаев Ф.С.[2]

[1]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
rasul.turaev@mail.ru

[2]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
fayzullamirzayev95@mail.com.

В настоящей работе в некоторой конечной смешанной области для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0$ исследуется задача с комбинированными условиями Трикоми и аналогом условия Франкля на одной граничной характеристике. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума А.В.Бицадзе. Существование решения задачи доказывается с помощью теории сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера-Хопфа и уравнений Фредгольма второго рода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ BSF (БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ, ФРАНКЛЬ).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$. Через C_0 и C_1 соответственно обозначим точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)-$ интервал оси $y = 0$.

В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлет- воряюшие условиям $m > 0,\ |\alpha_0| < (m+2)/2,\ -m/2 < \beta_0 < 1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0^* C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0^* B_0^* : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай когда $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta E_0^* C_0^* B_0^* \bigcup E_0^* C_0^*$, где $E_0^* = E_0^*(0,1)$.

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0)$,

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,\ -R \le x \le R,\ 0 \le y \le ((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $I = \{(x,y) : -1 < x < 1,\ y = 0\},\ \overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \le -1,\ y = 0\},\ \overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \le x < +\infty,\ y = 0\},\ D_R = D_R^+ \bigcup D^- \bigcup I,\ D_R$ -подобласть неограниченной области D.

Введем линейные функции $p(x) = ax - b$ и $q(x) = a - bx$, отображаюшие отрезок $[-1,1]$ на отрезки $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответсвенно, причем $p(-1) = -1,\ p(1) = c,\ q(-1) = 1,\ q(1) = c,\ a = (1+c)/2,\ b = (1-c)/2$ [2].

Задача BSF. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти D_R неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1[1, с.104], в области D^-;

4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее обшее условие сопряжения

$$u(x,-0) = a_1(x)u(x,+0) + a_2(x),\ x \in [-1,1], \tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = b_1(x)\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x),\ x \in I, \tag{3}$$

причем пределы в (2) при $x = \pm 1$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha = (m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta = (m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < 1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, \tag{4}$$

где $R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x),\ \forall x \in \overline{I}_i,\ i = 1,2; \tag{5}$$

$$\mu_0(1+x)^{\alpha} D^{1-\beta}_{-1,x} u\left[\theta\left(p(x)\right)\right] = \mu_1(1-x)^{\alpha} D^{1-\beta}_{x,1} u\left[\theta^*\left(q(x)\right)\right] + \psi(x),\ x \in [-1,1]; \tag{6}$$

$$u\left(p(x),-0\right) - u\left(q(x),+0\right) = f(x),\ x \in [-1,1], \tag{7}$$

где $\mu_0,\ \mu_1-$ некоторые постоянные, причем $\mu_0^2 + \mu_1^2 \neq 0$, $D^{1-\beta}_{-1,x},\ D^{1-\beta}_{x,1}-$ операторы дифферен- цирования дробного порядка [1,с.16].

$\theta(x_0)$-аффикс точки пересечения характеристики $AC_0 \subset AC$ с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0,0)$, $x_0 \in [-1,c]$;

$\theta^*(x_0)$-аффикс точки пересечения характеристики EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $M_0(x_0,0)$, $x_0 \in [c,1]$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ - заданные функции, причем $\varphi_1(-1) = 0$, $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_1(-\infty) = 0$, $\varphi_2(+\infty) = 0$, $f(1) = 0$, $\psi(x) \in C\left[-1,1\right] \bigcap C^1(-1,1)$, $f(x) \in C\left[-1,1\right] \bigcap C^1(-1,1)$, функции $\varphi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на любых отрезках $\left[-N,-1\right]$, $\left[1,N\right]$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-\delta_0}$, δ_0 -положительная постоянная.

Литература

1. Smirnov, M.M. *Uravneniye smeshannogo tipa* (Equations of mixed type), Moscow: Nauka, 1985.

2. Mirsaburov M., Turaev R. N. On a Nonlocal Problem for the Gellerstedt Equation with Singular Coefficients. // Differential Equations. 2024. T.60, №8. C. 1074-1086..

Единственной Решение Обратной Задачи Об Источнике Для Уравнение Хопфа

Мукумов А.Х.

Университет экономики и педагогики, Карши, Узбекистан;
e-mail: asqarmuqumov@gmail.com

Рассмотрим одномерную динамическую обратную задачу об определении функции $u(t,x), g(t)$, если выполнены неоднородное уравнение Хопфа и следующее условия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)g(t), t > 0, x \in R, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), x \in R \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t), t > 0. \tag{3}$$

Функция $f(x)$ задана. Без потери общности можно считать, что $f(0) = 1$. Предположим, что выполнено условие согласование

$$\varphi(0) = u_0(0). \tag{4}$$

Используя (3), исключим из (1) неизвестную функцию $g(t)$ и получим за-дачу Коши для назруженного уравнение. С этой целью формально диффе-ренцируем по x обе части (1) и вводим обозначение $v = u_x$. Та-ким образом приходим к следующей задаче для нагруженного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v^2 = F(t,x) + G(t,x)v(t,0), \tag{5}$$

$$v(0,x) = u_0^{'}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \tag{7}$$

$$u(t,0) = \varphi(t), \tag{8}$$

где $F(t,x) = f'(x)\varphi'(t)$ и $G(t,x) = f'(x)\varphi(t)$.

Единственность решения задачи (1)-(4) докажем при условиях:

$$f(x) \in C^1[-1,1], g(t) \in L_1(0,t_0). \tag{9}$$

Теорема. Пусть функция $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема и $f(x)$, $h(t)$ удовлетворяют условию (9) и $f(0) = 1$. Тогда решение за-дачи (1)-(4) единственно.

Literature

1. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44, №4. С. 722–744.

Аналог Задачи Трикоми Для Нагруженного Уравнения Параболо-Гиперболического Типа Второго Рода, Вырождающегося Внутри Области

Исломов Б. И.[1], **Насирова Д. А.**[2]

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
islomovbozor@yandex.com

[2]Ташкентский государственный технический университет им. И. Каримова, Ташкент, Узбекистан;
ndildora0909@gmail.com

Краевые задачи для уравнения второго и третьего порядков параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области, изучены в работах [1-4]. Локальные краевые задачи для вырождающегося нагруженноо уравнения смешанного типа второго порядка исследованы в работах [5-8].

В данной работе изучается аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа второго рода**,** вырождающегося внутри области.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y ограниченная кривыми:

$$S_j: \quad |x| = 1, \;\; 0 < y < 1, \quad S_3: \quad 0 < x < 1, \;\; y = 1, \quad S_4: \quad -1 < x < 0, \;\; y = 1,$$

$$\Gamma_j:\ |x|-\frac{2}{2-m}(-y)^{2/(2-m)}=0,\quad \Gamma_{j+2}:\ |x|-\frac{2}{2-m}(-y)^{2/(2-m)}=1,\qquad y<0,$$

здесь и далее $x\geq 0$ при $j=1$, $x\leq 0$ при $j=2$, причем $0<m<1$.

Введем обозначения: $\Omega_j^+=\Omega\cap\{(x,y):\ |x|>0,\ y>0\}$, $\Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup I_j$,

$$\Omega_j^-=\Omega\cap\{(x,y):\ |x|>0,\ y<0\},\ \ I_j=\{(x,y):\ 0<|x|<1,\ y=0\},\ (j=1,2),$$

$$I_3=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<1\},\ \Omega_3=\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\cup I_3.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-|x|^p u_y-\rho_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u(x,0), & (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases}\tag{1}$$

где $m,\quad p,\quad \rho_j,\quad \mu_j\ (j=1,2)-$ любые действительные числа, причем

$$0<m<1,\ p>0,\ \rho_j>0,\ \mu_j>0,\ (j=1,2).\tag{2}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая задача.

Задача T. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$; 2) $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega_j^+(j=1,2)$; 3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [8] в области Ω_1^- и Ω_2^-; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{S_j}=\varphi_j(y),\ \ 0\leq y\leq 1,\qquad u|_{\Gamma_j}=\psi_j(x),\quad 0\leq(-1)^{j+1}x\leq\frac{1}{2},\ (j=1,2),$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$ заданные функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)=0$,

$$\varphi_j(y)\in C(\bar{I}_3)\cap C^1(I_3),\tag{3}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\bigcap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right),\psi_2(x)\in C^1\left[-\frac{1}{2},0\right]\bigcap C^2\left(-\frac{1}{2},0\right).\tag{4}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (3), (4), то в области Ω решение задачи T существует и единственно.*

Единственность решение задачи T доказывается с помощью принципа экстремума и методом интегралов энергии, а сушествования решения - методом интегральных уравнений.

Литература

1. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // Дифференциальные уравнения. 1976. **12**(1). С. 103-108.

2. Сопуев А. О краевых задачах для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с не характеристической линий изменения типа. // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. №1. С.33-38

3. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевая задача для смешанного эллиптико – параболического уравнения с различными порядками вырождения внутри области.// Узбек. мат. журнал.1994. №4. С. 51-60.

4. Исломов Б., Хасанов Ф. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Тез. докл. Международного Российско-Узбекского симпозиума. Нальчик, 2003. С. 58-59.

5. Салохитдинов М.С., Исломов Б. Нелокальная краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. // Известия вузов. Математика. Россия. 2011. №1. С. 49-58.

6. Аттаев А.Х. Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения // Вестник Карагандинского университета. Серия "Математика". Караганда: Изд. КарГУ. 2017. №2. С. 8-13.

7. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle. // Uzbek Mathematical Journal. 2018. №3. P. 63-72.

8. Islomov B. I. , Nasirova D. A. A problem with gellerstedt conditions on different characteristics for a mixed loaded equation of the second kind.// Eurasian Math. J. 2024. **15**(1). P. 34–48.

Задача Коши Для Бигармонического Уравнения В R^3

Махмудов О. И.[1], **Ниёзов И. Э.**[2]

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан;
makhmudovo@rambler.ru
Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан;
iqboln@mail.ru

Рассматривается задача аналитического продолжения решения бигармонического уравнения в области трех измерениях, по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Пусть $D-$ ограниченная односвязная область в E^d $(d = 3)$, вещественного евклидово пространство.

Задача Коши. Пусть $D-$область с гладкой границей ∂D, S гладкий кусок границы. $u(y)-$ непрерывная вместе со своими частными производными третьего порядка на $\overline{D} = D \cup \partial D$ функция.

Рассмотрим задачу: требуется найти вектор-функцию $u(x) \in C^3\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую условию

$$\begin{cases} \triangle^2 u(x) = 0, & x \in D \\ u(y) = f_0(y), \quad \triangle u(y) = f_1(y), & y \in S \\ \frac{\partial u(y)}{\partial n} = \varphi_0(y), \quad \frac{\partial}{\partial n}\triangle u(y) = \varphi_1(y), & y \in S \end{cases} \tag{1}$$

где $f_0,\ f_1;\ \varphi_0,\ \varphi_1-$ заданные на S непрерывные функции.

Эта уравнения эллиптического типа. Задача Коши для эллиптических уравнений некорректно. Некорректность задачи аналогична некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа [1], [2].

В данной работе на основе разложения фундаментального решения бигармонического уравнения в шаре с помощью однородных гармонических полиномов приводится критерий разрешимости задачи Коши.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.

2. Фамилия И.О. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. 1977. Т.235. №. 2.С.281-283.

Обратная Задача Определения Правой Части Дифференциального Уравнения Четвертого Порядка

Дурдиев У.Д.[1], **Одинаев Р.Р.**[2]

Бухарское отделение института математики имени В.И. Романовского, Академии наук Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан;
umidjan93@list.ru

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
odinayevrashid@mail.ru

Рассмотрим в прямоугольной области $D := \{(x,t);\ 0 < x < l,\ \ 0 < t \le T\}$ следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = p(x)q(t), \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

где $p(x), q(t)-$ достаточно гладкие заданные функции.

Прямая задача. Найти решение $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{4,k}_{x,t}(\overline{D})$ уравнения (1) со следующими начальными

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $k \ge 2-$ фиксированное натуральное число, $\varphi(x)$ и $\psi(x)-$ заданные функции.

Обратная задача. Найти функцию $p(x)$, $x \in [0,l]$ в уравнении (1), если решение прямой задачи (1)-(3) удовлетворяет условию:

$$u(x,T) = g(x), \tag{4}$$

где $g(x)-$ заданная функция.

Определение 1. *Классическим решением начально-краевой задачи* (1)- (3) *назовем функцию* $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{4,k}_{x,t}(\overline{D})$, *удовлетворяющую уравнениям* (1)- (3) *в обычном смысле.*

В данной работе была изучена обратная задача, связанная с определением правой части дифференциального уравнения четвертого порядка. Для представления

решения прямой задачи было построено фундаментальное решение этого уравнения и исследованы его свойства. Были выведены достаточные условия существования решения прямой задачи, которые затем использовались при исследовании обратной задачи. Доказаны результаты локального существования и глобальной единственности решения, а также приведены условные оценки устойчивости полученных решений.

Литература

1. Durdiev U.D. Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation in an infinite domain, Diffe r. Equations, **59**:4, 462-472; 2023.

2. Durdiev D.K., Turdiev H.H. Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type over-determination conditions, Methods in the Applied Sciences, **47**:6, 5329–5340 2024.

Условия Корректности Дифференциального Уравнения Третьего Порядка С Неограниченными Коэффициентами

Оспанов К. Н.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
kordan.ospanov@gmail.com

Рассмотрим следующее уравнение

$$L_0 y = -s(x)\left(\rho(x)y''\right)' + r(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, s, ρ, r - непрерывно дифференцируемы, q - непрерывна, а $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Через L обозначим замыкание в L_p дифференциального оператора

$$L_0 y = -s(x)\left(\rho(x)y''\right)' + r(x)y' + q(x)y,$$

определенного на множестве $C_0^{(2)}(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций. Решением уравнения (1) назовем элемент $y \in D(L)$, если $Ly = f$.

Мы обсуждаем условия, достаточные для однозначной разрешимости уравнения (1). Также приводим равномерные оценки весовых норм решения и его производных до второго порядка.

Дифференциальные уравнения третьего порядка возникают во многих практических задачах, например, при нахождении прогиба трехслойной балки, описании малых флуктуаций заряда с учетом тормозящей силы излучения, автоматическом управлении космическим аппаратом, паровой турбиной и т. д. [1, 2]. Вопросы корректности уравнения (1) с неограниченными коэффициентами, в основном изучались в случае $r = 0$ (см. [3] и приведенные там ссылки). Когда r - быстро растущая функция и $p = 2$, они были рассмотрены в [4] (случай $s = \rho = 1$) и в [5].

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант є AP23488049).

Литература

1. Gregus M. Third Order Linear Differential Equations. Dordrecht: Reidel, 1982.

2. Padhi S., Pati S. Theory of Third-Order Differential Equations. Berlin/Heidelberg: Springer, 2014.

3. Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications// Dokl. Math. 2010. Vol. 82. P. 909–911.

4. Ospanov K.N., Yeskabylova Z.B., Beisenova D.R. Maximal regularity estimates for higher order differential equations with fluctuating coefficients// Eurasian Math. J. 2019. Vol. 10. P. 65–74.

5. Ospanov M., Ospanov K. The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2024. Vol. 47. P. 4895–4910.

Разрешимость Одной Краевой Задачи Для Уравнения Четвертого Порядка

Отарова Ж.А.[1], **Бекиев А.Б.**[2]

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан; j.otarova@mail.ru

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан; ashir1976@mail.ru

Математическое моделирование многих процессов механики, физики, биологии нередко приводит к решению задач с нелокальными условиями. Различные краевые задачи для, в которых краевые условия представлены как соотношения между значениями искомых функций, вычисленные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области исследованы многими авторами. В данной работе рассматривается одна краевая задача с нелокальным граничным условием для уравнения четвертого порядка.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}(x,t) - t \cdot [u_{tt}(x,t) - u_t(x,t)] + b^2 u(x,t) = 0, \tag{1}$$

где b - заданное число.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \bigcap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+ \bigcup \Omega_-\right), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0,\ (x,t) \in \Omega_+ \bigcup \Omega_- \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = u_x(1,t),\ u_{xx}(1,t) = 0,\ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t),\ -\alpha \le t \le \beta, \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\Omega_+ = \Omega \bigcap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \bigcap \{t < 0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi''(1) = 0$, $\psi(0) = \psi''(1) = 0$ $\varphi^{(2i+1)}(0) = \varphi^{(2i+1)}(1)$, $\psi^{(2i+1)}(0) = \psi^{(2i+1)}(1)$, $i = 0, 1$.

Системы функций

$$\lambda_k = 2k\pi,\ k = 1, 2, ...$$

$$X_0(x)=2x,\ \ X_{1\,k}(x)=2\sin\lambda_k x,\ \ X_{2\,k}(x)=\frac{e^{\lambda_k x}-e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k}-1}+\cos\lambda_k x,\ k=1,2,... \quad (6)$$

$$Y_0(x)=1,\ Y_{1\,k}(x)=\frac{e^{\lambda_k x}+e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k}-1}+\sin\lambda_k x,\ Y_{2\,k}(x)=2\cos\lambda_k x,\ k=1,2,... \quad (7)$$

образуют биортогональную систему и образуют базис Рисса $L_2[0,1]$ [1-2].

Решение задачи ищется виде ряда составленных из базисных функций Рисса (6). Единственность решения задачи 1, вытекает из полноты ортонормированных систем (7).

$$u(x,t)=u_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[u_{1k}(t)X_{1\,k}(x)+u_{2k}(t)X_{2\,k}(x)], \quad (8)$$

где $u_0(t)$, $u_{i\,k}(t)$ соответственно определены в (9), (10).

$$u_0(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[\varphi_0 e^{-\frac{1}{2}\beta}\left(\mu_0\cos\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\cdot sh\dfrac{1}{2}v_0t+v_0 sin\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha\cdot ch\dfrac{1}{2}v_0t\right)+\right.\\ \left.+\mu_0\psi_0 e^{\frac{1}{2}\alpha}sh\dfrac{1}{2}v_0(\beta-t)\right],\ t>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[v_0\varphi_0 e^{-\frac{1}{2}\beta}\sin\dfrac{1}{2}\mu_0(t+\alpha)+\right.\\ \left.+\psi_0 e^{\frac{1}{2}\alpha}\left(\mu_0 sh\dfrac{1}{2}v_0\beta\cdot\cos\dfrac{1}{2}\mu_0 t-v_0 ch\dfrac{1}{2}v_0\beta\cdot\sin\dfrac{1}{2}\mu_0 t\right)\right],\ t<0.\end{cases} \quad (9)$$

$$u_{i\,k}(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[\varphi_{i\,k}e^{-\frac{1}{2}\beta}\left(\mu_k\cos\dfrac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot sh\dfrac{1}{2}v_kt+v_k sin\dfrac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot ch\dfrac{1}{2}v_kt\right)+\right.\\ \left.+\mu_k\psi_{i\,k}e^{\frac{1}{2}\alpha}sh\dfrac{1}{2}v_k(\beta-t)\right],\ t>0,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}t}}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[v_k\varphi_{i\,k}e^{-\frac{1}{2}\beta}\sin\dfrac{1}{2}\mu_k(t+\alpha)+\right.\\ \left.+\psi_{i\,k}e^{\frac{1}{2}\alpha}\left(\mu_k sh\dfrac{1}{2}v_k\beta\cdot\cos\dfrac{1}{2}\mu_k t-v_k ch\dfrac{1}{2}v_k\beta\cdot\sin\dfrac{1}{2}\mu_k t\right)\right],\ t<0.\end{cases} \quad (10)$$

Теорема 1.Если существует решение задачи 1, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия

$$\bar{\Delta}_k(\alpha,\ \beta)=2\Delta_k(\alpha,\beta)=2\left[\mu_k\cos\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot sh\tfrac{1}{2}v_k\beta+v_k sin\tfrac{1}{2}\mu_k\alpha\cdot ch\tfrac{1}{2}v_k\beta\right]\neq 0,$$

при всех $k\in N_0$.

Лемма 1. Если α иррациональное число, которая представляется в виде $\alpha=\frac{l}{\pi q}$, где $q,l\in N$, $(l,q)=1$ и $(q,4)=1$, то при больших k существует положительная постоянная C_0 такая, что справедлива следующая оценка

$$|\Delta_k(\alpha,\beta)|\geq C_0k^2e^{\lambda_k^2\beta}. \quad (11)$$

Лемма 2.Пусть имеет место оценка (11). Тогда при больших натуральных k справедливы следующие оценки:

$$|u_{ik}(t)| \le \begin{cases} C_1\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t > 0, \\ C_2\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t < 0, \end{cases} \quad |u'_{ik}(t)| \le \begin{cases} C_3k^2\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t > 0, \\ C_4k^2\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t < 0, \end{cases}$$

$$\left|u''_{ik}(t)\right| \le \begin{cases} C_5k^4\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t > 0, \\ C_6k^4\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right), & t < 0, \end{cases}$$

здесь и далее C_i- положительные постоянные.,

Литература

1. Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J. The SamarskiiЦIonkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3884–3893.

2. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка // УзМЖ.-Ташкент, 2012. №1. -С.74–80. (01.00.00; №6).

Оценка Решений Одного Класса Конечномерных Нелинейных Уравнений

Мухтарбай Отелбаев[1], Бакытбек Кошанов[1]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, otelbaevm@mail.ru, koshanov@math.kz;

Аннотация

В этой статье мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном пространстве. Эти теоремы доказаны при выполнении некоторых условий, которые заимствованы из условий которым удовлетворяют конечномерные аппроксимации одного класса нелинейных начально-краевых задач.

1. Введение и о происхождении задачи

Многие задачи математической физики благодаря закону сохранения энергии позволяют доказать существование решения, которое удовлетворяет энергетической оценке. Энергетическая оценка в случае, когда количество пространственных переменных n не меньше чем 3, обычно не позволяет использовать теорию возмущений.

Решения, которые не позволяют (точнее, не могут позволить) использовать теорию возмущений, называются (обычно) "слабыми" решениями.

Возможность использовать теорию возмущений очень важна в задачах математической физики. Поэтому в теории дифференциальных уравнений сильно интересуются вопросами существования решения, позволяющего использовать теорию возмущений.

Решение уравнения, которое позволяет использовать теорию возмущений, математически называют "сильным" решением (не всегда).

Многие задачи математической физики могут быть записаны в "ограниченной записи" (в виде интегрального уравнения) обычно следующего вида

$$f(u) = u + L(u) = g, \tag{1}$$

где $L(u)$ – нелинейная часть. Это уравнение изучается часто в метрике некоторого Банахова или Гильбертова пространства H.

При переходе к "ограниченной записи" энергетическая оценка, обычно выполняющаяся для задач математической физики, перейдет в априорную оценку следующего вида

$$\|G(u)\| \leq C \cdot \|u + L(u)\| = C\|g\|, \tag{2}$$

где C – постоянное число, не зависящее от $u \in H$, а G – вполне непрерывный оператор в H.

Априорная оценка (2) обычно не позволяет использовать теорию возмущений. Поэтому возникает необходимость получить оценку следующего вида

$$\|u\| \leq \varphi\left(\|f(u)\|\right), \tag{3}$$

где $\varphi(\cdot)$ – непрерывная на $[0, \infty)$ функция.

Наличие оценки вида (3), как правило, открывает возможность использования теории возмущений (при подходящем выборе пространства H).

Весьма важной проблемой является проблема существования последовательности конечномерных аппроксимаций задачи (1) (точнее, аппроксимаций операции $u + L(u)$):

$$f_1(\cdot),\ f_2(\cdot),\ \ldots,\ f_n(\cdot),\ \ldots \tag{4}$$

рассматриваемых в пространствах

$$H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n,\ \ldots,\quad \dim H_n = n, \tag{5}$$

таких, что выполняются априорные оценки вида (2) и возможно получить аналогичную (3) оценку.

При этом подразумевается, что H_n $(n = 1, 2, ...)$ является подпространством H и метрика H_n – есть метрика, индуцированная из метрики H.

Задача описания динамики несжимаемой жидкости, в силу своей теоретической и прикладной важности, привлекает внимание многих исследователей.

Данная работа посвящена к проблеме о существовании и гладкости решений уравнений математической физики [1]. В работах [2-4] приведены достаточно полный анализ современного состояния проблемы и обзор имеющейся литературы, предложены методы решения задачи. Работы [5-13] посвящены к исследованию разрешимости в целом уравнений математической физики, непрерывная зависимость решения параболического уравнения, а также гладкости решения.

Эта работа возникла в результате многочисленных попыток авторов решить проблему существования сильного решения уравнения математической физики.

В этой работе мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном гильбертовом пространстве. Работа состоит из четырех пунктов. Первый пункт посвящен введению и происхождению задачи. Во втором пункте приводятся используемые обозначения и формулировка основных результатов. В третьем пункте приведена доказательство теоремы 1, который в пределе дает слабая разрешимость многих задач математической физики. В четвертом

пункте доказывается теорема 2, который в пределе позволяет установить сильную разрешимость некоторых задач математической физики, допускающих теорию возмущений. Условия теорем такова, что можно использовать при изучении некоторого класса начально-краевых задач для получения сильных априорных оценок при наличии слабых априорных оценок.

2. Используемые условия и формулировка результатов

Займемся выводом равномерных оценок для нелинейных задач в конечномерном пространстве. Рассматриваемые уравнения являются (как правило) аналогами конечномерных приближений уравнений математической физики, записанных в "ограниченной записи".

Всюду в этом разделе H – конечномерное действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$.

Нас будет интересовать уравнение следующего вида

$$u + L(u) = g \in H, \tag{6}$$

где $L(\cdot)$ – нелинейное непрерывное преобразование, g – элемент пространства H. Решение u задачи (6) ищется в H.

Мы нацелены на такие конечномерные уравнения вида (6), которые есть конечномерные аппроксимации бесконечномерных задач вида (6) в бесконечномерном гильбертовом пространстве. При этом окажется весьма важным получение ***не зависящих от номера аппроксимации оценок, позволяющих переходить к пределу***, и получить в пределе априорную оценку для решения бесконечномерной задачи. Бесконечномерные задачи вида (6), на которые мы нацелены в дальнейшем, являются, как правило, задачами математической физики, записанными в ограниченной форме.

Здесь и всюду далее $f(u)$ будет означать операцию вида

$$f(u) := u + L(u). \tag{7}$$

Если $\xi \in [0, +\infty)$ – параметр и вектор $u(\xi)$ есть вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по параметру ξ, то будем предполагать, что также непрерывно дифференцируема и вектор-функция $L(u(\xi))$, а также возникающие в дальнейшем из $L(u)$ и $f(u)$ выражения.

Введем обозначения L_u:

$$(L(u(\xi)))_\xi = L_{u(\xi)} u_\xi(\xi). \tag{8}$$

Очевидно, что L_u (при каждом $u \in H$) будет линейным оператором

$$L_u v = (L(u(\xi)))|_{u_\xi = v}. \tag{9}$$

Имеем

$$(f(u(\xi)))_\xi = u_\xi + L_u u_\xi = (E + L_u) u_\xi.$$

В дальнейшем, если $u_0, v_0 \in H$, то вектор $L_{u_0}v_0$ Ц понимаем следующим образом: берем непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $u(\xi)$ такую, что

$$u|_{\xi=0} = u_0, \quad u_\xi(\xi)|_{\xi=0} = v_0$$

и за $L_{u_0}v_0$ принимаем вектор

$$L_{u_0}v_0 = (L(u(\xi))_\xi \,\big|_{\xi=0}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем E – единичное преобразование. Обозначим

$$D_u = E + L_u, \qquad D_u^* = E + L_u^*, \tag{10}$$

$$D_u^* f(u) = (E + L_u^*) f(u). \tag{11}$$

$$M_u a = \left(D^*_{u(\xi)} f(u(\xi))\right)_\xi \Big| \begin{array}{l} u(\xi) = u \\ u_\xi(\xi) = a \end{array} = M_u u_\xi \big|_{u_\xi = a} = M_u a. \tag{12}$$

Приведем используемые условия.

Условие У1: *Для операторов $L(\cdot)$, L_u, L_u^*, D_u, D_u^* выполнены условия*

$$\begin{cases} \|M_u - M_v\|_{H\to H} + \|L(u) - L(v)\| + \|L_u - L_v\|_{H\to H} + \\ +\|L_u^* - L_v^*\|_{H\to H} \le \psi\left(\|u\|\right)\psi\left(\|v\|\right)\|u - v\|, \\ \|M_v u\| + \|D_v^* u\| + \|D_v u\| \le \psi\left(\|v\|\right)\|u\|, \end{cases} \tag{13}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$, $\psi(\cdot)$ – неубывающая на $[0,\infty)$, положительная непрерывная функция.

Условие У2: *Существуют линейные обратимые операторы T и Q такие, что*

$$\|T\| \le C_T, \quad \|Q\| \le C_T, \quad \|T^{-1}\| < \infty, \quad \|Q^{-1}\| < \infty, \tag{14}$$

и для любого $u \in H$ выполнены неравенства

$$\langle Tu, L(u)\rangle \ge 0, \quad \langle Tu, u\rangle \ge \|Qu\|^2. \tag{15}$$

В (14) C_T – некоторое фиксированное постоянное число.

В дальнейшем через C или c (прописные или строчные, с индексами или без индексов) будем обозначать постоянные числа (вообще говоря, разные в разных местах), не зависящие от рядом стоящих множителей.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условие У1 и условие У2. Тогда для любого $g \in H$ задача*

$$f(u) = g \tag{16}$$

имеет решение $u \in H$, удовлетворяющее оценке

$$\|Qu\|^2 \le C_T \|g\|^2, \tag{17}$$

где Q – оператор из условия У2, а C_T – константа из условия У2.

Обозначениями преобразований $f(u)$, $L(u)$, операторов $L_u\cdot$, $D_u\cdot$, $M_u\cdot$ (определенных при каждом $u \in H$, (см. (6) - (11)) и их сопряженных L_u^*, D_u^* и M_u будем пользоваться без оговорок.

Введем также обозначения:

$$J(u) = \|u\|^2 \exp\left\{-\|f(u)\|^2\right\}, \tag{18}$$

$$N(u) = D_u^* f(u) - \gamma(u)\, u\,. \tag{19}$$

Часто без оговорок используем обозначения (18) и (19), а также обозначения, возникшие в формулировках условий У1 и У2, и обозначения, которые возникнут в формулировках ниже приведенных условий У3 и У4.

Условие У3: *Существует обратимый оператор G, такой, что*

$$\|G\|_{H\to H} \le C_0 < \infty, \quad \|G^{-1}\| < \infty \tag{20}$$

и для любого $u \in H$ выполнено неравенство

$$\|G\,u\|^2 \le d_0\ \|f(u)\|^2, \tag{21}$$

где $d_0 > 0$ – постоянное число.

Условие У4: *Если $0 \ne u_0 \in H$, $\gamma(u) > \|u\|^{-2}$ и $N(u) = 0$, то выполнены строгие неравенства*

$$\inf_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a\rangle - \gamma(u)\|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2} < 0 < \sup_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a\rangle - \gamma(u)\|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2}. \tag{22}$$

Справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия У1, У3 и У4, то для любого $u \in H$ выполнена априорная оценка:*

$$\|u\|^2 \le C\, \exp\left\{\|f(u)\|^2\right\}. \tag{23}$$

Отметим, что оценка (23) выполняется, если соблюдаются условия У1, У3 и ниже следующее

Условие У5: *Существуют постоянные числа c_0, c_1, m и самосопряженный оператор T, такие, что если $\|u\| \ge 1$, то выполняются неравенства*

$$\|L(u)\| \ge c_0\ \|Tu\|^m, \qquad \|u\| \le c_1\ \|u\|^m. \tag{24}$$

Замечание 1. Если выполняются условия теоремы 1, то выполняется условие У3. Это вытекает из теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1

Пути доказательства теорем, содержания которых подобны утверждению теоремы 1, хорошо известны, и мы могли бы ограничиться ссылкой на них. Однако ради полноты излагаемых результатов мы снабжаем теорему 1 доказательством.

Для доказательства используем один общеизвестный прием (в удобной для нас форме).

Пусть $g \in H$. Обозначим через $M(g)$ множество векторов

$$M(g) = \{u \in H : \langle Tu, u\rangle \le 16\,\langle Tg, g\rangle\}, \tag{25}$$

где T – оператор из условия У2.

Предположим, что уравнение $u+L(u) = g$ не имеет решения $u \in M(g)$. Определим преобразование

$$F(u) = -\frac{u + L(u) - g}{\sqrt{\langle T(u + L(u) - g), u + L(u) - g\rangle}} 4\sqrt{\langle Tg, g\rangle}. \tag{26}$$

Так как уравнение $u+L(u) = g$ не имеет решения, то в силу условия У2 (см. (15)), преобразование $F(\cdot)$ непрерывно. Легко видеть, что это преобразование переводит множество $M(g)$ в себя. Поэтому, в силу теоремы Браудера о неподвижной точке и конечномерности H, преобразование $F(\cdot)$ имеет неподвижную точку $u_0 \in M(g)$, то есть

$$F(u_0) = u_0. \tag{27}$$

Подействуем на (27) оператором T, а затем полученное равенство скалярно умножим на $u_0 + L(u_0) - g$. Тогда, используя (26), получаем

$$\begin{gathered} -A :\equiv -4\sqrt{\langle Tg, g\rangle}\sqrt{\langle T(u_0 + L(u_0) - g), u_0 + L(u_0) - g\rangle} = \\ = \langle Tu_0, u_0 + L(u_0) - g_0\rangle \ge \langle Tu_0, u_0\rangle - \langle Tu_0, g\rangle = \\ = \langle Tu_0, u_0\rangle - \tfrac{1}{2}\left(\langle Tu_0, g\rangle + \langle u_0, T^*g\rangle\right). \end{gathered} \tag{28}$$

При выводе (28) в предпоследнем переходе использовано (15) из условия У2.

Так как согласно условию У2 неравенство $\langle Tv, v\rangle \ge \|Qv\|^2$ выполнено для любого $v \in H$ и оператор Q обратим, то величину $\langle Tu_0, u_0\rangle$ можно принять за квадрат нормы вектора u_0, а величину $\frac{1}{2}\left(\langle Tu_0, g\rangle + \langle u_0, T^*g\rangle\right)$ – за (согласованное с этой нормой) скалярное произведение векторов u_0 и g в некотором действительном гильбертовом пространстве. Поэтому можно использовать известное неравенство Коши и получим неравенство

$$-A \ge \langle Tu_0, u_0\rangle - (\varepsilon^{-1}\langle Tu_0, u_0\rangle + \varepsilon\langle Tg, g\rangle) = \langle Tu_0, u_0\rangle(1 - \varepsilon^{-1}) - \varepsilon\langle Tg, g\rangle. \tag{29}$$

Из (27) и (26) имеем

$$\langle Tu_0, u_0\rangle = \langle TF(u_0), F(u_0)\rangle = 16\ \langle Tg, g\rangle.$$

Отсюда и из (29) получаем

$$-A \ge [(1 - \varepsilon^{-1})16 - \varepsilon]\ \langle Tg, g\rangle.$$

Выбрав здесь $\varepsilon = 2$, получаем $-A \ge 6\ \langle Tg, g\rangle$.

Так как левая часть неравенства есть отрицательная величина, то оно противоречит неравенству (15) из условия У2. Это доказывает, что уравнение $u + Tu = g$ имеет решение $u \in M(g)$.

Для решения уравнения $u + L(u) = g$, умножая его скалярно на Tu, имеем

$$\langle Tu, u\rangle + \langle Tu, L(u)\rangle = \langle Tu, g\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle Tu, g\rangle + \langle u, T^*g\rangle\right).$$

Здесь справа стоит скалярное произведение векторов Tu и g в некотором гильбертовом пространстве. Применяя известное неравенство Коши и учитывая первое неравенство из (15) условия У2, получаем:

$$\langle Tu, u\rangle \le \left(\langle Tu, u\rangle\right)^{1/2}\left(\langle Tg, g\rangle\right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\langle Tu, u\rangle \le \langle Tg, g\rangle \le \|Tg\|\|g\| \le C_T\|g\|^2,$$

где C_T – константа из условия У2.

Теперь из второго неравенства (15) условия У2 получаем

$$\|Qu\|^2 \le C_T\|g\|^2.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Теорема 1 позволяет доказать существования "слабого" решения некоторых задач математической физики. Для доказательства существования "сильного" решения, позволяющего использовать теорию возмущений для некоторых задач математической физики, нам нужна ещҷ одна конечномерная теорема, которая будет доказана при выполнении условий У1, У3 и У4.

Подробное доказательство теоремы 2 приведен в нашей статье в Казахском Математическом Журнале [12].

Работа выполнена при поддержке грантов BR 20281002 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Литература

1. Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. http://claymath.org/millennium/ Navier-Stokes_Equations/.- Cambridge, MA: Clay. Mathematics Institute, 2000. 1–5.

2. Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал (Алматы). - 2013. - Т. 13, №4 (50). - С. 5–104. http://www.math.kz/images/journal/2013-4/Otelbaev_N-S_21_12_2013.pdf

3. Ладыженская О.А. Решение кв целомь краевой задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных // Доклады АН СССР. - 1958. - Т. 123, №3. - С. 427–429.

4. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// Успехи математических наук. - 2003. - Т. 58, №2 (350). - С. 45–78.

5. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodinamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. - 1951. - V. 4. - P. 213–231.

6. Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье–Стокса // Математические заметки. - 2011. - Т. 89, №5. - С. 771–779.

7. Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в

гильбертовом пространстве. II Сибирский математический журнал. - 2008. - Т. 49, №4. - С. 855–864.

8. Отелбаев М. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Труды математического института им. В.А. Стеклова. - 2008. - Т. 260, №1. - С. 202–212.

9. Отелбаев М., Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45, №6. - С. 818–849.

10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. - М. - Мир. - 1972. - 586 с.

11. Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. - 2011. - Т. 3, №1. - С. 53–79.

12. Похожаев С.И. Гладкие решения уравнений Навье-Стокса // Математический сборник. - 2014. - Т. 205, №2. - С. 131–144.

13. Otelbaev M., Koshanov B.D. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. - 2016. - 1759. http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619.

14. Otelbaev M., Koshanov B.D., Shynybekov A. Evaluation of solutions of one class of finite-dimensional nonlinear equations. Kazakh Mathematical Journal. 2025.

Обратные Задачи Об Определении Источников

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия,
s_pyatkov@ugrasu.ru

Мы рассматриваем параболические задачи вида

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{s} b_i(t,x)q_i(t,x') + f = F, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где A – эллиптический оператор порядка $2m$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ $(k < n)$;

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = g_j(t,x) \ (j = 1,2,\dots,m), \quad S = (0,T) \times \Gamma; \tag{2}$$

$$u|_{S_i} = \psi_i(t,x') \ \ (S_i = (0,T) \times \Gamma_i), \quad i = 1,2,\dots,s), \tag{3}$$

где Γ_i – некоторый набор поверхностей, лежащих в G, G - область с компактной границей или $G = \mathbb{R}^n_+$. Неизвестными в задаче (1)-(3) являются решение $u \in W_p^{1,2m}(Q;E)$ и функции $q_i(t,x')$. Для оператора $A(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t,x)D^\alpha$ область определения задается равенством

$$D(A) = \{u \in W_p^{2m}(G;E) : B_j u|_\Gamma = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta u|_\Gamma = 0, \ j = 1,2,\dots,m\},$$

где $m_j < 2m \ \forall j$ и E – UMD-пространство. Предполагается, что условия на коэффициенты $a_\alpha, b_{j\beta}$ в определенном смысле минимальны - они принадлежит подходящим

пространствам Соболева. При $k = 0$ (этот случай также рассматривается) условие (3) заменяется на условие

$$u(t, y_j) = \psi_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, s), \tag{4}$$

На область накладываются некоторые условия геометрического характера. Пусть существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ с границей класса C^{2m} такая, что $G \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$. Дана система k-мерных многообразий

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x'' = \varphi^i(x') = (\varphi^i_{k+1}(x'), \varphi^i_{k+2}(x'), \ldots, \varphi^i_n(x')), x' \in \Omega\},$$

где $i = 1, 2, \ldots, s$, $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$. Мы предположим, что существует постоянная $\delta > 0$:

$$U_{\delta i} = \{(x', \varphi^i(x') + \eta) : \ x' \in \Omega, \ \eta \in \mathbb{R}^{n-k}, \ |\eta| < \delta\} \subset G, \ U_{\delta i} \cap U_{\delta j} = \emptyset, \tag{5}$$

при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$.

При определенных условиях на данные мы показываем, что обратная задача (1)-(3) (или (1), (2), (4), в этом случае условия геометрического характера на область отсутствуют) и некоторые их обобщения корректны. Решение ищется в классе $u \in W_p^{1,2m}(Q)$. Отметим, что большое количество результатов касающихся обратных параболических задачи имеется в книге [1].

Литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

Разрешимость Нелокальных Интегро-Дифференциальных Краевых Задач Многомерных Псевдогиперболических Уравнений

Попов Н. С.

ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», г. Якутск, Россия, popovnserg@mail.ru

Нелокальные краевые задачи и задачи с интегральными условиями для неклассических дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваются в монографии А.И. Кожанова [1]. Исследования для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе проводились в [2].

Пусть Ω — ограниченная область пространства ^{n} с гладкой (для простоты, бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0, T)$ его боковая граница, $a(x, t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ функции, заданные в цилиндре $\overline{Q}$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — на множестве $\overline{\Omega}$, $N(t)$ — на множестве $[0, T]$ и $K(x, y, t)$ — на множестве $x, y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

В цилиндре Q рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((Au)_t - \Delta u\Big) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t), \tag{1}$$

где

$$Au = \int_0^t N(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Для уравнения (3) выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S}. \tag{4}$$

Доказательство теорем существования и единственности регулярных решений краевых задач для уравнений вида (1) проводится методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру, априорных оценок [1–3].

Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. Новосибирск: Наука, 2024.

2. Кожанов А.И. Дюжева А.В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021, Т. 25, № 3. С. 423–434.

3. Попов Н.С. О нелокальных интегро-дифференциальных краевых задачах многомерных псевдопараболических уравнений // Математические заметки СВФУ. 2024. Т.31, № 3. С.39–52.

Краевые Задачи Для Операторно-Дифференциальных Уравнений Смешанного Типа И Их Приложения

Попов С. В.[1,2], Попова М. Н.[2]

[1]ГБУ «Академия наук Республики Саха (Якутия)», г. Якутск, Россия, guspopov@mail.ru;

[2]ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», г. Якутск, Россия, michiya9797@mail.ru

Рассматриваются краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений

$$Au \equiv Bu_t - Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где B, L - линейные операторы, определенные в данном гильбертовом пространстве E. Оператор B может быть необратим, в частности, B может иметь ненулевое ядро и его спектр содержит одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуоси. Во многих работах вопросы разрешимости краевых

задач для таких уравнений исследовались в случае, когда операторы B, L самосопряжены в данном гильбертовом пространстве E. В настоящей работе условие самосопряженности оператора L заменяется условием его диссипативности, т.е. оператор L, удовлетворяет условиям: $Re(-Lu;u) \geq \delta\|u\|^2_{H_1}$ для всех $u \in D(L)$, где $\|u\|_{H_1} = Re(-(Lu,u) + \|u\|)$, $D(L)$ — область определения оператора L [1].

В такие уравнения вида (1) входят уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени, краевые задачи типа задачи Жевре [2], а также многомерные уравнения нечетного порядка вида

$$g(x)u_t - Lu = f(x,t), \tag{2}$$

где L — дифференциальный оператор вида

$$Lu \equiv (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} a_i(x)u^{(i)}, \quad a_{2m+1} = 1, \tag{3}$$

$g(x) \in L_1(0,1)$ — вещественная, измеримая на $(0,1)$ функция, такая, что существуют открытые $G^+, G^- \subset (0,1)$ со свойством $\mu(\overline{G}^+ \backslash G^+) = 0$, $\mu(\overline{G}^- \backslash G^-) = 0$, и $g(x) > 0$ почти всюду на G^+, $g(x) < 0$ почти всюду на G^- и $g(x) = 0$ на $G \backslash (\overline{G}^+ \cup \overline{G}^-)$.

Теория сингулярных интегро-дифференциальных операторов на кусочно-ляпуновских кривых, охватывающая классические сингулярные операторы с ядром Коши, интегральные операторы типа Винера-Хопфа (в мультипликативном варианте) и функциональные операторы со сдвигом построена в работах А.П. Солдатова [3]. Уравнения этого типа возникают в многочисленных приложениях, в том числе к ним сводятся краевые задачи типа задачи Жевре, для которых получены критерии фредгольмовости операторов в весовых пространствах Гельдера и Лебега, формулы их индекса.

Литература

1. Антипин В.И. Разрешимость краевой задачи для операторно–дифференциальных уравнений смешанного типа // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 2 (318). С. 245–257.

2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

3. Солдатов А.П. Сингулярные интегро-функциональные операторы на кусочно-гладкой кривой. Новосибирск: Наука, 2024.

Обобщенное Распределение Максвелла И Стабилизация Решений Кинетического Уравнения Бродвелла

Е. В. Радкевич, О. А. Васильева, Г. А. Филиппов
МГУ им. М.В. Ломоносова, МГСУ, МГСУ
evrad260143@gmail.com

Рассматриваются периодические возмущения положения равновесия для 2d-кинетического уравнения Бродвелла [1]:

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2),\\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2),\\ \partial_t f_3 + \partial_y f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),\\ \partial_t f_4 - \partial_y f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),\end{aligned} \tag{1}$$

На примере модели Бродвелла хорошо видна суть уравнения Больцмана. Оно описывает(см. [2]) смесь " конкурирующих процессов: релаксации и свободного движения. Релаксация стремится сделать f_1 равной f_3, f_2 равной f_4, **максвеллизовать** правую часть системы $Q(f_1, f_2, f_3, f_4) \to 0$. Свободное движение разгоняет функции распределения f_1, f_3 и f_2, f_4 в разные стороны. Быстрая релаксация, когда $f_1 \sim f_3$ и $f_2 \sim f_4$ почти равна . Противоположная ситуация - медленная релаксация (малое число столкновений) называется кнудсеновским газом. Она соответствует большому числу Кнудсена $1/\varepsilon$". Законы сохранения импульса и энергии выполнены(см. [2]).

В чем проблема стабилизации? Из существования слабых глобальных решений(см. [1]) следует, что здесь есть какая то стабилизация при $t \to \infty$ к положению равновесия. Но бегущая волна

$$f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2 \varphi(x + y - t);\ \ f_2 = f_4 = 1 + \varepsilon^2 \psi(t + x + y) \tag{2}$$

есть решение задачи Коши с начальными данными, возмущениями состояния равновесия $f_1^e = f_2^e = f_3^e = f_4^e = 1$ системы Бродвелла (1). Численный эксперимент показывает, что бегущие волны неустойчивы. Бегущие волны можно назвать обобщенными распределениями Максвелла (см. [2]), поскольку они одновременно и решение системы и анулируют правую часть Q- моделирующую интеграл столкновений. Как смоделировать разрушение бегущей волны при $t \to \infty$? Теорем в целом для малых отклонений от равновесия в дискретных моделях кинетики–не счесть(см. [2], [3]). Здесь другая проблема, на порядок сложнее–**о скорости стабилизации!**

Для 2d-системы Бродвелла рассмотрим периодическое возмущение состояния равновесия $f_i = n_e^i + \widehat{n}_i$, $n_e^i > 0$, $i = 1, \dots, 4$ где $n_e^1 n_e^2 = n_e^3 n_e^4$. Возмущение $N(t, x, y) = (\widehat{n}_1, \widehat{n}_2, \widehat{n}_3, \widehat{n}_4)$ удовлетворяет пространственно-периодическим граничные условиям: $N(t, x, y) = N(t, x + 2\pi, y + 2\pi)$, (x, y) принадлежат ячейке периодичности. Сделаем переобозначение

$$N(t, x, y) = \varepsilon^2(\sqrt{u_e}u(t, x, y), \sqrt{v_e}v(t, x, y), \sqrt{w_e}w(t, x, y), \sqrt{z_e}z(t, x, y)), \tag{3}$$

Используется метод Фурье решения системы для коэффициентов Фурье. Для двумерной системе можно перейти к проекции на одну переменную, например $z_{k,l}(z-$ проекция), т.е. выразить другие коэффициенты Фурье $u_{k,l}, v_{k,l}, w_{k,l}$ уравнениями состояния через $z_{k,l}$. Переход к проекции приводит к возникновению секулярных членов в уравнениях состояния. Существенную роль в исследовании скорости стабилизации, как всегда, будет играть линеаризация $z-$ проекции, которая в этом случае есть интегро-дифференциальный оператор(см. [3], [4], Интегро-дифференциальный оператор $T_{k,l}$). В терминах теоремы Пэли-Винера проблема построения анулляторов секулярных членов возникает на " кресте ", для коэффициентов Фурье с индексами $(k,l),(k^2-l^2)l=0$.. Возникают препятствия к стабилизации коэффициентов Фурье для таких индексов. Система для таких коэффициентов аналогична системе для коэффициентов Фурье одномерной модели Бродвелла:

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_3 + \partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4), \\
\partial_t f_4 - \partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),
\end{aligned} \tag{4}$$

В чем проблематичность этой модели. Для одномерной модели частицы с равными скоростями разнесены по разным группам(пары f_1, f_3 и f_2, f_4). Правая же часть моделирует интеграл столкновений, построенный для четырех групп частиц с жестким условием РАЗНОСТИ ИХ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ. Таким образом, мы имеем **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей модели (4)**. Но это справедливо и для много скоростных многомерных дискретных моделей кинетики, правая часть которых построена на основе разбиения частиц по группам, с различными групповыми скоростями. Как мы показали выше, для двумерной модели Бродвелла проблема **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей** возникает на " кресте " . Естественно, та же проблема **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей** возникнет для много скоростных многомерных дискретных моделей кинетики на аналоге " кресте " модели Бродвелла, который назовем " обобщенном крестом". Отметим, что Уравнение Больцмана можно рассматривать как "континуальную сумму" моделей типа Бродуэлла. Рассогласование правой и левой частей уравнения Больцмана отмечено в [5], при исследовании проблемы замыкание системы моментных уравнений.

Рассогласование правой и левой частей в (4) приводит в методе Фурье к препятствиям построения анулляторов секулярных членов соответствующей проекции. Для одномерной модели (4) препятствия(например u проекции):

$$\sqrt{v_e}v_k^0 + \sqrt{z_e}z_k^0 = 0,\ \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0 = 0,\ k \in Z_0. \tag{5}$$

Такие препятствия не позволяют построить решение задачи для любых периодических возмущений положения равновесия(включая бегущие волны).

Как обычно, мы поступаем в таких ситуациях. Переходим к регуляризациям.

Естественная регуляризация одномерной модели Бродвелла

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2),\\ \partial_t f_2 - \partial_x f f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2),\\ \partial_t f_3 + (1+\delta)\partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),\\ \partial_t f_4 - (1+\delta)\partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),\end{aligned} \tag{6}$$

Для достаточно малого $\delta > 0$ можно однозначно построить ануляторы секулярных членов, так что коэффициенты Фурье $u_k(t), v_k(t), w_k(t), z_k(t)$ будут стабилизироваться экспоненциально быстро, как $e^{-\varepsilon\gamma}$, более того $\gamma > 0$-не зависит от δ. Предельный переход при $\delta \to 0$ в интегральном тождестве слабого решение задачи Коши модели (6) дает слабое решение задачи Коши одномерной модели (4) при условиях:

$$\begin{aligned}u_e &\neq w_e,\\ \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 &= 0,\ k \in Z_0,\end{aligned} \tag{7}$$

для $u-$ проекции и условии

$$\begin{aligned}v_e &\neq z_e,\\ \sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 &= 0,\ k \in Z_0,\end{aligned} \tag{8}$$

для $v-$ проекции. Эти условия гарантируют равномерные по δ оценки Фурье решения и возможность предельного перехода по $\delta \to 0$ в интегральном тождестве слабого решения для задачи Коши системы (6). Естественно, требуется достаточная гладкость начальных данных-периодических возмущений положения равновесия. Из этих результатов следует справедливость теоремы для любых достаточно гладких начальных данных-периодических возмущениях положения равновесия, при условии, что одновременно

$$u_e \neq w_e,\ v_e \neq z_e, \tag{9}$$

С таким же условием справедлива экспоненциальная стабилизация периодических возмущений не максвелловских положений равновесия 2d-кинетического уравнения Бродвелла. Как видим, эти условия исключают начальные данные бегущей волны (2).

Назовем положения равновесия $u_e = w_e$, $v_e = z_e$ -максвелловскими. Таким образом, проблема стабилизации периодических возмущений максвелловских положений равновесия $u_e = w_e$, $v_e = z_e$ остается открытой. В докладе, для обсуждения этой проблемы, будут приведены результаты численных экспериментов.

Литература

1. T.E. Broadwell Study of rarified shear flow by the discrete velocity method, J. of Fluid Mechanics 19:3(1964)

2. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 112 с. - ISBN 5-9221-0187-0.

3. Radkevich E.V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations. II J. Math. Sci. (N. Y.) - 2012. - 181, №5. - С. 701-750.

4. Е.В. Радкевич, О.А. Васильева, Г.А. Филиппов О скорости стабилизации решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения Бродвелла с периодическими начальными данными (регулярный процесс). в печати.

5. К.С. Платонова, А.В. Боровских Групповой Анализ Уравнений Больцмана И Власова, Теоретическая И Математическая Физика, Том 203, №3, 2020, стр. 416-450.

Краевая Задача Для Одного Класса Уравнений Смешанного В Области Эллиптическая Часть Которой-Полуполоса

Рузиев М. Х.[1], Казакбаева К. Б.[2]

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан;
ruzievmkh@gmail.com, qalligul96@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$(sign\, y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, в неограниченной области D, ограниченной полупрямыми $x = 0$, $x = 1$, расположенными в полуплоскости $y \geq 0$ и характеристиками $OC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y = 0$. Обозначим: $I_1 = \{(x,y): x = 0,\ y > 0\}$, $I_2 = \{(x,y): x = 1,\ y > 0\}$, $I = \{(x,y): 0 < x < 1,\ y = 0\}$.

Пусть $D^+ = D \cap \{(x,y): y > 0\}$, $D^- = D \cap \{(x,y): y < 0\}$.

Задача. Найти функцию $u = u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;

2) $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ равномерно по $x \in [0,1]$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(1,y) = \varphi_2(y), \quad y \geq 0,$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)] = \frac{d}{dx}u(x,0) + f(x), \quad x \in [0,1],$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-\frac{m}{2}}u_y = \lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}}u_y, \quad x \in (0,1),$$

причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$ могут иметь особенность порядка ниже единицы, где $\bar{D} = D \cup \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \cup \bar{D}^-$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, и $f(x)$ –заданные функции, $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2},\ -(\frac{m+2}{4}x)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ –точка пересечения характеристики OC, с характеристикой уравнения (1), выходящей из точки $(x_0,0) \in I$.

Доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия $\varphi_i(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{m}{2}}\varphi_i(y) \in L(0,\infty)$, $i = 1,2$, $f(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\varphi_1(0) = f(0)$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_i(\infty) = 0$. Тогда задача однозначно разрешима.

Доказательство теоремы проводится методом интегральных уравнений.

Отметим, что кроевые задачи для уравнения

$$(sign\, y)\,|y|^m\, u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0,$$

где $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ изучены в работах [1, 2], а в случае $\beta_0 = 0$ рассмотрена в [3].

Литература

1. Салахитдинов М.С., Рузиев М.Х. Задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // Узбекский математический журнал. 2005, №2, С. 77–83.

2. Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой – полуполоса // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2009, №1(18), С. 33–40.

3. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса // Дифференциальные уравнения. 1996, т. 32, №4, С. 565–567.

Задача С Аналогом Условия Франкля На Отрезке Линии Вырождения И Смещения На Частях Граничних Характеристик Для Одного Класса Уравнений Смешанного Типа

Мирсабурова Д.М.[1], Рузиева З.Ф.[2]

[1]Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан;
dmirsaburova@mail.ru,
[2]Институт предпринимательства и педагогики Денова, г. Денова, Узбекистан;
zuxraruziyeva00@mail.ru

В работе для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{2y}u_y = 0$, в некоторой неограниченной смешанной области, доказана корректность задачи с аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения и с недостающим условием смещения на частях граничних характеристик.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ JNF (ЖЕГАЛОВА,НАХУШЕВА,ФРАНКЛЯ).

Пусть $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^+ -полуплоскость $y > 0$, D^- -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

исходяшими из точек $A(-1,0),\ B(1,0)$ прямой $y=0$. В уравнение (1) предполагается, что m,α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m>0,\ |\alpha_0|<(m+2)/2,\ -m/2<\beta_0<1$.

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах (1). На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0B_0C_0$ ограниченный прямыми

$$A_0C_0:\beta_0+\alpha_0=-m/2,\ B_0C_0:\beta_0-\alpha_0=-m/2,\ A_0B_0^{:}\beta_0=1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0,\beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1).

Рассмотрим случай $P(\alpha_0,\beta_0)\in\Delta A_0B_0C_0$,

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R=A_R(-R,0),\ B_R=B_R(R,0)$,

$$\sigma_R:x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=R^2,\ -R\le x\le R,\ 0\le y\le((m+2)R/2)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1=\{(x,y):-\infty<x<-1,\ y=0\},\ J_2=\{(x,y):1<x<+\infty,\ y=0\}$, $C_0(C_1)$-точки пересечения характеристик $AC(BC)$ с характеристиками, исходяшей из точки E(c,0), где произволное фиксированное число $C\in J=(-1,1)$-интервал оси $y=0$. $D_R=D_R^+\bigcup D^-\bigcup J,\ D_R$ -подобласть неограниченной области.

Пусть $p(x)=ax-b$ и $q(x)=a-bx$ линейные диффеоморфизмы из множества точек отрезка $[-1,1]$ во множество точек отрезков $[-1,c]$ и $[c,1]$ соответственно, причем $p(-1)=-1,\ p(1)=c,\ q(-1)=1,\ q(1)=c,\ a=(1+c)/2,\ b=(1-c)/2$.

Задача JNF. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяюшим условиям :

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1 в области $D^-/(EC_0\cup EC_1)$;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in J/\{c\} \tag{2}$$

причем эти пределы при $x\to\pm1$, $x\to\ c$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)),\ \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0, \tag{3}$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu_i(x),\ \forall x\in J_i,\ i=1,2; \tag{4}$$

$$\mu_0(1+x)^{\alpha}D^{1-\beta}_{-1,x}u\left[\theta_0\left(p(x)\right)\right]+\mu_1(1+x)^{\beta}D^{1-\alpha}_{-1,x}u\left[\theta_1\left(q(x)\right)\right]=\psi(x)$$

$$x\in J; \tag{5}$$

$$\nu\left(p(x),-0\right)-\nu\left(q(x),+0\right)=f(x),\ x\in[-1,1], \tag{6}$$

где $D^{1-\beta}_{-1,x},\ D^{1-\alpha}_{-1,x}-$ операторы дифференцирования дробного порядка.

$\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ -аффиксы точек пересечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками исходяшей из точки $M_0(x_0,0)$, $x_0\in[-1,1]$;

$\nu_i(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ - заданные функции, причем $\nu_i(x)\in C(\overline{J}_i)\bigcap C^2(J_i)$,i=1,2, $f(x)\in C(\overline{J}_i)\bigcap C^{1,\gamma_0}(J_i)$, $\psi(x)\in C(\overline{J}_i)\bigcap C^{1,\gamma_0}(J_i)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\nu_1(x)=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\nu_2(x)=0$, Задача JNF исследуется методами работи [1].При определенних ограниченях на заданные функция доказана, что задачи JNF корректна.

Литература

1. Мирсабурова Д.М Задача с аналогом условия Франкля и смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коеффицентом // Известия вузов. Математика 2024(6), С.37-48

Об Одной Обратной Задаче С Интегральным Условием Переопределения

Сафаров Ж. Ш.[1,2], Файзуллаев Ш. М.[1]

[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;

[2]Институт Математики АН Республики Узбекистан имени В.И. Романовского , Ташкент, Узбекистан;

j.safarov65@mail.ru

[1]Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан;

sherali1501144@gmail.com

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n-$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области $D:=\Omega\times(0,T]$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt}-Lu-\int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau=g(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

и граничным условиями:

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial D. \tag{3}$$

где $\partial D:=\partial\Omega\times[0,T]$, $L=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-c(x)-$ равномерный эллиптический оператор ($n\geq1$), коэфициенты которого удовлетворяют условиям $a_{ij}=a_{ji}$, $c(x)\geq0$, $x\in\bar{\Omega}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)-$ заданные функции.

Обратная задача заключается, в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t > 0$, если относительно решения прямой задачи (1)-(3) известна дополнительная информация

$$\Lambda[u(\cdot,t)] := \int_\Omega u(x,t)h(x)dx = f(t), t \in [0,T], \tag{4}$$

где $h(x), f(t)-$ заданные функции.

