Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti

O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filiali

Gent “Analiz va xususiy hosilali tenglamalar” markazi (Belgiya)

“Science and innovation” xalqaro ilmiy jurnali

MATEMATIK FIZIKANING ZAMONAVIY USULLARI VA ULARNING TADBIQLARI

akademik Sh.A. Alimov tavalludining 80 yilligiga bag‘ishlangan respublika ilmiy anjumani

Toshkent shahri, 22-24-aprel, 2025 yil

MA’RUZALAR TEZISLARI

II TOM

======== ♢ ========

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте

Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Бельгия)

Международный научный журнал “Science and innovation”

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова

Ташкент, 22–24 апреля, 2025 год

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

ТОМ II

УДК 517.5 + 517.95 + 517.97 + 517.98 + 517.958 +517.968 + 519.6.

«Современные методы математической физики и их приложения»: Тезисы докладов республиканской научной конференции посвященной 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова (22–24 апреля 2025 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во «Маърифат». 2025. 379 с.

Данный сборник содержат научные доклады участников международной научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения» по следующим направлениям: Спектральная теория дифференциальных операторов, Краевые задачи для уравнений математической физики, Дифференциальные уравнения дробного порядка, Современные проблемы алгебры и геометрии, Теория функций, Теория вероятностей и математическая статистика, Математическое моделирование и вычислительная математика.

Данная конференция организована на основании распоряжения 72–Ф Кабинета Министров Республики Узбекистан от 13 февраля 2025 года, приказом №490 министра высшего образования, науки и инновациям Республики Узбекистан от 27 декабря 2024 года и приказом №01–23 ректора Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека от 22 января 2025 года.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

профессор **Арипов М.М.**	профессор **Ашуров Р.Р.**
профессор **Зикиров О.С.**	профессор **Артикбаев А.**
профессор **Джамалов С.З.**	профессор **Файзиев Ю.Э.**
профессор **Халмухамедов А.Р.**	профессор **Хаётов А.Р.**
профессор **Фаязов К.С.**	профессор **Шоимкулов Б.А.**

Ответственные за выпуск:

д.ф.-м.н., доцент **Собиров З.А.**
к.ф.-м.н., доцент **Эшимбетов М.Р., Хушвактов Н.Х., Шокиров А.А.**

За содержание и оригинальность тезисов, представленных в данном сборнике, ответственность несут авторы этих работ.

© *Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2025*

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Маджидов И.У. – председатель, ректор НУУз.,
Аюпов Ш.А. – сопредседатель, директор ИМ АН РУз.,
Ашуров Р.Р. – зам. председателя, зав. отделом ИМ АН РУз.,
Зикиров О.С. – зам. председателя, декан Математического Факултета НУУз.

Члены организационного комитета

Арипов М.М. (Узбекистан), Ашыралиев А. (Туркменистан),
Бердышев А.С.(Казакстан), Ворисов А.К. (Узбекистан),
Джамалов С.З. (Узбекистан), Исломов Б.И. (Узбекистан),
Карачик В.В. (Россия), Касимов Ш.Г. (Узбекистан),
Мамадалиев Н. (Узбекистан), Маматов М.Ш. (Узбекистан),
Мирсабуров М. (Узбекистан), Рахимов А.А. (Узбекистан, Малайзия),
Рузиев М. (Узбекистан), Садыбеков М.А. (Казакстан),
Тахиров Ж.О. (Узбекистан), Турметов Б.Х. (Казакстан),
Хасанов А.К. (Узбекистан), Хасанов А.Б. (Узбекистан).
Хашимов А.Р. (Узбекистан).