Сначала исследуется прямая задача, при этом предполагается ядро интегрального члена известным. Для решения прямой задачи применяется метод Фурье. Методом Фурье задача сводится к решению интегрального уравнение вольтеровского типа второго рода, относительно искомой функции $u(x,t)$. Используя лемму Гронуолла получены априорные оценки для искомой функции и ее производных первого и второго порядков.

Далее, воспользовавшись дополнительным условием исследуется обратная задача.

Следует отметить, что, для уравнения (1) подобные задачи в прямоугольной и цилиндрической областях были исследованы в работах [1]-[4] и получены теоремы глобальной однозначной разрешимости обратных задач.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f(t) \in C^3[0,T], f(0) \neq 0$ *и выполнены условия*

1) $\varphi(x) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+4}(\Omega), \quad \psi(x) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega);$

2) $g(\cdot,t) \in H^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega), \quad g(x,\cdot) \in C^1[0,T];$

3) $\varphi,\ L\varphi, ..., L^{\left[\frac{N+4}{4}\right]}\varphi \in H_0^1(\Omega),\ \psi,\ L\psi, ..., L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}\psi \in H_0^1(\Omega);$

4) $g(\cdot,t),\ Lg(\cdot,t), ..., L^{\left[\frac{N+2}{4}\right]}g(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega),$

тогда существует единственное решение обратной задачи (1)- (4) $k(t) \in C[0,T]$, *удовлетворяющее уравнению*

$$k(t) = \frac{1}{f(0)}\left[f'''(t) - \Lambda[g_t] + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 W_m'(t)\Lambda[v_m]\right], \tag{5}$$

где

$$W_m'(t) = \Bigg[-\lambda_m\varphi_m \sin\lambda_m t + \psi_m \cos\lambda_m t + \int_0^t \cos\lambda_m(t-s)g_m(s)ds + \int_0^t \cos\lambda_m(t-s)\int_0^s k(s-\tau)W_m(\tau)\,d\tau ds\Bigg].$$

$W_m(t)-$ коэффициенты Фурье разложения функции $u(x,t)$ в ряд Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t)v_m(x).$$

При этом $W_m(t)$ является решением нижеследующего интегрального уравнения:

$$W_m(t) = \varphi_m \cos\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\psi_m \sin\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \sin\lambda_m(t-s)G_m(s)ds,$$

где

$$G_m(t) := g_m(t) + \int_0^t k(t-\theta)W_m(\theta)\,d\theta,$$

Литература

1. Сабитов К. Б., Зайнулов А.Р. Обратные задачи для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию правой части // Известия вузов.Математика. 2021. №3. С. 83–97.

2. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки, 2023, Т.114, №2. С.244-259.

3. Safarov J.Sh., Durdiev D.K. Inverse Problem for an Integro-Differential Wave Equation in a Cylindrical Domain // Lobachevskii journal of mathematics,2022, Vol. 43 №11. P.239-249.

4. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором Бесселя // Сиб. журн. индустр. матем.,2022, 25:3, С.14Ц24.

Некоторые Задачи Современной Теории Дифференциальных Уравнений

[1]Муравник А. Б., [2]Половинкин И. П., [3]Ситник С. М.

[1]1Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы , Москва, Россия;

[2]Воронежский государственный университет , Воронеж, Россия;

[3]Белгородский государственный национальный исследовательский университет , Белгород, Россия;

[1]amuravnik@yandex.ru, [2]polovinkin@yandex.ru, [3]sitnik@bsuedu.ru

Доклад посвящается замечательному математику и человеку, академику Шавкату Арифджановичу Алимову к его 80–летию

Доклад посвящен изложению некоторых современных исследований по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Особое внимание уделяется методам теории операторов преобразования, функционально–дифференциальным уравнениям, задачам восстановления решений дифференциальных уравнений по неполным данным, специальным теоремам о среднем. В том числе рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2}u(x) + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}u(x). \tag{1}$$

Такие уравнения относятся к сингулярным или вырождающимся, к ним также сводятся многие уравнения смешанного типа. При этом для задач указанного вида важное значение имеют вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, эти вопросы подробно рассматривались в работах и известных обзорах Ш.А. Алимова и его соавторов, см. [1]–[3].

В докладе современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям рассматриваются на основе ряда последних публикаций по этой тематике, см. [4]–[9]. Опишем эти публикации несколько подробнее.

Как указано в [4–9], теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова. К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И.А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона. Особо следует выделить введённый В.В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана–Лиувилля, В.В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С.Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В.В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «К-следом» в честь В.В. Катрахова, который ввчл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «К-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В.В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области. Существенные результаты были также получены В.В. Катраховым в такой классической области, как теория операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля. Им получены новые формулы композиций и оценки весовых норм для этого класса операторов.

Монография В.В. Катрахова и С.М. Ситника [4] составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В.В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Надеюсь, что эта книга будет способствовать более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным урав-

нениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.

Следует подчеркнуть, что на русском языке долгое время отсутствовали специализированные монографии,посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Монографии С.М. Ситника и В.В. Катрахова [4], С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной [5] в определчнной степени заполняют этот пробел.

Изложим структуру и основное содержание монографии [5]. Отметим, что существенная часть результатов,изложенных в [5], получена авторами, часть из них публикуется там впервые. Текст монографии разделён на три части. В первой части «Общая теория операторов преобразования» рассматриваются определение операторов преобразования, основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований. Отметим более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтер, а также обзор основных конструкций дробного интегродифференцирования. Далее излагаются результаты о различных классах операторов преобразования : Сонина–Пуассона, Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Изложены основные свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических средних. Во второй части «Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных» рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах, лемме Копсона, задаче Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений, включая задачу А.В. Бицадзе–В.И. Пашковского для уравнения МаксвеллаЦЭйнштейна, приложения к решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Здесь же рассмотрен важный вопрос об эквивалентности норм пространств И.А.Киприянова и весовых пространств С.Л.Соболева, а также изучено общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка. В третьей части «Методы построения ОП для оператора Бесселя и родственных операторов» излагается принадлежащий С.М. Ситнику композиционный метод построения операторов преобразования (ITCM — Integral Transforms Composition Method). Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также построены многочисленные новые классы операторов преобразования. Рассмотрены приложения композиционного метода к решению некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений.В этой части также изложены результаты для дифференциальных операторов Бесселя, возмущённых потенциалами достаточно общего вида.

В опубликованной в 2020 г. издательством Elsevier в основанной Р. Беллманом престижной серии *Mathematics in Science and Engineering* монографии Э.Л. Шишкиной и С.М. Ситника [6] изложены на английском языке для широкой международной профессиональной аудитории основные вопросы современной теории операторов преобразования и их приложений. Существенную часть этой книги занимают результаты Э.Л. Шишкиной по теории обобщённых потенциалов и их приложениям к

дифференциальным уравнениям с особенностями.

Также в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* был опубликован сборник работ [7] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования. В сборник вошли работы известных математиков Amin Boumenir, Vu Kim Tuan (USA), Djurdje Cvijovic (Serbia), Tibor K. Pogany (Croatia), Sh.T. Karimov (Uzbekistan), D.B. Karp (Israel, Vietnam, Russia), E.L. Shishkina (Poland), О.В. Скоромник, Л.Е. Хвощинской (Белоруссия), Ahmed Fitouhi (Tunisia), Yu.F. Luchko (Germany), В.В. Кравченко (Мексика), а также С.М. Ситника, Л. Бритвиной, Е. Прилепкиной, С.П Хэкало, В.В. Мещерякова, К.О. Политова, А.А. Ларина, А.Б. Муравника, В.Б. Васильева, С. Бутерина, А.В. Глушака, О. Яремко, В.А. Юрко, В.Е. Фёдорова, М.М. Маламуда, А.В. Псху, В.Ф. Молчанова, М.В. Плехановой, И.П. Половинкина, М.В. Шитиковой, Н.В. Зайцевой (Россия). В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.

В настоящее время активно разрабатываются новые подходы к решению прямых и обратных спектральных задач для уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и оси. На основе новых предложенных методов разработаны эффективные численные методы для решения этих задач, которые во многом превосходят методы, известные ранее. Методы решения одномерных обратных задач и обратных задач рассеяния традиционно тесно связаны с теорией операторов преобразования и во многом основаны на результатах этой теории. В связи с этим отметим, основные идеи этой тематики зачастую перекликаются с результатами давних работ А.Н. Тихонова [10]–[11], изложение содержания которых и блестящий анализ проведѣн в статье Ш.А.Алимова [12]. К сожалению, результаты работ [10]–[12] нечасто цитируют в современных исследованиях по обратным задачам. Отметим также по применению классической методики теории обратных задач важные работы А.П. Солдатова и Н.А. Жура [13–15].

Таким образом, теория операторов преобразования и их многочисленных приложений является живой и активной ветвью современной математики. Операторам преобразования и их различным применениям посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся монографий и сборников.

Многие исследования по современной теории дифференциальных уравнений были опубликованы в двух специальных выпусках журнала Mathematics издательства MDPI [16–17], а также в двух специальных выпусках журнала Lobachevskii Journal of Mathematics [18–19]. Специальный номер журнала [18] был посвящен 100–летию Ивана Александровича Киприянова, а специальный выпуск [19] — 75–летию Валерия Вячеславовича Катрахова. Отметим, что с этими двумя воронежскими математиками были связаны долгие дружеские отношения и научные интересы Шавката Арифджановича Алимова.

Литература

1. Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // УМН. 1976. Т. 31, №6(192). С. 28–83.

2. Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. II // УМН. 1977. Т. 32, №1(193). С. 107–130.

3. Алимов Ш.А., Ашуров Р.Р., Пулатов А.К. Кратные ряды и интегралы Фурье // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1989. Т. 42. С. 7–104.

4. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, №2. С. 211–426.

5. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019. 246 С.

6. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics.
In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press. 2020. 592 pp.

7. Ed. V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. Transmutation Operators and Applications.
In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser, 2020. XVII, 686 pp.

8. Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения). Учебно–методическое издание, ред. А.П.Солдатов, И.С.Ломов, Э.Т.Каримов, изд. «Фаргона», Фергана, Узбекистан, 2022 , 192 с.

9. Катрахов В.В., Катрахова А.А., Ляхов Л.Н., Муравник А.Б., Ситник С.М., Хе Кан Чер. Сингулярные краевые задачи. ООО ИПЦ «Научная книга», Воронежский государственный университет, Воронеж, 2024 , 529 с., (ред. Л.Н.Ляхов).

10. Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки // ДАН. 1949. Т. 69, №6. С. 797–800.

11. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, №3. С. 545–547.

12. Алимов Ш.А. О работах А.Н. Тихонова по обратным задачам Штурма–Лиувилля // УМН. 1976. Т. 31, №6(192). С. 84–88.

13. Жура Н.А., Солдатов А.П. О представлении решения обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №8. С. 1027–1037.

14. Жура Н.А., Солдатов А.П. К решению обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси // ДАН России. 2013. Т. 453, №4. С. 368–372.

15. Zhura N. A., Soldatov A. P. To inverse scattering problem of Gelfand, Levitan, Marchenko // AIP Conf. Proc. 2013. V. 1570, 298.

16. Sitnik S. M. Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms, 2nd Edition, eds. S.M. Sitnik, Guest editor, MDPI, Basel, Switzerland, 2024 , 13 papers.

17. Sitnik Sergei, Ed. Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms, This book is a reprint of the Special Issue Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms that was published in Mathematics, MDPI., eds. Sergei Sitnik, MDPI, Basel, Switzerland, 2023 , 446 pp.

18. Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 44, Issue 8, August 2023. Part 2. Special issue: I.A. Kipriyanov and His Mathematics: to the Centennial Birthday Anniversary,, 42 research papers., eds. L.N.Lyakhov, A.B. Muravnik, and S.M. Sitnik., Springer, 2023.

19. Lobachevskii Journal of Mathematics, Special issue: To the 75th Anniversary of V.V. Katrakhov, Volume 45, Issue 9, Part 2., eds. I. P. Polovinkin and S. M. Sitnik, Springer Nature, 2024 , approx. 200 pp.

О Краевой Задаче Для Смешанного Параболо-Гиперболического Уравнения Третьего Порядка С Младшими Членами С Линией Изменения Типа $x = 0$

Сопуев Адахимжан[1], Нуранов Бактыбек Шермаматович[2]

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;
sopuev@mail.ru, nuranov2014@mail.ru

В прямоугольнике $D = \{(x, y) : -l_1 < x < l, 0 < y < h\}$, $(l, l_1, h > 0)$ рассматриваем уравнение

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(y)\right) u = 0, \tag{1}$$

где

$$L \equiv \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y), & (x, y) \in D_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

$a_2(x, y)$, $b_2(x, y)$, $c_1(x, y)$, $c_2(x, y)$, $\alpha(y)$ – заданные функции, $D_1 = D \cap (x > 0)$, $D_2 = D \cap (x < 0)$, $C^{(n+m)}$ означает класс функций, имеющих непрерывные все производные $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$ $(r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, m)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{1+2}(D_2)]$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \neq 0$ и следующим краевым условиям:

$$u|_{x=l} = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le h, u|_{y=0} = \psi_1(x), u_y|_{y=0} = \psi_2(x),\ 0 \le x \le l,$$

$$u|_{y=0} = \chi_1(x), u_y|_{y=0} = \chi_2(x)\ -l_1 \le x \le 0,$$

где $\varphi_1(y), \psi_i(y), \chi_i(y)$ ($i = 1, 2$) – заданные функции, причем

$$\varphi_1(y) \in C^1[0, h], \quad \psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1[0, l], \quad \chi_1(x), \chi_2(x) \in C^1[-l_1, 0].$$

Обзор краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго и третьего порядков рассмотрены, например, в работах [1]-[2].

Доказательство существования и единственности решения краевой задачи 1 для уравнения (1), когда смешанный параболо-гиперболический оператор с линией изменения типа $x = 0$ применяется к дифференциальному оператору первого порядка, осуществляется следующим образом: методом понижения порядка уравнения задача 1 сводится к задаче Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка, разрешимость которого сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода с двумя независимыми переменными. После определения следа функции и еҷ производных первого порядка по x, решение задачи полностью определяется в рассматриваемых областях.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. - Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.

2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 304 с.

Разрешимость Смешанной Задачи Для Одной Системы Составного Типа

Сраждинов И. Ф.

Наманганский государственный технический Университет, Наманган, Узбекистан;
israjdinov@bk.ru

Разрешимость смешанной задачи для уравнений гиперболического и параболического типов исследованы достаточно полно. Для уравнений и систем составного типа такая задача изучена недостаточно. Данная работа посвящена именно этой проблеме. Под составным типом, в данном случае, подразумевается, система обладающая в каждой точке рассматриваемой области свойствами, по крайной мере, двух типов. В данном случае эллиптического и гиперболического типов. Следуя работам [1,стр.100,2,стр.40], решение получено в виде рядов по собственным функциям известной классической задачи, одновременно выясняется корректная постановка начальных условий, доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов представляющих решение, а также рядов полученных в результате однократного и двукратного дифференцирования этих рядов. Исследования по уравнениям и системам составного типа можно найти в [3,4]. В работах [5-8] можно найти исследования посвященные разрешимости начально-краевой задачи для систем составного типа.

Пусть $U(t,x)$ и $V(t,x)$ вещественные функции переменных t и x. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = aV, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = bU. \end{cases} \tag{1}$$

где a , b-для определенности, предположим неотрицательными, вещественными числами. Данная система имеет характеристическую форму $\chi(\tau,\xi) = \tau^4 - \xi^4$ и, следовательно, является системой составного (эллиптико - гиперболического) типа. Пусть $\Omega = \{(t,x) \,:\, 0 \le x \le l,\, t > 0\}$.

Пусть $\Omega = \{(t,x) \,:\, 0 \le x \le l,\, t > 0\}$.

Задача $S(\Omega)$**.**Найти решение системы (1) в области Ω, удовлетворяющее следующим начальным

$$U(0,x) = \varphi(x)\ ,\ V(0,x) = \psi(x). \tag{2}$$

и граничным условиям

$$U(t,0) = U(t,l) = 0\,,\ \ V(t,0) = V(t,l) = 0. \tag{3}$$

Решение задачи $S(\Omega)$ ограниченное по t при $t \to \infty$ представляется в виде:

$$\begin{gathered} U(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(T_n(0) + \frac{1}{M_n}\theta_n(0)\right)e^{-k_1 t} + \right. \\ \left. + \left(T_n(0) - \frac{1}{M_n}\theta_n(0)\right)(cosk_1 t - sink_1 t))\right) sin\frac{n\pi}{l}x, \\ V(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k_1^2}{(\frac{n\pi}{l})^2+a}\left(T_n(0) + \frac{1}{M_n}\theta_n(0)\right)e^{-k_1 t} - \right. \\ \left. - \left(\left(T_n(0) - \frac{1}{M_n}\theta_n(0)\right)(cosk_1 t - sink_1 t)\right)\right] Sin\frac{n\pi}{l}x. \end{gathered} \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C_0^{3+\alpha}(0,l)$. Тогда ряды (4) удовлетворяют системе уравнений (1), начальным условиям (2), краевым условиям (3).

При этом возможно ряды (4) дифференцировать по и t до двух раз и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Литература

1. Ильин В.А. Разрешимость смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Успехи математических наук.1960, 15, 2(92), С.97-154,

2. Алимов Ш.А. Избранные научные труды, Ташкент.: Meriyus, 2015, 415 стр.

3. Джураев А.Д. Методы сингулярных интегральных уравнений, Москва.: Наука.1987.

4. Кожанов А.И. Ультрапараболические уравнения с операторными коэффициентами при временных производных // Вестник Иркутского университета, серия Математика. 2019, С. 120–127.

5. Srajdinov I.F. Towards a mixed problem study for composite systems of equations // Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science. 2021. 2(4), P. 15–19.

6. Srajdinov I.F. To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compozite Type // Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science. 2021. P. 23–32.

7. Сраждинов И.Ф. Начально-краевые задачи для некоторых систем уравнений составного типа // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан, 1989, том XXXII, С. 653-657.

8. Сраждинов И.Ф. Об одной составной системе с коэффициентом типа Лежандра // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, 2016, №5, С. 7-10.

О Решении Системы Неклассических Интегральных Уравнений Вольтерра 1- Рода

Бекешов Турдумамат Орозматович[1], **Токторбаев Айбек Мамадалиевич**[2]
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;
bekeshov61@mail.ru, ain7@list.ru

Аннотация: С развитием инновационных технологий человечество начало широко применять искусственные интеллекты, которые способны обрабатывать многочисленные потоки информации. При моделировании работы измерительных приборов с стирающейся памятью используют неклассические интегральные уравнения Вольтерра.

В данной работе построено регуляризирующее уравнение для системы неклассических интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода и доказана сходимость решения. В функциональных пространствах $C_n[t_0;T]$ и $C^{\gamma}_{(n,\varphi)}[t_0,T]$, $0 \le \gamma \le 1$.

Рассмотрим следующую систему

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in [t_0;T] \tag{1}$$

где $\alpha(t)$ - известная функция, причем $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \le t$ при $t \in [t_0;T]$, $K(t,s)$ - заданная матрица-функция размера $n \times n$ с элементами $K_{ij}(t,s)$, определенными в области $G = \{(t,s) \mid t_0 \le t \le T, \alpha(t) \le s \le t\}$ и $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ - известная вектор-функция в $t \in [t_0;T]$, при этом $f_i(t_0) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$, а $u(t)$ - искомая вектор-функция $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$ на $t \in [t_0;T]$.

Обозначим $C_n[t_0;T]$ - пространство всех n-мерных вектор-функций с элементами из пространства $C[t_0;T]$ – непрерывных на отрезке $[t_0;T]$ функций.

Через $C^{\gamma}_{(n,\varphi)}[t_0,T]$, $0 < \gamma \le 1$, обозначим пространство n-мерных вектор-функций с элементами из $C^{\gamma}_{\varphi}[t_0,T]$, которое является линейным пространством всех функций $u(t)$, определчнных на $[t_0;T]$ и удовлетворяющих условию

$$|u(t) - u(s)| \le C|\varphi(t) - \varphi(s)|^{\gamma}, \quad t,s \in [t_0;T],$$

где $\varphi(t)$ – некоторая функция, а C – положительная постоянная, зависящая от $u(t)$, но не зависящая от t и s.

Заметим, что если $0 < m_0 \le \varphi'(t) \le m_1$ при всех $t \in [t_0;T]$, то $C^{\gamma}_{\varphi}[t_0,T] = C^{\gamma}[t_0,T]$, $0 < \gamma \le 1$, где $m_1 \in \mathbb{R}$, а $C^{\gamma}[t_0,T]$ Ч пространство Гельдера.

Допустим, что $\det K(t,t)$ может обращаться в нуль конечное или счётное число раз в $[t_0,T]$.

Пусть $\lambda_i(t)$ – собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2}\left[K(t,t) + K^*(t,t)\right],$$

где $K^*(t,t)$ – сопряжённая матрица к $K(t,t)$, и

$$\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t), \quad t \in [t_0,T]. \tag{2}$$

Потребуем выполнение следующих условий:

a) $\alpha(t) \in C^1[t_0, T]$, $\alpha'(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$ при всех $t \in [t_0, T]$.

b) При любых фиксированных $t \in (t_0, T]$:

$$\|K(t,s)\| \in L_1(\alpha(t); t), \quad \|K(t,t)\| \in L_1(t_0; T), \quad \|K(t,t)\| \leq N_0\lambda(t) \quad \text{при всех } t \in [t_0, T],$$

$$\lambda(t) > 0 \quad \text{при почти всех } t \in [t_0, T], \quad \lambda(t) \text{ определена по формуле (2).}$$

c) При $t > \tau$ для всех (t, s) и $(\tau, s) \in G$ справедливо:

$$\|K(t,s) - K(\tau,s)\| \leq l(s) \int_\tau^t \lambda(s)ds,$$

где $l(t) \in L_1(t_0; T)$, $\lambda(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему:

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{\alpha(t)}^t K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(t_0), \quad t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

где $0 \leq \varepsilon < 1$ – малый параметр, $u(t)$ – решение системы (1).

Решение системы (3) будем искать в виде:

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0, T], \tag{4}$$

где $\xi(t,\varepsilon)$ – пока неизвестная вектор-функция.

Далее докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняются условия a) – c) и

$$\gamma_1 = \exp\left[\sqrt{n}(2e^{-1} + N_0)\int_{t_0}^T l(s)ds\right]_1 \gamma_0 N_0\sqrt{n} < 1,$$

где число γ_0 определено в лемме 1. Тогда:

1) если система интегральных уравнений (1) имеет решение $u(t) \in C^\gamma_{(n,\phi)}[t_0; T]$, $0 < \gamma \leq 1$, то решение $v(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0; T]$ к решению $u(t)$, при этом справедлива оценка:

$$\|u(t) - v(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M_2}{1-\gamma_1}\varepsilon^\gamma. \tag{5}$$

где $M_2 = C_1M_1$, здесь C_1 определчн в лемме 3, а

$$M_1 = \exp\left[\sqrt{n}(2e^{-1} + N_0)\int_{t_0}^T l(s)ds\right].$$

2) если система интегральных уравнений (1) имеет решение $u(t) \in C[t_0; T]$, то решение $v(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0; T]$ к решению $u(t)$, при этом справедлива оценка:

$$\|u(t) - v(t,\varepsilon)\| \leq \frac{M_1}{1-\gamma_1}\left[2\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) + 4\|u(t)\|_C e^{-\varepsilon^{\beta-1}}\right]. \tag{6}$$

Литература

1. М.М. Лаврентьев Об интегральном уравнении Вольтерра первого рода, *Докл. АН СССР*, 127, №1, 31–33 (1959).

2. А. С. Апарцин Неклассические уравнения Вольтерра первого рода, Теория и численные методы, *Наука, Сиб. отд-ние*, Новосибирск (1999).

3. А. С. Апарцин, И. В. Караулова, Е. В. Маркова, В. В. Труфанов Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики, *Электричество*, №10, 69–75 (2005).

4. В.М. Глушков, В.В. Иванов, В. М. Яненко *Моделирование развивающихся систем*, Москва, Наука (1983).

5. М.И. Иманалиев, А. Асанов Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода, *Докл. АН СССР*, 415, №1, 14–17 (2007).

6. М.И. Иманалиев, А. Асанов О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода, *Докл. АН СССР*, 430, №6, 1–4 (2010).

7. A. Asanov, T. Bekeshov On one class of nonclassical linear Volterra integral equations of the first kind, *Ukrainian Mathematical Journal*, 72, №2, 177–190 (2020).

Задача Франкля С Условием Хольмгрена На Нестандартном Отрезке Линии Вырождения

Мирсабуров М.[1], Турдиев Х.Х.[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru1
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
xayrullaturdiyev1988@gmail.com2

Аннотация. В работе в некоторой смешанной области, для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с различными порядками вырождения и с сингулярным коэффициентом доказаны теоремы единственности и существования решения задачи с несимметричным условием Франкля на отрезке оси $x = 0$.

Введение

В 1956 году Ф.И. Франкль [1], исследуя обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчиваюшейся прямым скачком уплотнения, пришел к математической модели [1], [2 с.211], называемой в настояшее время задачей Франкля. Первые результаты по задаче Франкля для уравнений Лаврентьева, Чаплыгина получены А.В. Бицадзе [2,с.287]. При определенных ограничениях на геометрию кривой Г- эллиптической границы наиболее существенные результаты получены в работах Ю.В. Девингталя [3], Линь Цзянь-бина [4], А.П.Солдатова [2,с.297], К.Б. Сабитова [2,с.211], наиболее полное библиография по задаче Франкля содержится в монографии [2]. Во всех выше указанных работах характерным является то, что условие Франкля задается на симметричном, относительно начало координат, отрезке оси $x = 0$.

Настояшая работа носвяшена доказательству корректности задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа различными порядками вырождения

и сингулярным коэффициентом, с несимметричным условием Франкля на несимметричном относительно начало координат, отрезке оси $x = 0$.

1.Постановка задачи F_K. Пусть D- область ограниченная дугой AB нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = a^2, \quad x \geq 0$ лежашей в первой четверти с концами в точках $A(0, y_2), \ B(a, 0)$, где $a > 0, \ y_2 = (a(m+2)/2)^{2/(m+2)}$; отрезком $A'A$ оси $x = 0$, где $A' = A'(0, y_1), \quad y_1 < 0, -y_1 < y_2$; отрезком CB оси $y = 0, \quad a_1 \leq x \leq a, \quad a_1 > 0, \quad C = C(a_1, 0)$; и характеристикой CA' уравнения

$$G(u) = \begin{cases} y^l u_{xx} + u_{yy} + \frac{\delta_0}{y} u_y = 0, & \text{если } y > 0; \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & \text{если } y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

здесь постоянные $l > 0, \quad m > 0, \quad \delta_0 \in (-l/2, 1), \quad \beta_0 \in (-m/2, 1)$, причем $l \neq m, \quad l > 0, \quad m > 0$.

Пусть $D_1 = D \cap \{y > 0\}$: OP-часть характеристики уравнения (1) исходяшей из точки $O = O(0, 0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P; D_2 область, ограниченная кривыми OP, PC и OC; D_3- область, ограниченная кривыми $OA', \quad A'P$ и PO.

2. Постановка задачи с несимметричным условием Франкля.

Задача F_K . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям.

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup OA \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \tag{2}$$

$$G(u) = 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \tag{3}$$

$$u(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \sigma_0, \tag{4}$$

$$\lim_{y \to +0} y^{\delta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad a_1 \leq x \leq a \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad y_1 < y < y_2 \tag{6}$$

$$u(0, y) - \mu u(0, -ky) = f(y), \qquad 0 \leq y \leq y_2 \tag{7}$$

где $k = -y_1/y_2, \quad \varphi_1, \ \varphi_2, \ f$- заданные гладкие функции, причем $\varphi_2(a) = \varphi_1(a, 0), \ f(0) = 0$.

Заметим, что если в уравнение (1) $m = l, \delta_0 = \beta_0$, а в условиях задачи F_K $y_1 = -y_2$ $(k = 1), \ \mu = 1$ тогда из задачи F_K следует вторая задача Франкля [4].

2. Единственность решения задачи F_K. Единственность решения задачи F_K доказывается методом вспомогательных функций.

Теорема 1. *Задача F_K при выполнении условий $\varphi_1(x, y) \equiv 0, \ \varphi_2(x) \equiv 0, \ f(y) = 0,$*

$$k^{\delta + l + \beta_0} < \mu, \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство теоремы 1 идентичен работе [2].

Здесь с учетом младших членов с особыми коэффициентами уравнения (1), в качестве вспомогательной функции $F(x, y)$ берется функция

$$F(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left[2uvdx + (|y|^{\gamma_0} K(y) u^2 - |y|^{-\gamma_0} v^2) dy\right]$$

где $K(y)=y^l,\ \ \gamma_0=\delta_0$ при $y>0,\ \ K(y)=-(-y)^m,\ \ \gamma_0=\beta_0$ при $y<0$.

3. Существование решения задачи F_K.

Теорема 2. *Задача F_K при выполнении условий (8) и $\delta<\beta$ однозначно разрешима.* Доказательство теоремы 2 проводиться методом работы [3],[4].

Литература

1. Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения.// Прикладная математика и механика 1956. Том 20, №2. С. 196-202.

2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. с304.

3. Давингталь Ю.В. К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля.// Успехи матем. наук. 14(85), 177-182 (1959).

4. Мирсабуров М., Карасакалов Р. Вторая обобщенная задача Франкля для уравнения Чаплыгина с сингулярным коэффициентом. // Известия вузов. Математика 2011. №3, с 50-59.

Задача Дирихле Для Кольца С Промежуточным Пограничным Слоем

Турсунов Д. А., Шакиров К. К.

Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан;
dtursunov@oshsu.kg, kshakirov@oshsu.kg

Актуальность исследования асимптотики решения задачи Дирихле для кольца обусловлена как теоретической значимостью, так и широким спектром прикладных задач, где такие модели находят применение. Кольцевые области встречаются в различных приложениях, таких как: электромагнитное поле внутри кольцевых волноводов, теплопередача в кольцевых слоях, гидродинамика (например, течения в кольцевых трубах). Подобные задачи возникают при изучении потоков жидкости и газа, динамики геофизических объектов, где кольцевая геометрия описывает слоистые структуры или круговые потоки [1].

Особенностью (новизной) рассматриваемой задачи заключается в том, что вблизи пограничного слоя существует еще один промежуточный пограничный слои. Нами построено полное равномерное асимптотическое разложение решения поставленной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Исследуем следующую задачу Дирихле для кольца

$$\varepsilon^n\Delta u^\varepsilon(\rho,\varphi)+(\rho-a)^k p(\rho,\varphi)\frac{\partial u^\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho}- \\ -((\rho-a)^k q(\rho,\varphi)+\varepsilon r(\rho,\varphi))u^\varepsilon(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(a,\varphi)=\psi_1(\varphi),\quad u^\varepsilon(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi], \quad (2)$$

где ε - малый параметр, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - оператор Лапласа в полярной системе координат, $a,\ b$ - заданные, известные постоянные числа, $p,\ q,\ r,\ f\in C^\infty(\overline{D}),\ (\rho,\varphi)\in\overline{D}:\ 0<p(\rho,\varphi)$,
$0<q(\rho,\varphi),\ 0<r(\rho,\varphi),\ 1<n,\ 1<k,\ (n,\ k\in N),\ f(a,\varphi)\neq 0,\ \varphi\in[0,2\pi]$,

$D = \{(\rho, \varphi)|a < \rho < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},\ \overline{D} = \{(\rho, \varphi)|a \le \rho \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$,
$u^{\varepsilon}(\rho, \varphi, \varepsilon)$ - искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Краевую задачу в кольце (1), (2) обычно называют задачей Дирихле для кольца. Для начала необходимо решить следующие задачи:

1) найти условие для параметров n и k, при выполнении которого появляется дополнительный пограничный слой, т.е. достаточное условие существование промежуточного пограничного слоя [2]-[5];

2) построить полное равномерное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2), при стремлении малого параметра к нулю.

Отметим, что если в сингулярно возмущенном уравнении (1) формально считать, что $\varepsilon = 0$, то мы получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$(\rho - a)^k p(\rho, \varphi)\frac{\partial u^0(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - (\rho - a)^k q(\rho, \varphi)u^0(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi),\ (\rho, \varphi) \in D. \qquad (3)$$

В общем случае, решение невозмущенного (предельного) уравнения (3) не может удовлетворять краевым условиям (2), что свойственно сингулярно возмущенным задачам.

Нетрудно заметить, что предельное уравнение (3) имеет особую линию (окружность $\rho = a$), соответственно оно будет влиять на внешнее решение задачи (1)-(2). Такое явление свойственно бисингулярным задачам [1], [3]-[5].

Далее нами доказывается, что при выполнении неравенства $k + 1 < n(k - 1)$, в окрестности граничной окружности $\rho = a$, кроме классического пограничного слоя, появляется еще один промежуточный слои. Классические пограничный слои, в окрестности окружности $\rho = a$, вне пограничного слоя исчезает экспоненциальным ростом, а промежуточный слои исчезает степенным ростом.

Нами доказана следующая теорема

Теорема Для решения задачи Дирихле (1), (2) в кольце $\overline{D}$ при $k + 1 < n(k - 1)$, справедливо асимптотическое разложение:

$$u^{\varepsilon} = \Big(\sum_{j=0}^{s} \varepsilon^j v_j + \frac{1}{\mu^{k-1}} \sum_{j=0}^{(k-1)(s+1)} \mu^j w_j + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=0}^{2(s+1)} \lambda^j \pi_j\Big) E(\rho, \varphi) + O(\varepsilon^s),\ \varepsilon \to 0.$$

Литература

1. Il'in A. M. Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Moscow: Nauka, 1989, 1992.

2. Nayfeh A. H. Perturbation Methods, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Inter science Series of Texts, Monographs and Tracts, New York, 1973.

3. Tursunov D. A. Asymptotics of the solution of a singularly perturbed problem with a singular line //Lobachevskii J. Math. 2025. T.46, №1. C. 536–546.

4. Tursunov D. A., Omaralieva G.A. An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations //Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2022. T.28, №2. C. 193–200.

5. Tursunov D. A. Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer //Russian Mathematics. 2018. T.62, №3. C. 60–67.

О Нелокальных Задачах Для Вырождающегося Уравнения Смешанного Типа Четвёртого Порядка

Кадиркулов Б. Ж.[1], **Узакбаева Д. Е.**[2]

[1]Университет Альфраганус, Ташкент, Узбекистан;
[1,2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
e-mail1: b.kadirkulov@afu.uz, e-mail2: uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com

Пусть $\Omega = \{(x,t)\,|0<x<1, -\alpha<t<\beta\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{t>0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t<0\}$, где $\alpha, \beta > 0$ - заданные действительные числа. В области для вырождающегося уравнения смешанного типа четвчртого порядка вида

$$Lu \equiv \begin{cases} t^n u_{xxxx} + u_t = 0, & t>0; \\ (-t)^m u_{xxxx} + u_{tt} = 0, & t<0, \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующие нелокальные задачи:

Задача 1. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнение (1) из класса

$$u(x,t) \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_x^3\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_x^4\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right) \cap C_t^2\left(\Omega_2\right), \tag{2}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(1,t) = u_{xx}(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = u_x(1,t),\ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), -\alpha \le t \le \beta, \tag{3}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{4}$$

Задача 2. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнение (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям (3) и

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x), 0 \le x \le 1. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$-заданные функции, n, m-заданные положительные действительные числа. В данной работе для вырождающегося уравнения смешанного типа четвчртого порядка в прямоугольнике изучены краевые задачи с нелокальными граничными условиями, связывающие значения искомого решения или производных по нормали на нижнем и верхнем основаниях данного прямоугольника, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения. Спектральным методом доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи, при этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. В работе также изучены спектральные свойства задачи типа Самарского-Ионкина для обыкновенного дифференциального уравнения четвчртого порядка, полученная с применением спектрального метода, найдены собственные числа, а также соответствующие корневые функции, доказана их полнота и базисность, также исследована сопряженная задача.

Литература

1. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Дифференц. уравнения. (2011) Т.47, №10, с. 1474–1481.

2. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика 2015, №12, с. 55–65.

О Построение Решения Несимметричной Краевой Задачи Для Уравнения Третьего Порядка С Переменными Коэффициентами

Умаров Р. А.

Андижанский институт сельского хозяйства и агротехнологий, Андижан, Узбекистан;
r.umarov1975@mail.ru

В области $D = \{(x,y): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в вида

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)\,U_{xx} + A_2(x)\,U_x + A_3(x)\,U + A_4 U_y = g_1(x,y), \qquad (1)$$

где $p, \ q, A_4 \in R$, $A_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $g_1(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции в $\overline{D}$.

Заменой

$$U(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)\,d\xi + \frac{A_4}{2}y\right) u(x,y)$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)\,u_x + a_2(x)\,u = g(x,y),$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $g(x,y)$ выражаются определенными функциями.

Задача A**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p, \qquad (3)$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \quad u_x(p,y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(p,y) = \psi_3(y), \quad 0 \le y \le q, \qquad (4)$$

где $\psi_i(y)$, $x \in [0,p]$, $i = \overline{1,3}$, $g(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \ge 0$, $a_2(x) - \frac{1}{2}a_1{}'(x) \ge 0$, оно единственно.

Теорема 1 доказано методом интегралов энергии. **Замечание.** . Отметим, что при нарушении условия теоремы 1 однородная задача для однородного уравнения (2) может иметь нетривиальные решения. Например, можно легко убедится, что когда $p = 1$, $q = \pi$, $a_1(x) = 0$, $a_2 = -(\mu^3 + 1) < 0$ задача

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y) - \left(\mu^3 + 1\right) u(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \\ u_y(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad u(0,y) = u_x(1,y) = u_{xx}(1,y) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u(x,y) = \left(e^{\mu x}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mu - \tfrac{\pi}{3}\right) - e^{-\frac{1}{2}\mu x}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mu(1-x) - \tfrac{\pi}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{\frac{1}{2}\mu(3-x)}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mu x\right)\right)\cos\tfrac{1+2n}{2}y,$$

где μ решения уравнение

$$e^{-\frac{3}{2}\mu} - 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Теорема 2.Если выполняются следующие условия:
1) $\psi_i(y) \in C^3[0,q]$, $i = \overline{1,3}$, $\psi_i(q) = \psi'_i(0) = \psi_i''(q) = 0$, $i = \overline{1,3}$;
2) $\frac{\partial^3 g(x,y)}{\partial x \partial y^2} \in C\left[\bar{D}\right]$, $g(x,q) = g_\eta(x,0) = 0$;
3) $C < \frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}$,
4) $a_1(p) = 0$,
то решение задачи A существует. Здесь $C = \max\{|a_1(x)|, |a_1'(x) - a_2(x)|, x \in [0,p]\}$, $\lambda_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}$,$K = \frac{4}{3}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}$.

Доказательство теоремы 2 проводилось методом разделения переменных и решение выписано через построенную функция Грина [1].

Решения задачи имеет вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \left(\int_0^p G_n(x,\xi) f_n(\xi)\, d\xi + \int_0^p R_n(x,\xi) \left(\int_0^p G_n(x,s) f_n(s)\, ds \right) d\xi + \right.$$
$$\left. + \psi_{1n} + x\psi_{2n} + \frac{x^2 - 2xp}{2}\psi_{3n} \right) \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2q} y\right),$$

здесь

$$f_n(x) = -\left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3} + 1\right)\psi_{1n} - \left(\frac{xa_2(x) + a_1(x)}{\lambda_n^3} + x\right)\psi_{2n} -$$
$$- \left(\frac{xa_1(x) - pa_1(x) - xa_2(x)p}{\lambda_n^3} + \frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2 + \frac{x^2 - 2xp}{2}\right)\psi_{3n} + \frac{g_n(x)}{\lambda_n^3},$$

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_n(x,\xi) = \frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} a_1(\xi) + G_n(x,\xi)\left(a_1'(\xi) - a_2(\xi)\right),$$

$G_n(x,\xi)$ - функция Грина задачи [2]

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^3 Y(y) = 0, \\ Y_y(0) = Y(q) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the GreenЎs Function// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. 43:3. pp. 738–748.

2. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of a boundary value problem for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics with the construction of the Green's function // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2024. T. 114. №. 2. pp. 22–39.

Краевая Задача Для Одного Неклассического Уравнения Третъего Порядка С Кратними Характеристиками

Жураев Б. Б.[1], **Усмонова Ю. Ч.**[2]

[1]Термезский государственний университет, Термез, Узбекистан,
[2]Термезский государственний университет, Термез, Узбекистан
@yulduzusmonova1410gmail.com;

Аннотация. В работе рассматривается некоторая конечная область для одного неклассического уравнения третъего порядка с кратними характеристиками , доказываются теоремы единственности и существования решения задачи α.