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:

Алимов Ш.А. – академик АН РУз. (Ташкент, Узбекистан),

Заместители председателя:

Халмухамедов А.Р. – зав. кафедрой, НУУз (Ташкент, Узбекистан),
Сайдаматов Э.М. – исполнительный директор, Филиал МГУ в г.Ташкенте (Ташкент, Узбекистан),
Ружанский М.В. – профессор, Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Гент, Бельгия),

Члены программного комитета

Азамов А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Гольдман М.Л. – профессор (Россия),
Икромов И.А. – профессор (Узбекистан),
Ишанкулов Т.М. – профессор (Узбекистан),
Кабанихин С.И. – член-корреспондент РАН (Россия),
Кальменов Т.Ш. – академик НАН РК (Казахстан),
Каримов Э.Т. – профессор (Узбекистан),
Кожанов А.И. – профессор (Россия),
Лакаев С.Н. – академик АН РУз (Узбекистан),
Ломов И.С. – профессор (Россия),
Мирахмедов Ш.А. – профессор (Узбекистан),
Отелбаев М. – академик НАН РК (Казахстан),
Псху А.В. – профессор (Россия),
Раджабов Н.Р. – академик АН Таджикистана (Таджикистан),
Розиков У.А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Садуллаев А. – академик АН РУз (Узбекистан),
Собиров З.А. – доцент (Узбекистан),
Солдатов А.П. – профессор (Россия),
Умаров С.Р. – профессор (США, Узбекистан),
Уринов А.К. – профессор (Узбекистан),
Фаязов К.С. – профессор (Узбекистан),
Хаджиев Дж. Х. – академик АН РУз (Узбекистан),
Хусанбаев Я.М. – профессор (Узбекистан),
Часовских А.А. – профессор (Россия),
Шарипов О.Ш. – профессор (Узбекистан),
Ягола А.Г. – профессор (Россия).

Секретариат конференции

Файзиев Ю.Э., Шералиев Ш.Н., Дехканов Ф.Н., Мухиддинова О.Т.,
Шакарова М.Д., Сулаймонов И.А., Абдуллаева Ф.С., Жумаева Ш.Ф., Фаязова З.

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз.;

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте;

Гентский центр «Анализ и уравнения с частными производными» (Бельгия);

Международный научный журнал “Science and Innovation”.

КОНФЕРЕНЦИЯ ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

Математического общества Узбекистана;

Central Asian University;

Сеть супермаркетов «Корзинка».

СОДЕРЖАНИЕ

Академик Алимов Шавкат Арифджанович 22

СЕКЦИЯ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
SECTION 3. DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Ashurov R.R., Shakarova M.D.
Space-Dependent Source Identification Problem For The Subdiffusion Equation With A Non-Local In Time Condition 23

Ashurov R.R., Mukhiddinova O.T.
Forward And Inverse Problems For The Rayleigh-Stokes Equation 24

Ashurov R. R., Sulaymonov I. A.
Monotonicity In The Parameter Of The Mittag-Leffler Function And Determining The Fractional Exponent Of The Subdiffusion Equation 25

Durdiev D. K., Turdiev H. H.
Inverse Coefficient Problem For A Full Fractional Diffusion-Wave Equation With The Caputo Time Derivative 26

Fayziev Yu. E., Jumaeva Sh. F., Chorieva G. H., Giyosova F. U.
On The Cauchy Problem For The Langevin-Type Fractional Equation 27

Husanov E. A.
On The Forward And Inverse Problems In Fractional Derivative Equations Of Benney-Luke Type 28

Jumaev J. J.
The Inverse Problem for a Multidimensional Integro-Differential Parabolic Equation with Nonlocal Initial-Boundary Conditions 30

Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M.
On A Forward Problem Linked With The Wave-Diffusion Process 31

Khasanov Sh.
On A Problem For Sub-Diffusion Equation With The Caputo-Type Katugampola-Prabhakar Fractional Derivative 33

Ashurov R.R., Fayziyev Yu.E., Khushvaktov N.Kh.
Non-Local Time Problem For The Barenblatt-Zheltov-Kochina Type Fractional Equations 35

Kosmakova M.T., Akhmanova D. M.
On A Bvp For The Heat Equation With A Loaded Term As A Fractional Derivative 36

Dekhkonov F. N., Kuchkorov E. I.
On The Control Problem For A Pseudo-Parabolic Equation With Caputo Fractional Derivative 38

Mambetov S.
Initial-Boundary Value Problems To The Time-Space Nonlocal Diffusion Equation 39