Для уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y). \tag{1}$$

рассмотрим следующая краевая задача α в конечной области D=$\{0<x<1,0<y<1\}$. Постановка задачи α и теорема единственности. Отметим при исследовании краевых задач в место уравнение (1) неограничевая общности, можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x,y). \tag{2}$$

так как если в уравнение (1) $b(x,y) \in c^{3,1}(\overline{D}$, то преобразование
$u(x,y) = \upsilon(x,y)exp(\frac{1}{2}\int_0^y b(x,y)dt)$ приводит к уравнение (2) относителъно $\upsilon(x,y)$. Задача α найти в области D решение $u(x,y) \in c^{2,1}(D)\bigcap c^{3,2}(D)$ уравнения (2) удавлятворяющую следующую краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = h_0(x), \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = h_1(x), 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

$$\gamma_0(y)u_0(0,y) + \gamma_1(y)u_x(0,y) + \gamma_2(y)u_{xx}(0,y) = P_0(y) \tag{5}$$

$$\delta_0(y)u_0(1,y) + \delta_2(y)u_{xx}(1,y) = P_1(y) \tag{6}$$

$$u_x(1,y) = P_2(y), 0 \le y \le 1 \tag{7}$$

Здесъ $a_i(x)$, $\beta_i(x)$, $h_i(x)$, $\delta_i(y)$, $\gamma_i(y)(i = 0,1; j = 0,1,2,)$. задание непрерывные функции,причем $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, $\delta_0^2 + \delta_1^2 \neq 0$. Это задача исследована при $\alpha_1(x) \equiv \beta_1(x) \equiv \gamma_1(y) \equiv \gamma_2(y) \equiv \delta_1(y) \equiv 0$, $\alpha_0(x) \equiv \beta_0(x) \equiv_0 (y) \equiv \delta_0(y) \equiv 1$, $\alpha_i(x,y) \equiv b(x,y) \equiv 0(i = 0,1,2)$ в работе [3].

Теорема 1. Пусть $\alpha_i(x,y) \in c^{i,0}(\overline{D})$, $\alpha_2(x,y) \leq 0$, $\alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_{2x} + \frac{1}{2}\alpha_{2xx} = c(x,y) \geq 0$, если $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0 \neq 0$ то $\alpha_0\alpha_1 \geq 0$, $\beta_0\beta_1 \leq 0$, $\gamma_0\gamma_1 \leq 0$, $\gamma_0\gamma_2 \geq 0$, $\delta_0\delta_1 \leq 0$,$(-1)[\alpha_1(i,y) - \alpha_{2x}(i,y)] \geq 0$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_2(0,y) \geq -1, i = 0,1$. Тогда существует единственное решение задача α. Единственность решение задача α доказывается методом интегралов энергии а существование с водится к системе интегральных уравнения Фредгольма второго рода.

Литература

1. Тихинов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. МОСКВА-1972.

2. ДЖураев Т.Д. Краевы задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Тошкент., ФАН, 1979 240 С.

3. Абдиназаров С. Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения. Тошкент., ФАН, 1991. 4., 3-13 ст.

Краевая Задача Для Дифференциального Уравнения Типа Соболева Четвертого Порядка Смешанного Типа

Фаязова З.К.

British Management University, Ташкент, Узбекистан
z.fayazova@yahoo.com

В своей известной работе С.Л. Соболев [1] исследовал немодельные уравнения и указал на их связь с задачами приложения. Данная работа посвящена исследованию корректности краевых задач для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка смешанного типа.

Пусть

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\right) + sgn(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}u \tag{1}$$

дифференциальное выражение.

Пусть $\mathcal{Q} = \Omega \times \Omega_0$, где $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$,

$$\Omega_1 = \{x : -\pi < x < \pi\},$$
$$\Omega_2 = \{y : -\pi < y < \pi\},$$
$$\Omega_0 = \{t : 0 < t < T, \quad t < \infty\}.$$

Пусть функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} + \mathcal{L}u = f(x,y,t), \tag{2}$$

в области $\mathcal{Q} \times \{y \neq 0\}$, а также начальным условиям

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_1} &= 0, \quad (y,t) \in \overline{\Omega_2} \times \overline{\Omega_0}, \\ u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega_2} &= 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

и условиям склеивания:

$$\left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_0}, \quad i = 0,1. \tag{5}$$

а функции $\varphi(x,y), \psi(x,y), f(x,y,t)$ являются заданными достаточно гладкими функциями.

Нами получена априоирная оценка решения уравнения (2), исследована соответствующая спектральная задача, доказана теорема единственности и условной устойчивости.

Литература

1. С.Л. Соболев. Об одной новой задаче математической физики. *Изв. АН СССР, сер. математика*, 18(1), 3-50 (1954).

Краевые Задачи Для Дифференциальных Уравнений Смешенного Типа Первого И Второго Порядка По Временной Переменной

Фаязов К.С.[1], **Худайберганов Я.К.** [2]

Туринский политехнический университет в г. Ташкенте Ташкент, Узбекистан;
kudratillo52@mail.ru
Национальний университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека Ташкент, Узбекистан;
komilyashin89@mail.ru

В работе исследуется краевые задачи для дифференциальных уравнений смешенного типа первого и второго порядка по временной переменной. Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа имеют практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники(см. [1],[2],[3]).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i} + \sum_{j=1}^{n} sgn(x_j) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} = 0, \tag{1}$$

в области $Q = \Omega_0 \times \Omega_1$, где $i = 1,2$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Omega_1 = \{0 < t < T, T < \infty\}$, $\Omega_0 = \{\ x| - 1 < x_j < 1,\ x_j \neq 0\}$.

Задача. Найти такое решение уравнения (1) в области Q, чтобы были выполнены следующие условия:
начальное

$$\begin{aligned} &a)\ i=1, \quad u(x,t)|_{t=0}=\varphi_0(x), \qquad x\in[-1;1]^n, \\ &b)\ i=2, \quad \left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_{k+1}(x), \qquad x\in[-1;1]^n,\ k=0,1, \end{aligned} \tag{2}$$

граничные

$$u(x,y,z,t)|_{\partial\Omega_0}=0, \qquad t\in\bar{\Omega}_1, \tag{3}$$

и условия склеивания

$$\left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_j^i}\right|_{x_j=-0}=\left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_j^i}\right|_{x_j=+0}, \quad t\in\bar{\Omega}_1,\ i=0,1.,\ j=\overline{1,n} \tag{4}$$

где $\varphi_m(x)$, $m=\overline{1,3}$- заданная достаточно гладкая функции, причем $\varphi_m(x)|_{\partial\Omega_0}=0$.

В данной работе установлены априорные оценки для решения уравнения (1), доказаны теоремы о единственности и условной устойчивости решения искомых задач.

Литература

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, Москва, 1961, 206 с.

2. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения в газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990, 280 с.

3. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. ГЛ.: Наука, 1973, 711 с.

4. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010, 941 с.

5. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирские электронные математические известия. 17 (2020), с. 647-660.

О Слабом Обобщенном Решении Полунелокальной Краевой Задачи Для Уравнения Смешанного Типа Второго Рода Четвертого Порядка

Халхаджаев Б. Б.

Ташкентский институт экономики и менеджмента, Ташкент, Узбекистан;
xalxadjaev@yandex.ru

Как известно, впервые нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго порядка были предложены и изучены в работе Ф. И. Франкля [1]. Прямые задачи с локальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка в различных пространствах исследованы в работах [2, 3], а задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка изучены недостаточно [4].

В данной работе с использованием результатов работ [2–5] и применением модифицированного метода Галеркина, методов априорных оценок и «ε-регуляризации»

исследуется однозначная разрешимость слабого обобщчнного решения полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода четвертого порядка:

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \quad Mu = a u_{xxxx} - b u_{xxtt} - c u_{xx},$$

$K_4(x,t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$, $K_{4t}(0) = K_{4t}(T)$, $K_i(x,0) = K_i(x,T)$ для $i = \overline{0,3}$ и всех $x \in [0,1]$. Функция $K_1(x,t) > 0$ является достаточно большой. Здесь

$$D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \quad (i = 0,1,2,3,4), \quad D_t^0 u = u.$$

Коэффициенты уравнения (1) предполагаются достаточно гладкими в $\overline{Q}$:

$$K_4(t) \in C^3(0,T) \cap C[0,T], \quad K_i(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}), \quad a,b,c = \text{const} > 0.$$

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как знак функции $K_4(t)$ на отрезке $[0,T]$ не ограничивается [2-5].

Полунелокальная краевая задача: Найти слабое обобщенное решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее условиям:

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \quad p = 0,1,2, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u_{xx}\big|_{x=0} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где γ – величина, отличная от нуля, которая будет уточнена ниже.

Определим билинейные формы:

$$a(u,\vartheta) = P(u,\vartheta) = (K_4 u_{tt}, \vartheta_{tt})_0 - ((K_3 - 2K_{4t}) u_{tt}, \vartheta_t)_0 + \left(\sum_{i=0}^{2} b_i D_t^i u, \vartheta \right)_0,$$

где $b_i \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, $b_2(x,t) = K_{4tt} - K_{3t} + K_2$, $b_1 = K_1$, $b_0 = K_0$;

$$m(u,\vartheta) = (Mu,\vartheta) \equiv (a u_{xx} + b u_{tt}, \vartheta_{xx})_0 - (c u_{xx}, \vartheta)_0 .$$

Определение. Функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ называется слабым обобщенным решением задачи (1)-(4), если для любой функции $\vartheta(x,t) \in W_2^2(Q)$, удовлетворяющей условиям $\gamma\vartheta\big|_{t=0} = \vartheta\big|_{t=T}$, $\vartheta\big|_{x=0} = \vartheta\big|_{x=1} = 0$, выполняется интегральное тождество:

$$a\left(u, e^{-\lambda t}\vartheta\right) + m\left(u, e^{-\lambda t}\vartheta\right)_0 = \left(f, e^{-\lambda t}\vartheta\right)_0, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

Теорема. Пусть выполнены условия гладкости коэффициентов уравнения (1), а также следующие неравенства:

$$-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0, \quad 2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0, \quad \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0,$$

для всех $(x,t) \in \overline{Q}$, где $K_{4t} = \frac{\partial K_4}{\partial t}$, $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, а $|\gamma| > 1$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) в пространстве $W_2^2(Q)$, причем выполняется оценка:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \le c\|f\|^2_{L_2(Q)}, \tag{5}$$

где константа $c > 0$ не зависит от f.

Литература

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. Москва, 1973. 711 с.

2. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С. 5–13.

3. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995. 133 с.

4. Джамалов С. З., Пятков С. Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка // Сиб. мат. журнал. 2020. Т. 61, №4. С. 777–795.

5. Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент, 2020. 173 с.

О Решение Краевой Задачи Для Неоднородного Уравнения Третьего Порядка С Несимметричными Условиями В R^3

Апаков Ю. П.[1],[2], **Хамитов А. А.**[2]

[1]Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан;
yusupjonapakov@gmail.com

[2]Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан;
azizbek.khamitov.93@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работах [2-3] в плоскости исследованы краевые задачи с несимметричными условиями для уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x,y,z) : 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x,y,z), \tag{1}$$

Задача A . Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x,y,z) \in C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0,z) = u_y(x,q,z) = 0,\ \ u(x,y,0) = u_z(x,y,r) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au\,(0,y,z) + bu_{xx}\,(0,y,z) = \psi_1\,(y,z)\,, \\ cu\,(p,y,z) + du_{xx}\,(p,y,z) = \psi_2\,(y,z)\,, \\ u_x\,(p,y,z) = \psi_3\,(y,z)\,, \end{cases} \tag{3}$$

где $a,\ b,\ c,\ d \in R\backslash\{0\}$, а $f(x,y,z)$, $\psi_i(y,z)$, $i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i(0,z)=0,\ \dfrac{\partial\psi_i(q,z)}{\partial y}=0,\ \ \dfrac{\partial^2\psi_i(0,z)}{\partial y^2}=0, \\ \psi_i(y,0)=0,\ \dfrac{\partial\psi_i(y,r)}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial^2\psi_i(y,0)}{\partial z^2}=0, \\ f(x,0,z)=0, \dfrac{\partial f(x,q,z)}{\partial y}=0,\ f(x,y,0)=0, \dfrac{\partial f(x,y,r)}{\partial z}=0, \end{cases} \quad i=\overline{1,3}. \tag{4}$$

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab>0,\ cd<0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два различных решений $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$. Тогда функция $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}\,u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\,u_y\right)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(u\,u_z\right)+u_z^2=0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^q\int\limits_0^r u_x^2(0,y,z)\,dydz-\frac{d}{c}\int\limits_0^q\int\limits_0^r u_{xx}^2(p,y,z)\,dydz+\frac{b}{a}\int\limits_0^q\int\limits_0^r u_{xx}^2(0,y,z)\,dydz+$$
$$+\iiint\limits_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz+\iiint\limits_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz=0.$$

Если $ab>0,\ cd<0$, из четвертого и пятого слагаемого, т.е. $u_y(x,y,z)=0$ и $u_z(x,y,z)=0$, получим $u(x,y,z)=h(x)$, здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиями задачи. Тогда поставляя в уравнение (1), имеем $h(x)=C_1x^2+C_2x+C_3$, из условия (3), получим

$$\begin{cases} 2bC_1+aC_3=0, \\ (cp^2+2d)\,C_1+cpC_2+cC_3=0, \\ 2pC_1+C_2=0. \end{cases}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2b & 0 & a \\ cp^2+2d & cp & c \\ 2p & 1 & 0 \end{vmatrix}=-acp^2+2ad-2bc.$$

Пусть $\Delta=0$, т.е. $-acp^2+2ad-2bc=0\ \Rightarrow p^2=2\left(\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}\right)$, учитывая условия $ab>0,\ cd<0$ и $p>0$, получим $p^2<0$, а это невозможно, значит $\Delta\neq 0$. Тогда решение системы равен $C_1=C_2=C_3=0$, отсюда получим $h(x)=0$. Следовательно, $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \in C\left(0 \le y \le q, 0 \le z \le r\right), i = \overline{1,3}$;

2) $\dfrac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \in C\left(0 \le x \le p, 0 \le y \le q, 0 \le z \le r\right)$,

и (4), то решение задачи A существует.

Теорема 2 существование решения задачи доказана методом разделения переменных. Решение построено с использованием функции Грина в виде бесконечного ряда. Доказано, что ряд и его производные, входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в области D.

Литература

1. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара. 2014. №1(34). С.56–65.

2. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol 43:3. pp. 738–748.

3. Апаков Ю.П., Умаров Р.А. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области// Научный вестник НамГУ. 2020. №1. С. 6–17.

Интегрирование Нагруженного Модифицированного Уравнения Кортевега-Де Фриза С Самосогласовнным Интегральным Источником

Хасанов М. М.[1], **Исмоилов О. Б.** [2]

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;

Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Хорезмское отделение;

hmuzaffar@mail.ru, bakhromboyevich.oxunjon@gmail.com

В работе [1] установлена полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ), в классе быстроубывающих функций. В работах [2, 3] уравнение мКдФ исследована в классе конечнозонных функций.

В этой работе изучается уравнение мКдФ с самосогласованным интегральным источником

$$u_t = 6|u|^2 u_x - u_{xxx} + \gamma(t)|u(0,t)|^2 u_x + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} i\beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+ - i\psi_2^+)(\psi_1^- - i\psi_2^-) d\lambda, t > 0\ ,\ \ x \in R. \tag{1}$$

Требуется найти решение $u(x,t) = -p(x,t) + iq(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), u(x+\pi,t) \equiv u(x,t) \in C_x^3(t \ge 0) \cap C_t^1(t > 0), \tag{2}$$

где $u_0(x)$ и $\gamma(t) \in C[0,\infty)$ заданные действительные функции. Здесь $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную

асимптотику$\beta(\lambda,t) = O\left(\lambda^{-2}\right), \quad \lambda \to \pm\infty$,$\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\ \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x,t)y = \lambda y, x \in R, \tag{3}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$$p(x,t) = -Re(u(x,t)), q(x,t) = Im(u(x,t)).$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t),\ s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначена решение уравнения (3), удовлетворяющая начальным условиям $s(0,\lambda,t) = (0,\ 1)^T$.

Спектр оператора (3) состоит из следующего множества $E = \bigcup\limits_{n\in Z}[\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in Z$ задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (3) вместе со знаками $\sigma_n(t) = sign\left\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\right\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (3).

Теорема. Пусть $(u(x,t)$,$\psi^+(x,\lambda,t)$,$\psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (1)-(3). Тогда спектр уравнения (3) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times$$

$$\times\{p_{xx}(0,t) + 2p_x(0,t)q(0,t) - 2(p(0,t) + \xi_n)[q^2(0,t) + q_x(0,t) + p^2(0,t)] -$$

$$-4\xi_n^2(p(0,t) + \xi_n) - \gamma(t)[p(\tau,t) + \xi_n][p^2(0,t) + q^2(0,t)] + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2 - \lambda_n^2}d\lambda\}. \tag{4}$$

Знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \in Z, \tag{5}$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x) = -Re(u_0(x))$ и $q_0(x) = Im(u_0(x))$.

Учитывая формулы следов Учитывая формулы следов

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t)\right),$$

$$p_{xx} + 2p_xq = -2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t)\right)\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\tau}\right) -$$

$$-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left(h_n(\xi)\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau} + \xi_n\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial\tau}\right)$$

$$q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right) \tag{6}$$

систему (4) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Метод обратной спектральной задачи

Литература

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc. Japan. 1972. - V. 32. P. 1681.

2. Итс А.Р. Точное интегрирование в римановых -функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. - Дисс. канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1977.

3. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Мат. сб., 1994. - Т. 185. №8. - С. 103-114.

Энергетические Оценки Специального Вида Для Решений Первой Краевой Задачи В Неограниченных Областях

Хашимов А. Р.[1]

[1]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан; abdukomil@yandex.ru

В данной статье мы устанавливаем энергетические оценки специального вида для обобщенного решения уравнения третьего порядка составного типа, которое позволяет изучить поведение решения уравнения на бесконечности.

С этой целью в неограниченной области $\Omega\subset R_+^n=\{x:x_1>0\}$ рассмотрим уравнения

$$lA+Bu=f(x), \tag{1}$$

где $lu=l_0u+\alpha(x)u$, $l_0u=\alpha^k(x)u_{x_k}$, $Au=a^{ij}(x)u_{x_ix_j}+a^i(x)u_{x_i}+a(x)u$, $Bu=b^{ij}(x)u_{x_ix_j}+b^i(x)u_{x_i}+b(x)u$.

Здесь полагается, что по повторяющимся- индексам ведется суммирование, все коэффициенты в (1) и их производные, встречающиеся в дальнейшем, ограничены и измеримы в любой конечной подобласти области Ω. Будем также считать, что граница области Ω является гладкой или кусочно-гладкой.

Пусть Γ есть граница области Ω, $v(x)=(v_1(x),v_2(x),...,v_n(x))$ −вектор внутренней нормали Γ в точке x. Будем считать, что оператор A равномерно эллиптический, т.е. выполняются условия

$$a^{ij}=a^{ji},a_0|\xi|^2\le a^{ij}\xi_i\xi_j,\forall x\in\Omega\cup\Gamma,\forall\xi\in R^n \tag{2}$$

Произведем разбиение границы области Ω. Обозначим

$$\sigma_0=\left\{x\in\Gamma:\alpha^k(x)v_k(x)=0\right\},\ \sigma_1=\left\{x\in\Gamma:\alpha^k(x)v_k(x)>0\right\},$$
$$\sigma_3=\left\{x\in\Gamma:\alpha^k(x)v_k(x)<0\right\}.$$

В области Ω рассмотрим краевую задачу

$$lAu + Bu = f(x), \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \tag{4}$$

$$l_0 u|_{\sigma_1} = 0 \tag{5}$$

Пусть $E\left(\Omega(\tau_1;\tau_2)\right)$ есть множество функций $v \in C^2\left(\overline{\Omega}(\tau_1,\tau_2)\right)$ таких, что $v = 0$ на $\Gamma(\tau_1,\tau_2)$ и для некоторого числа $h > 0$,$l_0 v = 0$ на множестве $\sigma_0(\tau_1,\tau_2) \cup \sigma_2(\tau_1,\tau_2) \cup \sigma_1^h(\tau_1,\tau_2)$.