Mirzagiyosova S. M.
Unique Solvability Of An Initial Boundary Value Problem For A Fourth Order Partial Differential Equation That Degenerates On The Boundary Of The Domain 40
Mukhiddinova O., Abdullayeva F.
Forward Problems For Fractional Wave Equation 42
Sobirov Z. A., Narziyeva I. A.
Inverse Source Problem For The Time-Fractional Parabolic Equation On Metric Graphs With Final Overdetermination Condition 44
Rahmonov A. A.
Inverse Source Problems For The Time-Fractional Diffusion-Wave Equation 45
Fayziev Yu. E., Sadullaeva Sh. Sh.
The Direct And Inverse Problems For The Fractional Equation With The Hilfer Derivative 46
Saparbayev R.
Existence And Uniqueness Of A Time-Dependent Coefficient And Source Problem For Fractional Telegraph Equation 48
Shaimardan S.
Application Of L^p-L^q Boundedness Of Fourier Multipliers To Heat-Type Equation On Non-Commutative Euclidean Space 49
Abhishek Tiwari, Shashank Pathak
A Tutorial On Fractional Burger Model For Tunnel Design 51
Sobirjonova M. K.
A Mixed Problem For A Fourth-Order Partial Differential Equation With Two Degeneracy Lines 53
Suleman I. A., Kirane M.
Global Solutions Of A Fractional Wave Equation 55
Usmonov D.A., Tokhirjonov U.R.
Initial-Boundary Value Problem For A Partial Differential Equation Containing Integro-Differential Operator With Bessel Function In The Kernel 56
Turdiev Kh. N.
Time-Dependent Inverse Source Problem For A Generalized Telegraph Equation With The Prabhakar-Caputo Fractional Derivative 57
Sobirov Z. A., Turemuratova A. A., Kulaev R. Ch.
Fractional Sturm–Liouville Problem On Metric Graphs 58
Van Bockstal K.
Well-Posedness Time-Fractional Subdiffusion Equation Of Time-Dependent Piecewise Constant Order 59
Hasanov A., Yuldashova H.A.
Solution Of The Cauchy Problem For An Equation Containing Regularized Fractional Derivatives Of Prabhakar 60
Ахмадов И. А.
Краевая Задача С Начальными Условиями Для Диффузионного Уравнения Дробного Порядка С Оператором Герасимова-Капуто С Кусочно-Постоянными Коэффициентами 62
Бойназаров А. Н.
Композиция Операторов Эрдейи-Кобера Дробного Порядка И Левосторонной Дробной Производной Бесселя На Полуоси 64
Эфендиев Б. И.
Задача Ильина–Моисеева Второго Рода Для Обыкновенного Дифференциального Уравнения Второго Порядка С Оператором Нахушева 65

Хужаёров Б.Х., Зокиров М.С.
Модель Плоскорадиальной Фильтрации Жидкости В Пористой Среде С Дробными Производными 67
Иргашев Б. Ю.
Задача Типа Дирихле Для Вырождающегося Уравнения Высокого Порядка С Дробной Производной 69
Касимов Ш.Г., Кощанов А.П.
Об Однозначной Разрешимости Многомерной Начально–Граничной Задачи Для Уравнения Высокого Порядка С Дробной Производной В Смысле Миллера–Росса В Классах Соболева 70
Мамчуев М. О.
Задача Коши Для Системы Дробных Диффузионно-Волновых Уравнений 72
Паровик Р. И.
Решение Нелокальной Краевой Задачи Диффузионно-Конвективного Переноса Радиоактивных Веществ В Системе Литосфера-Атмосфера 73
Псху А. В.
Об Условиях Переопределения В Обратных Задачах Определения Порядка Для Уравнения Дробной Диффузии 75
Реймбаева Д.К.
Об Однозначной Разрешимости Многомерной Задачи Колебаний Пластин С Дробными Операторами Миллера–Росса, В Случае С Заделанными И Шарнирно Закрепленными Условиями В Классах Соболева 76
Турдиева К. О.
Спектральная Задача Для Вырождаюшегося Дифференциального Уравнения Эллиптического Типа 78
Усманов К. И., Назарова К. Ж.
Разрешимость Краевой Задачи Дифференциальных Уравнений Дробного Порядка С Инволюцией 79
Усмонов Д. А., Омонова А. Н.
Об Одной Задаче Для Вырождающегося Интегро-Дифференциального Уравнения Второго Порядка 80
Федоров В. Е., Вершинина Д. А.
Уравнения С Производной Римана– Лиувилля И Принцип Субординации 81
Фозилов М. Н., Усмонов Д. А.
Задача Типа Гурса Для Дифференциального Уравнения В Частных Производных Третьего Порядка 84

СЕКЦИЯ 4. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ
SECTION 4. MODERN PROBLEMS OF ALGEBRA AND GEOMETRY

Ayupov Sh. A.
2-Local Derivations And Automorphisms On Von Neumann Algebras And $\mathbb{C}^*$-Algebras 86

Abdalieva P.K., Shambetova B.K.
Modern Problems Of Algebra And Geometry In The Context Of Interdisciplinary Connections With Physics: Approaches To Integrating Mathematical Knowledge And Modeling In School Education 86

Abdumannonov A.I., Mukhamadiev F.G.
A Note Some Classes Of Topological Spaces 88

Atajanov X. O., Yusupov B. B.
Anti-Derivations On The Perfect Lie Algebras $\mathfrak{L}^m$ 90

Azizov M.E.
Anti Rota-Baxter Operators On 4-Dimensional Filiform Lie Algebras 92

Berdalova X. R., Toshtemirova F. A.
Description Of 4-Dimensional Transposed Poisson Algebras Which Are Constructed By A Null-Filiform Algebra 94

Juraev R. M., Mirkomilova N. Z., Isaev S. U.
On Hyperspaces Of Extremal Topological Spaces 95

Choriyeva I.B.
Classification Of Symmetric Leibniz Algebras Associated With Split Quasi-Filiform Lie Algebra 97

Maxsatulloyeva Feruza Maxmud qizi
Analytical And Computational Study Of Geodesics On The Pseudosphere 99

Mizomov I. E.
The Identity Of The Elliptic Theta Functions Of Order Five 101

Mukhamadiev F. G., Abdumannonov A. I.
On Selection Principles In The n-Fold Symmetric Product Of The Space X 102

Narmanov A. Y., Ergashova Sh. R.
On The Geodesic Flow On SO(3) 103

Saitova Sayyora
On Controllability By Means Of Two Killing Vector Fields On Spheres 105

Saydaliyev A.R.
Irreducible Components Of Four-Dimensional Jordan Superalgebras 107

Shamshiddinova M. I., Usmonov J. B.
On A Set Of The Fixed Points Of A Non-Stochastic Operator 108

Sheraliyeva S. A.
One-Dimensional Abelian Extension Of Five-Dimensional Solvable Leibniz Algebras 109

Tashpulatov S.M.
Three-Magnon System In The Hiesenberg Model 111

Tillayev D. R.
Reconstruction Of A Singly Connected Surface Based On Its Extrinsic Curvature 113

Sharipov A. S., Topvoldiyev F. F.
Restoration Of The Polyhedra By Conditional External Curvature 115

Turdibaev R. M.
Invariants Of Anti-Commuting Pairs Of Matrices 117

Alauadinov A. K., Jumaniyozov D. E., Yusupov B. B.
Local Derivations On The n-th Schrödinger Algebra 118

Zhanakunova Meerim Orozobekovna, Askarbek Kyzy Lira
Modern Problems Of Algebra And Geometry: A More Detailed Look 119

Абраев Б. Х., Ишкобилова А. Б.
О Количестве Представлении Натурального Числа Суммой Степеней Простого Числа 121

Аллаков И., Имамов О. Ш.
Асимптотическая Формула Для Количества Представления Натурального Числа В Виде Суммы Квадратов Четырёх Простых Чисел 123

Бердимуратова Ш. К.
Абелевы W*-Алгебры 125

Бешимов Р. Б., Манасыпова Р. З.
О Некоторых Свойствах Пространства τ-Замкнутых Подмножеств Пространства X 126