Пусть $H\left(\Omega(\tau_1;\tau_2)\right)$ есть гильбертово пространство полученное замыканием $E\left(\Omega(\tau_1;\tau_2)\right)$ по норме

$$\|u\|_{H(\Omega(\tau_1;\tau_2))} = \left\{ \int\limits_{\Omega(\tau_1,\tau_2)} \left(d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2\right) dx + \int\limits_{\sigma_1(\tau_1,\tau_2)} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Теорема. Пусть $d_1^{ij}\xi_i\xi_j \geq d_{11}|\xi|^2$,$d_{11} > 0$,$q_1^{ij} > 0$. Тогда если $u(x)$ является обобщенным решением задачи (3)-(5) в области Ω_{τ_1}, причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_1}то для любого $\tau_2 > \tau_1$ справедлива оценки

$$\int\limits_{\Omega_{\tau_2}} E(u)dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2,\tau_1) \int\limits_{\Omega_{\tau_1}} E(u)dx$$
$$\int\limits_{\Omega_{\tau_2}} \Lambda(x_1)u^2 dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2,\tau_1) \int\limits_{\Omega_{\tau_1}} E(u)dx.$$

Здесь

$$E(u) = d^{ij}u_{x_i}u_{x_j} - q^{ij}u^2,\ q_1^{ij} = \tfrac{1}{2}c^1 + \alpha^1 a + \left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i x_j} - c^{11}_{x_1} - \left(\alpha^1 a^1\right)_{x_i},$$
$$d_1^{ij} = \tfrac{1}{2}\alpha^1 a^{ij} - 2\alpha^j a^{i1}$$

Функция $\Phi(x_1,\tau_1)$ является решением задачи

$$\Phi_{x_1x_1} = \mu(x_1)\Phi,\ \Phi(\tau_1,\tau_1) = 1,\ \Phi_{x_1}(\tau_1,\tau_1) = 0,$$

$\Lambda(\tau)$, $\mu(\tau)-$любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int\limits_{S_\tau} E(v)dx' \left| \int\limits_{S_\tau} P(v)dx' \right|^{-1} \right\}$$
$$0 < \Lambda(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int\limits_{S_\tau} E(v)dx' \left| \int\limits_{S_\tau} v^2 dx' \right|^{-1} \right\}$$
$$x' = (x_2, x_3, ..., x_n),\ P(v) = \alpha^1 a^{i1} v_{x_i} v + \tfrac{1}{2}\left(c^{11} + \left(\alpha^1 a^1\right)_{x_1} - \left(\alpha^1 a^{1j}\right)_{x_j}\right) v^2$$

$N-$ множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\overline{S}_\tau$, которые равны нулю на $\overline{S}_\tau \cap \Gamma_\tau$.

Задача О Равновесии Упругого Тела С Двумя Жёсткими Включениями

Хошимов Д.З.[1]

[1]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
d.khoshimov@g.nsu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ. Область Ω содержит подобласти ω_1, ω_2, где $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$, $\Gamma \cap (\omega_1 \cup \omega_2) = \varnothing$. Пусть $n = (n_1, n_2)$ - единичный вектор, нормальный к границе Γ; $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ - единичные векторы, нормальные к границам $\partial\omega_2$ и $\partial\omega_1$, соответственно. Пусть $\mathrm{A} = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, является заданным положительно определенным тензором модулей упругости. Введем пространство функций

$$R(\omega) = \{\rho(x) = Bx + C, \quad x \in \omega\}$$

$C \in R^2$, а $B-$ постоянная кососимметрическая матрица порядка 2.

Требуется найти функцию u, определчнную в Ω, а также функции $\rho_1 \in R(\omega_1)$, $\rho_2 \in R(\omega_2)$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma = \mathrm{A}\epsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega\backslash(\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2}) \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{2}$$

$$[u] = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_1 \cup \partial\omega_2, \quad u = \rho_1 \quad \text{на} \quad \omega_1, \quad u = \rho_2 \quad \text{на} \quad \omega_2 \tag{3}$$

$$\int\limits_{\partial\omega_1} \sigma\eta \cdot \rho_1 + \int\limits_{\omega_1} f\rho_1 + \int\limits_{\partial\omega_2} \sigma\nu \cdot \rho_2 + \int\limits_{\omega_2} f\rho_2 = 0, \quad \forall\rho_1 \in R(\omega_1), \forall\rho_2 \in R(\omega_2) \tag{4}$$

Задача (1)–(4) допускает вариационную постановку. Для этого введем пространство функций

$$W_0^{1,\omega}(\Omega)^2 = \{u = (u_1, u_2) \quad | \quad u \in H_0^1(\Omega)^2, u|_{\omega_1} \in R(\omega_1), u|_{\omega_2} \in R(\omega_2)\}$$

Вариационная постановка задачи (1)–(4) имеет следующий вид:

$$u \in W_0^{1,\omega}(\Omega)^2, \int\limits_{\Omega\backslash(\overline{\omega_1}\cup\overline{\omega_2})} \sigma(u)\epsilon(v)dx - \int\limits_{\Omega} fvdx = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,\omega}(\Omega)^2 \tag{5}$$

Предполагая достаточную гладкость решений, мы можем доказать, что формулировки задач (1)-(4) и (5) эквивалентны.

Результаты для различных моделей упругих тел с жчсткими включениями можно найти в [1].

Литература

1. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

О Нелокальной Задаче Для Одного Характеристически Нагруженного Уравнения Гиперболо-Параболического Типа

Хубиев К. У.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
khubiev_math@mail.ru

Рассмотрим характеристически нагруженное [1] уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda u(x,0) = 0, \ \ y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu u(x-y,0) = 0, \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезком AB оси $x = 0$, отрезком BC характеристики $x - y = 1$ и отрезками CE и AE соответственно прямых $x = 1$ и $y = 1$, $A = A(0,1)$, $B = B(0,-1)$, $C = C(1,0)$, $E = E(1,1)$, $\lambda, \mu = const$. Обозначим через $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0, x > -y\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x < -y\}$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \backslash \{x = -y\}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C_x^2(\Omega_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача F. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0,t) = \varphi_0(y), \quad u(1,t) = \varphi_1(t),$$

$$u_x(0,-t) = \psi(t), \quad u(0,t) - u(0,-t) = f(t),$$

где $\varphi_0(y), \varphi_1(t), \psi(t), f(t)$ – заданные непрерывные функции, $0 < t < 1$.

В работе [2] Ф. И. Франкль поставил задачу нового типа для уравнения Чаплыгина, которая впервые была решена А. В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в [3]. Впоследствии к этой задаче обращались многие авторы. Задача F является аналогом задачи Франкля для уравнения гиперболо-параболического типа, которая в более общей постановке для гиперболо-параболического уравнения с переменными коэффициентами была исследована в [4]. Задача типа Франкля для уравнения параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения типа в была исследована в [5].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. 1995. М.: Высш. шк. 301 с.

2. Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.

3. Бицадзе А. В. Об одной задаче Франкля// Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 6. С. 1091–1094.

4. Псху А. В. О решении задачи Франкля// Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 3. С. 421–422.

5. Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А. О задаче типа Франкля для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа// Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 2. С. 298–304.

Об Одной Смешанной Задаче

Чориева С.Т.[1], **Юлдошева Ч.Т.**[2]

Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан;
e-mail: sanamchoriyeva3@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0,\ m > n. \tag{1}$$

Пусть Ω-конечная односвязная область плоскости переменных $x,\ y$ ограниченная при $x > 0,\ y > 0$ кривой Жордана σ_0 с концами в точках $A(1,0),\ B(0,1)$, отрезком OB оси y-ов при $x > 0,\ y > 0$ характеристиками:

$$OC : \frac{1}{q}x^q - \frac{1}{p}(-y)^p = 0,$$

$$AC : \frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = 1$$

уравнения (1), где

$$2q = n + 2,\ 2p = m + 2,\ a = q^{1/q},\ b = p^{1/p}. \tag{2}$$

Введем обозначения: Ω_1 и Ω_2-эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω соответственно при $y > 0,\ y < 0$, а через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристик OC и AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $\in J = (0,1)$.

Интегралом обобщенного дробного порядка c при $c > 0$ от функции $f(x)$ назовем выражения

$$F_{0,x}\left[\begin{matrix} a,b; \\ c,\ x^k \end{matrix}\right] f(x) = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_x^0 f(t)(x^k - t^k)^{c-1} F\left(a,b,c;\frac{x^k - t^k}{x^k}\right) kt^k dt, \tag{3}$$

$$F_{x,1}\left[\begin{matrix} a,b; \\ c,\ x^k \end{matrix}\right] f(x) = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_1^x f(t)(t^k - x^k)^{c-1} F\left(a,b,c;\frac{x^k - t^k}{x^k}\right) kt^k dt, \tag{4}$$

где $k > 0;\ J-$ интервал $0 < x < a$ прямой $y = 0$.

Задача А. Требуется найти в области Ω решения $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u|_{\sigma_0} = \psi_1(x,y),\quad (x,y) \in \sigma_0, \tag{5}$$

$$u|_{OB} = \varphi_1(y),\quad 0 \le y \le 1, \tag{6}$$

$$u|_{OC_0} = \varphi_2(x),\quad 0 \le x \le \frac{c-1}{2}, \tag{7}$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + f(x), \frac{c-1}{2} \le x \le 1, \tag{8}$$

где $\mu-$ некоторая постоянная, $\theta(x)(\theta^*(x))$–аффикс точки пересечения характеристики $OC(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, где $x_0 \in [c,1]$, $\psi_1(x,y), \varphi_1(y), \varphi_2(x), f(x)$- заданные функции.

Задача А отличается от задачи Трикоми лишь условием Бицадзе-Самарского (8), которое нелокально связывает значения искомой функции $u(x,y)$ на параллельных характеристиках $C_0C \subset AC$ и EC_1. Отметим, что задача А при $\mu = 0$ переходит в задачу Трикоми.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1985,-304 с.

2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальние задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. Universitet. Yangiyo'l poliyrafservis -224 с.

О Слабом Обобщенном Решении Нелокальной Краевой Задачи Периодического Типа Для Уравнения Трикоми Четвертого Порядка

Юсупов Ш.Б.[1]

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан [1,2]

sherzod.yusupov.2020@inbox.ru

В данной работе с использованием результат работы [1] и с применением модифицированом метода Галеркина, априорных оценок изучается сушествование и единсвенность слабого обобщенного решения одной нелакальной краевой задачи периодического типа для уравнения Трикоми первого рода четвертого порядка.

В области $Q = (-1,1)\times(0,T) = \{(x,t); -1 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения Трикоми четвертого порядка.

$$L_2u = Pu + Mu = f(x,t) \tag{1}$$

Здесь $Pu = \sum\limits_{i=0}^{4} K_i(x,t)D_t^i u; \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$ где $K_4(x,t) = x$,

$K_i(x,0) = K_i(x,T), (i = 0,1,2,3)$ $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$,

a, $b, c-$ некоторые положительные числа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Нелокальная краевая задача периодического типа: Найти обобщенное решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1};\ \ p = 0,1,2,3 \tag{3}$$

где γ величина отличное от нуля, которого будет уточнена ниже.

Теорема. Пусть выполнены высшее перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x,t) > 0$ достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условии для коэффициентов уравнения (1); $-(2K_3 + 3\lambda x) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0, \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x,t) \in \overline{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Тогда для любого $f(x,t) \in L_2(Q)$, существует единственное обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, и для нее справедливо следующая оценка:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\,\|f\|_0^2 \tag{4}$$

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. с.173.

Yuklangan Hadli Bessel Operatorli Umumlashgan Kleyn-Gordon-Fok Tenglamasi Uchun Koshi Masalasi

Baltayeva U. I.[1,2], **Xasanov B. M.**[2], **Egamberganova Z. A.**[2]
[1]Xorazm Ma'mun akademiyasi, Aniq fanlar bo'limi
[2]Urganch Davlat Universiteti, Amaliy fanlar kafedrasi
e-mail: umida_baltayeva@mail.ru, xasanovboburjon.1993@gmail.com,
z.egamberganova24@gmail.com

Annotatsiya. Quyidagi ishda yuklangan hadli Bessel operatorli umumlashgan Kleyn-Gordon-Fok tenglamasi uchun Koshi masalasining bir qiymatli yechilishi tadqiq etiladi.

Ushbu $Q = \{(x,t)|x > t > 0\}$ sohada bir jinsli bo'lmagan quyidagi

$$L^{\lambda}_{\beta,\alpha}(u) = u_{tt}(x,t) + \frac{2\beta}{t}u_t(x,t) - \left(u_{xx}(x,t) + \frac{2\alpha}{x}u_x(x,t)\right) + \lambda^2 u(x,t) = \mu^2 u(x_0,t) + f(x,t), \tag{1}$$

tenglama va

$$u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), x \geq 0, \quad \lim_{t\to\infty} t^{2\beta}u_t(x,t) = \psi(x), x > 0 \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini qaraymiz, bu yerda $\phi(x)$, $\psi(x)$ va $f(x,t)$ berilgan funksiyalar, $\alpha, \beta, \lambda, \mu$-haqiqiy o'zgarmas sonlar, $\alpha > 0$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ va $x_0 \geq 0$.

Ushbu masalasining yechimini

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{3}$$

yig'indi ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $v(x,t)$ funksiya

$$v_{tt}(x,t) + \frac{2\beta}{t}v_t(x,t) - \left(v_{xx}(x,t) + \frac{2\alpha}{x}v_x(x,t)\right) + \lambda^2 v(x,t) = \mu^2 v(x_0,t) + f(x,t), \quad v(x,t)|_{t=0} = 0, x \geq 0, \quad \lim_{t\to\infty} t^{2\beta}v_t(x,t) = 0, x > 0 \tag{4}$$

masalaning va $w(x,t)$ funksiya

$$w_{tt}(x,t) + \frac{2\beta}{t}w_t(x,t) - \left(w_{xx}(x,t) + \frac{2\alpha}{x}w_x(x,t)\right) + \lambda^2 w(x,t) = \mu^2 w(x_0,t), \quad w(x,t)|_{t=0} = \phi(x), x \geq 0, \quad \lim_{t\to\infty} t^{2\beta}w_t(x,t) = \psi(x), x > 0 \tag{5}$$

Koshi masalasining yechimidir.

(4) masalaning yechimini

$$v(x,t) = J_{0,\lambda}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} V(x,t) = \frac{4x^{1-2\alpha}t^{1-2\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^t \left(x^2-\xi^2\right)^{\alpha-1} \times \\ \times \left(t^2-\eta^2\right)^{\beta-1} \overline{J}_{\beta-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-\eta^2}\right) V(\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{6}$$

ko‘rinishida izlaymiz.

Ifodani Bessel funksiyasining xossalarini inobatga olgan holda, (4) masalaga qo‘yishdan quyidagi masalaga ega bo‘lamiz

$$V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} = \mu^2 V(x_0,\eta) + F(\xi,\eta), \\ V(\xi,\eta)|_{\eta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial \xi}\right|_{\eta=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial V}{\partial \eta}\right|_{\xi=0} = 0 \tag{7}$$

bu yerda

$$F(\xi,\eta) = \left(J_{0,\lambda}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^{-1} f(\xi,\eta) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{d\xi}\frac{d}{d\eta} \int_0^\xi \int_0^\eta \frac{\overline{I}_{-\beta}\left(\lambda\sqrt{\eta^2-s^2}\right)}{(\xi^2-s^2)^\alpha (\eta^2-k^2)^\beta} s^{2\alpha}k^{2\beta} f(s,k)dsdk.$$

Aytaylik, η_1 ga bog‘liq bo‘lgan $\chi(\xi,\eta,\eta_1)$ funksiya quyidagi

$$\chi_{\eta\eta} - \chi_{\xi\xi} = 0, \quad \eta > \eta_1, \tag{8}$$

$$\chi(\xi,\eta,\eta_1)|_{\eta=\eta_1} = 0, \ \left.\frac{\partial \chi(\xi,\eta,\eta_1)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1} = F(\xi,\eta_1) + \mu^2 \int_0^{\eta_1} \chi(\xi_0,\eta_1,\theta)d\theta. \tag{9}$$

qanoatlantirsin, u holda, $V(\xi,\eta)$ funksiya

$$V(\xi,\eta) = \int_0^\eta \chi(\xi,\eta,\eta_1)d\eta_1$$

(7) masalaning yechimi bo‘ladi.

Theorem 0.1 dan foydalangan holda (4) masalaning yechimini olamiz[3].

Xuddi shunday (5) masalaning yechimini ham (6) ifoda ko‘rinishida izlab, tenglama va shartlarga qo‘yamiz. Natijada, tenglama yarim chegaralangan sohadagi Koshi masalasi o‘tib qoladi. Bu masala yechimini davom ettirish usuli orqali topib (6) ifodadagi noma’lum funksiya o‘rniga qo‘ysak, (5) masalaning yechimini hosil qilishimiz mumkin bo‘ladi.

Adabiyotlar

1. Каримов Ш. Т. *Операторы Эрдейи-Кобэра и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных*// Дисс. доктора физ.-мат. наук. Фергана-2019.

2. Baltaeva U.I., Khasanov B.M *Cauchy problem for a loaded hyperbolic equation with the Bessel operator*// DOI: 10.1515/ms-2024-0090 Mathematica Slovaca 74(2024), №5, C. 1241-1254.

3. Urinov A., Karimov S. *Solution of the analogue of the Cauchy problem for the iterated multidimensional Klein-Gordon-Fock equation with the Bessel operator*// arXiv preprint arXiv:1711.00093. –2017.

Metrik Graflarda Issiqlik Tarqalish Tenglamasi Uchun δ' Ulanish Shartli Koshi Masalasi

Eshimbetov M. R.[1], **Ismoilova Sh. L.**[2]

[1]Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
mr.eshimbetov@nuu.uz

[2]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
shaxrixonismoilova0707@gmail.com

$\Gamma = U + V$ – bog'lamli metrik graf bo'lsin, bu yerda $E = \{b_j\}_{j=1}^{n}$ – to'plam grafning qirralari, $V = \{v_j\}_{j=1}^{m}$ – to'plam esa grafning uchlari. Har bir bog'lamga $(0, L_j), j = \overline{1,n}$ intervallarni mos qo'yamiz va har bir bog'lamda x_j koordinatani aniqlaymiz.

Agar b_j qirraning oxiri v uchdan iborat bo'lsa, u holda b_j qirra v uch bilan uchrashadi deymiz va buni $b_j \sim v$ kabi belgilaymiz. $\{b : b \sim v, b \in E\}$ to'plamning elementlari sonini v uchning valentligi deymiz. Agar uning valentligi 1 ga teng bo'lsa, u holda uni chegaraviy uchlari deyiladi. $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{m_1}\} = \partial \subset V$ – grafning chegraviy uchlari to'plami bo'lsin. Umumiylikka zarar yetkazmaslik uchun x_j ni x deb qabul qilamiz.

Grafning har bir bog'lamida issiqlik tenglamasini qaraymiz [2]-[3]:

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t) + f^{(j)}(x,t), \ x \in b_j, \ t > 0. \tag{1}$$

(1) tenglama quyidagicha boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin deb talab qilamiz:

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), j = \overline{1,n} \tag{2}$$

Qirralarni birlashtiruvchi nuqtalarda (ya'ni chegaraviy uchlarda emas) grafning uchlari quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

i. Barcha $\frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x}$ funksiyalarning v uchdan chiquvchi yo'nalish bo'yicha hosilalari qiymatlari $b_j \sim v$ uch bilan bir xil;

ii. Barcha $u^{(j)}(x,t)$ funksiyalarning har bir v uchdagi qiymatlari yig'indisi $b_j \sim v$ uchun nolga teng:

$$\sum_{b_j \sim v} u^{(j)}(x,t)\,|_\nu = 0, \ v \in V/\partial, \ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Bu shartlardan birinchisi, uchdagi yechimning uzluksizligi, ikkinchisi esa oqimning saqlash sharti deb ataladi. Bu shartlarni yana Kirxgoff shartlari ham deyiladi.

Grafning chegaraviy uchlarda quyidagicha:

$$u^{(j)}\ (x,t)|_v = g_0^{(j)},\ agar\ x_j = 0\ v\ uchda \tag{4}$$

$u^{(j)}\ (x,t)|_v = h_0^{(j)}(t)$, agar $x_j = L_j$, $v, b_j \sim v$ uchda shartlarni qanoatlantiruvchi $u^{(j)}(x,t)$ yechimlari topilsin.

Lemma. (1) – (4) masala ko‘pi bilan bitta regulyar yechimga ega.

Yagonalik lemmasi energiya integrallari usuli yordamida isbotlanadi [1]. Umumlashgan almashtirish usuli (Fokas usuli) yordamida berilganlarga nisbatan yagona yechimi topiladi [2]-[3].