Эрдонов Б. Х.
О Решении Системы Линейных Диофантовых Уравнений В Простых Числах 127

Жузбаев Н.О.
О Подгруппах Симплектических Групп 129

Муминов К. К.
Эквивалентность Путей Относителью Действия Группы $SO(2l+1, K)$ 130

Нарманов А. Я., Шарафиддинов Р. С.
Алгебраическая И Геометрическая Раскрытости Множества Мнимого Пространства 132

Sultanov B.M., Mahmudova N.O., Bektemirova X.D.
Galiley Fazosida Parallel Sirtlar Va Ularning Geometriyasi 134

СЕКЦИЯ 5. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
SECTION 5. FUNCTION THEORY

Abdullayev F.G.
On The Behavior Of Algebraic Polynomials In Unbounded Regions 136
Alimkulova M. Kh., Azizov A. N.
An Abstract Characterization Of Schatten's Ideal $\mathcal{C}_p$ 137
Kuliev K.D., Eshimova M.K.
On The Conservation Of Classical Hardy Inequality's Constant 138
Eshmetova S. D.[1], **Xolturaev I. M.**
On Quadratic b-Bistochastic Operators 140
Husenov B. E., Oripova S. Q.
Riesz's Theorem For $A(z)$-Analytic Functions 141
Ikromov I. A., Sugimoto M.
On The Sharp Estimates For Convolution Operators Related To Some Non-Convex Hypersurfaces 143
Ishankulov T.
Continuation Of m - Analitic Functions Of Several Complex Varables 146
Egamov D.O., Karshiboev O.Sh.
The Ground States For The Mixed Type Spin-1 And Spin-2 Ising Model On The Binary Tree 148
Khakimov R.M., Bozorqulov A.A.
On Weakly Periodic Gibbs Measures For The HC Model With A Countable Set Of Spin Values 150
Khakimov R.M., Mutalliyev N.N.
Translation Invariant Gibbs Measures For One Model 152
Khatamov N.M., Kodirova M.A.
Translation-Invariant Gibbs Measures for the Blume-Capel Model 154
Jamilov U. U., Kholikova F. Q.
Discrete-Time Dynamics Of A Svir Model 157
Kuldoshev K. K.
Weighted $(m, \psi)-$Capacity $C_m(K, D, \psi)$ Of A Condenser (K, D) 159
Makhammadaliev T. M., Karshiboev Sh. O.
The Hard-Core Model On The Closed Cayley Tree With Branching Ratio Two: An Exactly Solvable Case 161
Mansurkhujayev A. M., Boxonov Z. S.
Fixed Points Of A Non-Stochastic Quadratic Operator 163
Yakhshiboev M.U., Karimov M.
On Local Fractional Integro-Differentiation 165
Shoimkulov B.A., Ne'matillayeva M.D.
On The Interpolation Problem For Bounded $A(z)$-Analytic Functions 167
Norkuchkarov Kh. A., Boxonov Z. S.
Local Behavior Of A Non-Volterra Quadratic Operator On S^2 168

Ozbekbay B.O.
Spectrum Of The Generalized Cesàro Operator On Rearrangement Invariant Spaces 170

Rahmatullaev M. M., Tukhtabaev A. M.
Gibbs Measure For Mixed Spins And Mixed Types Model 170

Rahmatullaev M. M., Rasulova M. M.
Configurations For Limiting Gibbs Measures Of The Potts-Sos Model 172

Rasulova M. M., Hakimova M. A.
$G_3^{(2)}$-Periodic Ground States For The Chui-Weeks Model 174

Shoyimardonov S. K., Sadullayeva S. G'.
Invariant Set for Operator Modeling Phytoplankton-Zooplankton Interactions 176

Rozikov U.A., Solaeva M.N.
A Quadratic Stochastic Operator On 5-Dimensional Simplex 178

Tastankul R. A., Tulenov K. S.
$L^p - L^q$ Fourier Multipliers On Non-Commutative Torus And Its Applications 179

Oinarov R., Temirkhanova A. M.
Weighted Norm Inequalities For Matrix Operators With $1 < q < p < \infty$ 180

Tukhtasinova N. A., Boxonov Z. S.
Fixed Points And Their Stability In Mosquito Evolution Models 181

Tukhtasinov T.T.
Metrizability Of m-Measurable Operators Of Affiliated Of Real W*-Algebra 183

Jamilov U. U., Tursunov O. E.
Discrete-Time Dynamics Of An Epidemic Sir Model 185

Umurova Sh. U., Khakimov O. N.
On p-Adic Ising Mapping And Its Dynamics 187

Urolboeva A. I., Khakimov O. N.
p-Adic $(2, 2)$-Rational Function And Its Dynamics 188

Асташкин С. В., Лыков К. В.
Случайная Безусловная Сходимость Хаоса Радемахера В L_∞ И Ее Приложения В Теории Графов 190

Балтабаева М. О.
Интерполяционная Последовательность В Некоторых Матричный Областях 190

Бокаев Н. А., Гогатишвили А., Кузеубаева Н. К.
Весовые Неравенства Для Дискретного Оператора Харди 192

Душамов А. О., Курбанов К. С.
Свойства Автоморфизмов Матричной Верхней Полуплоскости 193

Даужанов А.Ш., Омаров Т.М.
Точки Лебега В Современных Исследованиях В Области Теории Функций 195

Садуллаев А.
Непрерывность Гессианов В Классе Ограниченных $m-$ Выпуклых Функций 197

Хакимов Р. М., Куйсиналиев Ш. Ш.
О Новых Условиях Единственности Слабо Периодической Меры Гиббса Для НС Модели 197
Ходжиев Б.Г.
О Мерах Гиббса Для Модели SOS С Конкурирующими Взаимодействиями Блюма-Капеля На Дереве Кэли 199
Хусенова Ж. Т.
Соотношение Для Числовой Области Значений Модели Фридрихса С Трехмерным Возмущением 201
Шарипов Р. А.
Смешанные Гессианы В Классе m-Выпуклых Функций 203
Erkinboyev Q. S., Ibrohimova M. H.
Birinchi Tip Klassik Soha Avtomorfizmlari Xossalarining Tatbiqlari 205
Ibrohimova M. H., Jumaboyev R. SH., Erkinboyev Q. S.
$B^{(2)}_{m,n}$ Matritsaviy Shar Avtomorfizmlarining Ba'zi Xossalari 206
Maxamadiyeva A.Sh.
Maxsus Veyl Sohasida Lokal Qoldiqning Bir Ko‘rinishi 208
Maxamadiyeva A.Sh.
$\mathbb{C}^2$ Fazodagi Veyl Sohasida Lokal Qoldiqning Xossalari 209
Muminov Z. I., Quljonov O‘. N.
Ikki Zarrachali Diskret Shryodinger Operatorining Quyi Spektri Haqida 210
Zarifova D.B.
$\Re_{IV}$-Tip Klassik Sohaning Hajmi Haqidagi Teorema 212