Adabiyotlar

1. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2008., p: 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

3. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Fokas Method for the Heat Equation on Metric Graphs. 2024, Journal of Mathematical Sciences, 278, Pp. 530–545

Uchinchi Tartibli Karrali Harakteristikali Tenglama Uchun Nolokal Chegaraviy Masala Yechimining Mavjudligi Haqida

Xolboyev.S B.[1], **Mamaradjabova.H R.**[2]

[1]Denov Tadbirkorlik va Pedagogika Instituti, Denov, O’zbekiston,
[2]Termiz davlat universiteti, Termiz, O’zbekiston,
mamaradjabovahidoyat20002@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda biz chekli D sohada uchinchi tartibli karrali xarakteriskali noklassik tenglama uchun α masalaning yagonalik va mavjudlik teoremalarini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik quyidagi tenglama berilgan bo’lsin:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y). \tag{1}$$

Bu tenglamada umumiylikni buzmagan holda:$u(x,y) = v(x,y)exp(\frac{1}{2}\int_0^y b(x,t)dt)$ almashtirish yordamida

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x,y). \tag{2}$$

ko’rinishga keltirish mumkin. $b(x,y) \in C^{3,1}(\bar{D})$ shartni qanoatlantirishi talab qilinadi. Shuning uchun (1) tenglama o’rniga (2) dan foydalanish mumkin.

Masalaning qo’yilishi. (2) tenglamaning chekli $D = 0 < x < 1, 0 < y < 1$ sohaga $u(x,y) \in C^{2,1} \cap C^{3,2}(D)$ sinfdan (2) tenglamaning shunday yechimi topilsinki,u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$\alpha_0(x)u(x,0)+\alpha_1(x)u_y(x,0)=m_0(x) \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u(x,1)+\beta_1(x)u_y(x,1)=m_1(x), 0\le x\le 1 \tag{4}$$

$$\gamma_0(y)u(0,y)+\gamma_1(y)u_{xx}(0,y)=n_0(y) \tag{5}$$

$$\delta_0(y)u_1(1,y)+\delta_1(y)u_{xx}(1,y)=n_1(y), 0\le y\le 1 \tag{6}$$

$$u_x(1,y)=n_2(y), 0\le y\le 1) \tag{7}$$

bu yerda :$\alpha_i(x),\beta_i(x),\gamma_i(y),m_j(x),n_i(y),(i=0,1:j=0,1,2)$ berilgan uzluksiz funksiyalar. Shu bilan birga $\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0,\beta_0^2+\beta_1^2\neq 0,\gamma_0^2+\gamma_1^2\neq 0,\delta_0^2+\delta_1^2\neq 0$.

Yuqorida qo'yilgan masala yechimi yagonaligi[4] ga keltirilgan.Quyida masala yechimi mavjudligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 1. Agar $a_i(x,y)\in C^{i,0}(D), a_2(x,y)\le 0, a_0-\frac{1}{2}a_{2x}+\frac{1}{2}a_{2xx}\equiv c(x,y)\ge 0$ munosabat bajarilish bilan birgalikda quyidagi shartlar bajarilsa:$\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_1\neq 0$ u holda $\alpha_0\alpha_1\le 0,\beta_0\beta_1\ge 0,\delta_0\delta_1\le 0,\gamma_0\gamma_1\ge 0,-1\le\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-a_2(0,y),(-1)^i[a_1(i,0)-a_{2x}(i,y)+i]\ge 0, i=0,1$; qo'yilgan masala yechimi mavjuddir.

Teorema isboti quyidagi sxema bo'yicha bajariladi; Avval $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g(x,y)D$ tenglama uchun yordamchi masalaga tuzilgan Grin funksiyasidan foydalanib (2)-(7) qo'yilgan masala uchun Fredgolm tipidagi 2-tur integral tenglamalar sistemasiga keltiriladiki uning yechimining mavjudligi,isbotlangan yagonalik teoremasidan kelib chiqadi.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. Тихонов А.Н. А.А.Самароский Уравнения математической физики. Масква-1972.

2. Т.Д.Джураев Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов,Ташкент-1997, ФАН, С. 240 Т.1, №1. С. 1–5.

3. С.Абдиназаров Об одной красвой задаче для одного неклассического уравнения., Узб.мат.жур. Ташкент, №4, с: 3-13.

4. B.B. Jurayev, S.B.Xolboyev Bir turdagi uchunchi tartibli karrali harakteristikali tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining yagonaligi, Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiali to'plami I, Andijon, 22-mart 2022-yil, 41-43- betlar.

Uchinchi Tartibli Karrali Xarakteristikaga Ega Bo‘lgan Tenglamalar Uchun Metrik Graflarda Chegaraviy Masalalar

Sadullayeva G. U.[1], Eshimbetov J. R.[2], Saparbayev Z. S.[3]

[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent O‘zbekiston;
[2]Toshkent gumanitar fanlar universiteti, To‘rtko‘l, O‘zbekiston;
eshimbetovjurabek1990@gmail.com
[3]University of Business and Science, Toshkent O‘zbekiston;
saparbayev1603@gmail.com

Chekli uzunlikdagi kesmalardan tuzilgan va graf uchi deb nomlanuvchi berilgan O nuqtada birlashtirishdan hosil bo‘lgan sodda grafni qaraymiz. Grafning bog‘lamlarini B_j, $j = 1, 2, 3$ kabi belgilaymiz. B_1 bog‘lamni $(-L, 0)$ intervalga, B_2, B_3 ni $(0, L)$ intervallarga mos qo‘yib, har bir bog‘lamda koordinatani aniqlaymiz. Bunda graf uchi 0 ga mos qo‘yiladi.

Ushbu sodda grafning har bir bog‘lamida

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right) u_j(x_j, t) = f_j(x, t), t > 0, x_j \in B_j, j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Eyri tipidagi uchinchi tartibli karrali xarakteristikaga ega bo‘lgan tenglamani qaraymiz.

Grafning chekka nuqtalarida chegaraviy shartlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$u_1(-L, t) = \phi_1(t), u_2(L, t) = \phi_2(t), u_3(L, t) = \phi_3(t),$$

$$u_{1x}(-L, t) = \psi_1(t) 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Bizga har bir bog‘lamda aniqlangan $u_j(x_j)$ funksiyalarni 0 graf uchida bog‘lovchi shartlar zarur bo‘ladi. Bunday shartlarni odatda uzluksizlik va Kirxkoff shartlari deb yuritiladi. (1) tenglama uchun bu shartlarni quyidagicha aniqlash mumkin:

$$u_1(0; t) = a_2 u_2(0; t) = a_3 u_3(0; t) \tag{3}$$

$$u_{1x}(0, t) = c_2 u_{2x}(0, t) = c_3 u_{3x}(0, t) \tag{4}$$

$$u_{1xx}(0, t) = \frac{1}{a_2} u_{2xx}(0, t) + \frac{1}{a_3} u_{3xx}(0, t) \tag{5}$$

bunda $0 \le t \le T, T = const.$

Boshlang‘ich shartni quyidagicha aniqlaymiz

$$u_j(x, 0) = 0, x \in \overline{B_j}, (j = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Quyidagi skalyar ko‘paytma

$$(u, v) = \int_{-L}^{0} u_1 v_1 dx_1 + \int_0^L u_2 v_2 dx_2 + \int_0^L u_3 v_3 dx_3,$$

va $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ normani aniqlaymiz.

Teorema. Agar

$$\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2} \le 1, \phi_1(t) \in C^1[0, T]$$

bo‘lsa, u holda $u_t - u_{xxx} = f$, $v_t - v_{xxx} = g$ tenglamalar $u|_{t=0} = u_0(x)$, $v|_{t=0} = v_0(x)$, $0 \leq t \leq T$ boshlang‘ich shartlarni, (2) chegaraviy va (3) - (5) ulanish shartlarini qanoatlantirsin. U holda

$$\|u - v\|^2 \leq e^{\varepsilon T} \|u_0 - v_0\|^2 + \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)} \|f - g\|^2 d\tau$$

a-prior baho o‘rinli.

Lemma. Agar

$$\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2} \leq 1, \phi_1(t) \in C^1[0,T]$$

bo‘lsa, u holda (1) tenglamaning $u_k \in C\left((0,T],\, C^3(B_k)\right)$, $\frac{\partial u_k}{\partial t} \in C\left(B_k \times (0,T]\right)$, $k = 1,2,3$ sinfda (2)–(6) shartlarni qanoatlantiruvchi ko‘pi bilan bitta yechimi mavjud bo‘ladi.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. L.Cattabriga. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa a mat. Serie. №- 13(2), 1959.

2. Т.Д.Джураев Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент 1979.

3. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova. Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). 757-761.

4. D.Mugnolo, D.Noja and Christian Seifert Airy-type evolution equations on star graphs. arXiv:1608.01461v1 [math-ph] 2016.

Eyri Tipidagi Uchinchi Tartibli Tenglama Uchun Yulduzsimon Metrik Grafda Boshlang‘ich-Chegaraviy Masala

Sadullayeva G. U.[1], Eshimbetov J. R.[2]

[1]Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti, Toshkent O‘zbekiston;
[2]Toshkent gumanitar fanlar universiteti, To‘rtko‘l, O‘zbekiston;
eshimbetovjurabek1990@gmail.com

Ushbu sodda grafda Eyri tipidagi uchinchi tartirbli karrali xarakteristikaga ega bo‘lgan tenglama uchun chegaraviy masala qaraymiz.

Ma’lumki bu tenglama tor kanallarda suv to‘lqinlari, plazmalarda to‘lqin jarayonlari va shunga o‘xshash boshqa jaroyonlarni ifodalovchi nochiziqli Korteveg - de Friz tenglamasining chiziqli holatidir. Chiziqli, kuchsiz dispersiv uzun to‘lqinlarning asimptotik holati qaralganda biz o‘rganayotgan chiziqli tenglama hosil bo‘ladi.

Ikkita chekli kesma va bitta yarim to‘g‘ri chiziqni graf uchi deb nomlanuvchi bir nuqtada birlashtirishdan hosil bo‘lgan sodda yulduzsimon grafni qaraymiz.

K_1 **masala.** Γ grafning bog‘lamlarini $B_j, j = 1,2,3$ kabi belgilaymiz. B_1 bog‘lamni $(-1,0)$ intervalga, B_2 ni $(0,+\infty)$, B_3 ni $(0,L)$ intervallarga mos qo‘yib, har bir bog‘lamda koordinatani aniqlaymiz. Bunda graf uchi 0 ga mos qo‘yiladi.

Har bir bog‘lamda

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right) u_j(x_j,t) = f_j(x_j,t), \quad t > 0, \quad x_j \in B_j, \quad j = 1,2,3 \tag{1}$$

tenglamalarni qaraymiz.

Grafning chekka nuqtalarida chegaraviy shartlarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$u_1(-1;t)=\phi_0(t), u_{1x}(-1;t)=\phi_1(t), u_3(L;t)=\phi_3(t), \quad 0<t<T. \tag{2}$$

Bizga har bir bog‘lamda aniqlangan $u_j(x_j)$ funksiyalarni 0 graf uchida bog‘lovchi shartlar zarur bo‘ladi. Bunday shartlarni, odatda, uzluksizlik va Kirxkoff shartlari deb yuritiladi. (1) tenglama uchun bu shartlarni quyidagicha aniqlash mumkin:

$$u_1(0;t)=a_2u_2(0;t)=a_3u_3(0;t) \tag{3}$$

$$u_{1x}(0;t)=b_2u_{2x}(0;t)=b_3u_{3x}(0;t) \tag{4}$$

$$u_{1xx}(0;t)=a_2^{-1}u_{2xx}(0;t)+a_3^{-1}u_{3xx}(0;t) \tag{5}$$

bunda $0<t<T$, $T=const$, $x_l\to+\infty$ da $u_2, u_{2x}\to 0$, $|u_{2xx}|<M$.

Boshlang‘ich shartni quyidagicha aniqlaymiz

$$u_j(x,0)=0, x\in\overline{B_j}, (j=1,2,3). \tag{6}$$

Yuqoridagi masalani odatda signal masalasi deb atashadi. Oddiy signal masalasidan farqli ravishda bizda B_3 kesmaning oxirida qo‘shimcha signalni qabul qiluvchi o‘rnatilgan.

K_1 **masala** uchun yagonalik teoremasi:

Teorema 1. Agar

$$\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_3^2}\le 1, \phi_1(t)\in C^1[0,T]$$

bo‘lsa, u holda (1) tenglamaning $C^1([0,T],C^3(\Gamma))$ sinfda (2) - (6) shartlarni qanoatlantiruvchi ko‘pi bilan bitta yechimi mavjud bo‘ladi.

Isboti. $\phi_0(t)=0$, $\phi_3(t)=0$ bo‘lsin. (1) tenglamadan quyidagi munosabatni hosil qilamiz

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u_j^2(x,t)dx=(2u_ju_{jxx}-u_{jx}^2)|_a^b+2\int_a^b f_j(x,t)u_j(x,t)dx.$$

Bu munosabatdan

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\varepsilon t}\|u\|^2\right)\le e^{-\varepsilon t}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2+\phi_1^2(t)\right)$$

yoki

$$\|u\|^2\le\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\|f(\cdot,\tau)\|^2+\phi_1^2(\tau)\right)d\tau \tag{7}$$

Bunda skalyar ko‘paytma

$$(u,v)=\int_{-1}^0 u_1v_1dx_1+\int_0^{+\infty}u_2v_2dx_2+\int_0^L u_3v_3dx_3,$$

norma esa $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$ kabi aniqlangan. (7) bahodan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Teorema 2 (Mavjudlik). Agar

$$a_2b_2-a_3b_3+b_2b_3\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)\ne 0,$$

$\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_3^2}\le 1$, $\phi_0(t)\in C^2[0,\ T]$, $\phi_1(t)\in C^1[0,T]$, $\phi_3(t)\in C[0,T]$ bo‘lsa, u holda (1) - (6) masala $C^1([0,T],C^3(\Gamma))$ sinfda yagona yechimga ega bo‘ladi.

Mavjudlik teoremasini potensiallar usuli yordamida isbotlaymiz.

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. L.Cattabriga. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa a mat. Serie. №- 13(2), 1959.

2. Т.Д.Джураев Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент 1979.

3. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova. Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). 757-761.

Bussinesk Tipidagi Differensial Tenglama Uchun Nolokal Masalaning Yechimi Haqida

Xalmuxamedov A.R.[1], **Kuchkorov E.I.**[1], **Xudoyberdiyev A.A.**[2]

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
khalmukhamedov@gmail.com[1]

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
e_kuchkorov@mail.com[2]

Toshkent Davlat Texnika universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
abdusalomxudoyberdiev1995@gmail.com[3]

$\Omega \subset R^n$ chegaralangan, chegarasi $\partial\Omega$ silliq bo'lgan soha va $T > 0$ bo'lsin. $\Omega \times (0, T)$ silindrda quyidagi tenglamani qaraylik

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \nu^2 \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

bu yerda ν musbat son, A operator $-\Delta$ – Laplas operatorining o'z-o'ziga qo'shma musbat kengaytmasi bo'lsin: $Au = -\Delta u$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(Au, u) \geq \mu(u, u),\ \mu > 0,\ u \in D(A).$$

Faraz qilaylik A operatorning teskarisi A^{-1} kompakt operator bo'lsin. Quyidagi nolokal shartni qaraymiz

$$u(x, 0) = u(x, T), \tag{2}$$

$$\int_0^T t u_t(x, t) dt = \phi(x). \tag{3}$$

$u(x, t)$ funksiya (1), (2) va (3) masalaning yechimi deyiladi agar bu funksiya :

1) $0 \leq t \leq T$ dagi har bir t uchun $D(A)$ sohaga tegishli va bu oraliqda t ga nisbatan $L_2(\Omega)$ fazoning normasida uzluksiz;

2) $Au(x, t)$ bilan birga $L_2(\Omega)$ ning normasi bo'yicha $0 < t < T$ ochiq intervalda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi;

3) (1) tenglamani, hamda (2),(3) shartlarni qanoatlantirsa.

O'z-o'ziga qo'shma A operatorning xos funksiyalari $\{\upsilon_k(x)\}$ va xos sonlari $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ bo'lsin:

$$A\upsilon_k(x) = \lambda_k \upsilon_k(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

bunda $\mu \le \lambda_1 \le \lambda_2 \cdots \le \lambda_k \to +\infty$. Ixtiyoriy $\phi \in L_2(\Omega)$ funksiyaning spektral yoyilmasi

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \upsilon_k(x), \quad \phi_k = (\phi, \upsilon_k).$$

(1) tenglama Bussinesk tipidagi tengalama deyiladi va u chiziqli bo'lmagan Bussinesk tenglamasining chiziqlashtirilgan holidir [1]. Bu kabi tenglamalar uchun turli nolokal masalalarni o'rganishga bir qator ilmiy maqolalar bag'ishlangan [2-6] bo'lib, usbu ishda [2],[3] lardagi metodlarni (3) nolokal shart bo'lgan holida mavjudlik va yagonalik shartlarini aniqlashda qollaymiz.

$\theta(\nu) = \frac{\nu T}{2\pi}$ belgilab, quyidagi to'plamlarni kiritamiz:

$$\Lambda_1 = \Lambda_1(\nu) = \{\lambda_j \in Sp(A) : \nu_k T \cos\frac{\nu_j T}{2} - 2\sin\frac{\nu_j T}{2} = 0\},$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_2(\nu) = \{\lambda_j \in Sp(A) : \frac{\nu_j T}{2\pi} \in N\},$$

$$L_1(\nu) = \{\varphi |\, \varphi = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_1(\nu)} c_k \upsilon_k(x)\}, \quad L_2(\nu) = \{\varphi |\, \varphi = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_2(\nu)} c_k \upsilon_k(x)\}.$$

Shuni ta'kidlash joizki, $dim\, L_1(\nu) = N_1(\nu) < \infty$ va $dim\, L_2(\nu) = N_2(\nu) < \infty$.
$L^{\perp}(\nu)$ orqali $D(A)$ ga tegishli va $L_1(\nu)$ va $L_2(\nu)$ to'plamlarga ortogonal bo'lgan funksiyalar to'plamini belgilaymiz: $L^{\perp}(\nu) = D(A) \ominus L_1(\nu) \ominus L_2(\nu)$.

Teorema 1. Faraz qilaylik, $0 < \theta(\nu) < 1$, $\phi \in D(A)$ bo'lsin. U holda (1), (2), va (3) masalaning yechimi mavjud va yagona.

Endi $P(\nu)$ operator $L_1(\nu) \oplus L_2(\nu)$ qism fazoga ortogonal proeksiyalash operatori bo'lsin. Quyidagi qo'shimcha shartlarni kiritamiz:

$$P(\nu)u(x,0) = 0, \quad P(\nu)u_t(x,0) = 0. \tag{5}$$

Quyidagi teoremalarda yechimning mavjudligi va yagonaligini ta'minlash uchun ϕ funksiya qoshimcha shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi.

Teorema 2. Faraz qilaylik $\theta(\nu) > 1$ va $\theta(\nu) \notin N$ bo'lsin. U holda, har bir $\phi \in L^{\perp}(\nu)$ uchun (1),(2) va (3) masalaning (5) qo'shimcha shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona.

Teorema 3. Faraz qilaylik, $\theta(\nu) \in N$, $\phi \in (D(A^2) \cap L^{\perp}(\nu))$ bo'lsin. U holda, (1), (2) va (3) masalaning (5) shartni qanoatlantiradigan yechimi mavjud va yagona.

Adabiyotlar

1. J. Boussinesq, Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, J. de Mathematiques Pures et Appliques. Deuxиme Serie 17, 55–108 (1872).

2. Alimov Sh., Khalmukhamedov A., "On a Non-Local Problem for a Boussinesq Type Differential Equation ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №. 4, pp. 916-923.

3. А. Р. Халмухамедов, Э. И. Кучкоров, О разрешимости одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения типа Буссинеска, Изв. вузов. Матем., 2023, номер 10, 60 – 69.

4. T. K. Yuldashev, Mixed differential equation of a Boussinesq type, Vestnik Volgograd. Gos. Universiteta, Seriya 1, Matem., Fizika **2** (33), 13–26 (2016)

5. R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, M. U. Khudoykulova, On a non-local problem for a fractional differential equation of the Boussinesq type, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, **115** (2), 34–45 (2024).

6. Kh. T. Dekhkonov, Yu. E. Fayziev, and R. R. Ashurov, On the Non-local Problem for a Boussinesq Type Equations, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**, (3), 1023–1031 (2024).