СЕКЦИЯ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
SECTION 6. PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Ganikhodjaev N.N.
Phase Diagram Of The 1-d Ising Model With Competing Interactions Up To The Third-Nearest-Neighbour 214
Khusanbaev Ya.M.
The Conditional Limit Theorem For Critical Reduced Process Possibly With Infinite Variance 215
Lazareva V., Mirakhmedov Sh.
The Central Limit Theorem For Sum-Functions Of m-tuples Of Spacings 216
Mirakhmedov Sh., Hamdamov A.
Approximation By A Normal Distribution In An Infinite Balls-In-Boxes Occupancy Scheme 218
Nazarov Z.A., Ismoilova M.O.
The Problem Of Nuclear Temperature Dynamics For Stochastic Differential Equations 220
Ruzieva D.S.
Law Of Large Numbers For Random Fields With Values In $l_p (1 \leq p \leq 2)$ 222
Sharipov O.Sh., Muxtorov I.G‘.
Laws Of Large Numbers For Mixing Random Variables With Values In $L_p[0,1]$ 223
Sharipov S.O.
Strong Law Of Large Numbers For Random Walks In Weakly Dependent Random Scenery 225
Зупаров Т.М., Жовлиев А.И.
Центральная Предельная Теорема Для Авто Регрессионного Процесса 1 – Порядка С Случайным Параметром 226
Azimov J. B., Tursunova S. O.
Uzluksiz Vaqtli Va Migratsiyali Tarmoqlanuvchi Tasodifiy Jarayon Uchun Limit Teorema 228
Aripov M. M., Djabbarov O. R., Xasanov J. O., Nizomiddinova G. S.
Dempfir Hadiga Ega Ikki Karra Nochiziqli Parabolik Tenglamalar Sistemasi Yechimining Sifat Xossalari 230
Qurbonov H., Bozorova O‘.
$\overline{GJ}|M|1|N-1$ Sistema Statsionar Navbat Uzunligi Taqsimoti Va $M|G|1|k$ $(k = \overline{0,N})$ Sistema Bandlik Davri O‘Rta Qiymati O‘Rtasida Ikkilanma Munosabat 231
Sulaymonova E.M.
Holatga Bog‘liq Immigratsiyali Tarmoqlanuvchi Jarayon Uchun Limit Teoremada Yaqinlashish Tezligi Bahosi Haqida 233

СЕКЦИЯ 7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
SECTION 7. MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Четверушкин Б.Н.
Кинетические Модели Для Решения Задач Механики Сплошной Среды 235

Уржумцев А. Г.
Структурная Биология: От Математики К Физике И Обратно 235

Aptekarev A. I.
Shocks In Hele-Shaw Flow, Normal Random Matrices Ensembles And The Multiple Orthogonal Polynomials 237

Aripov M. M., Bobokandov M.
Analysis Of Double Nonlinear Parabolic System With A Time-Dependent Source 238

Aripov M. M., Matyakubov A. S., Mamatov A. U.
Mathematical Modeling Of Nonlinear Problem Of Reaction-Diffusion Processes With Variable Density 240

Abdullaev A. Kh., Tilavov A.M.
On The Accuracy Of Approximate Solution Scheme Based On The Taylor Formula For A Cauchy Problem For ODEs 241

Akhmadjonova G., Aminov B., Ruziboev M.
Control Problems For Discrete Linear Stochastic Systems 243

Akhmedov D.M., Buvasherov D.S.
Error Functional Norm Of Hadamard-Type Hypersingular Integrals With High Oscillation In The Sobolev Space 244

Aloev R. D., Nematova D. E., Alimova R. A., Nishonova S. B.
An Upwind Difference Scheme For A Quasilinear Hyperbolic System 246

Anvarjonov B. B.
On the Reaction-Diffusion-Advection Epidemic Model in Spatially Variable Environments 248

Khudoyberganov M. U., Anvarov D.U., Abduxalilov F.T.
Numerical Methods For Solving The Neumann Problem For The Wave Equation 250

Babaev S. S., Hayotov A. R., Davronov J.R., Kuklamova M.
A New Quadrature Formula In The Classical Sense 252

Babaev S. S., Ganieva M. N.
Numerical Solution Of Highly Oscillatory Integral Equations By An Optimal Quadrature Formula 253

Babaev S. S., Mirzaeva S. O.
The Numerical Solution Of A Fredholm Integral Equation Using The Galerkin's Method Based On The Optimal Interpolation 255

Babajanov B. A., Abdukarimov F. B.
Integration Of The Fractional Modified Korteweg De Vries-Sine-Gordon Equation By The Inverse Scattering Method 257

Berdyshev A. S., Baigereyev D. R.
An Efficient Computational Approach For The Time-Fractional Stochastic Stokes–Darcy Model 258
Boytillayev B.A.
Approximate Solution Of The Generalized Abel Integral Equation Using Derivative Quadrature Formula 260
Jabborov N.M., Eshdavlatova S.E., Tuychiyev S.G‘.
Fractional-Order Modeling of Corruption Dynamics 262
Hayotov A. R, Berdimuradova U. A.
Derivative Optimal Quadrature Formula With Atbitrary Fixed Nodes In Sobolev Space 264
Hayotov A. R, Kurbonnazarov A. I.
Optimization Of Approximate Integration Formula For Rapidly Oscillating Functions In The Hilbert Space And Its Application 265
Hayotov A. R., Shomalikova M. Sh.
Constructing An Optimal Quadrature Formula With Derivative By The Phi Function Method 265
Ibragimov G. I., Tursunaliev T. G.
A Simple Motion Evasion Differential Game With Exponential Integral Constraints 266
Khaitov T. O.
Coeffitcients For Optimal Quadrature Formula Exact To Trigonometric Functions 268
Sabirov K., Kholboev B.
Explicit Transparent Boundary Conditions To The The Limits Of Interval For The Second Order Partial Differential Equations 270
Azamov S.S., Kobilov Kh.M.
Extremal Function For In The Space $\widetilde{S_2(P_2)}$ 271
Koshkarbayev N. M.
Numerical Solution Of Korteweg-De Vries Equation With Moving Boundaries 272
Kurbanov A. A.
Linear Evasion Differential Game Of One Faster Evader With Bounded Maneuverability From Multiple Pursuers 273
Ibragimov G., Inomiddinov S. Kurbonbekova O.
Differential Game Of Multiple Pursuers And One Evader With Integral Constraints Of Special Form 274
Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., Djurayeva K. A.
Optimal Quadrature Formula With Derivative 276
Mau Jochen
Functional Physiology By Energy: "Grounding"Axiomatic Functional Biodynamics in Biology 278
Nafasov A. Y., Boltaev N. D., Hayotov A. R.
Determination Of Coefficient For The Optimal Interpolation Formula With Derivative 279
Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., Edilbekova R.
Optimal Quadrature Formulas In The $L_2^{(m)}(0,1)$ Space 280
Omonova D.F., Viswanathan K.K.
Free Vibration Of Layered Cylindrical Shells Filled With Fluid Using Exponential And Sinusoidal Thickness Variations 282

Ruziboev M., Tilavov A.
Linear Response For Random Dyanmical Systems 283

Ruzimuradova D. Kh., Bekimov M. A.
On the Time-Optimal Control Problem for the SIR Model with Financial Resources Management 284

Samatov B. T., Azimov D. M.
The Pursuit Problem for Inertial Objects in a Gravitational Field 285

Samatov B. T., Uralova S. I.
Non-Stationary Pursuit Game With Langenhop-Type Constraints On Controls 287

Shadimetov Kh. M., Olimov N. N.
System For The Coefficients Of The Optimal Interpolation Formula 289

Soyibboev U. B., Abdurakhimova Sh. A., Husanboeva K. A.
Pursuit-Evasion Game For Players With Linear Motion Dynamics Under Exponential Velocities 291

Tishabayev DJ. K., Suyunova Z. B.
Application Of Dynamic Systems To Economic Problems 293

Takhirov J. O.
On A Free-Boundary Mathematical Model Of Infection Dynamics With Immune Response 295

Toshmatova M.M., Ergashaliyev M.Y.
Mathematical Description Of The Transition Part Of A Railway Line Plan 296

Turgunboeva M. A.
The ℓ-catch Problem In The Differential Games With Inertial Players And Non-Stationary Geometric Constraints On Controls 298

Zaynabiddinov I. S.
Pursuit Evasion Differential Games In Hilbert Space 300

Хужаёров Б.Х., Акрамов Ш.Б., Абдувахобов М.Б.
Плоско-Радиальная Аномальная Фильтрация Жидкости В Однородной Пористой Среде 301

Алимова Н.Б., Паровик Р. И.
Бифуркационные Диаграммы Дробного Осциллятора Фитцхью-Нагумо С Переменными Коэффициентами И Памятью 303

Атамурадова Б. М.
Элемент Рисса Одной Интерполяционной Формулы 305

Азамов С С., Бекмуродова Д. Б.
Об Одном Отимальная Квадратурная Формула Для Вычисления Коэффициентов Фурье В Гильбертовом Пространстве 307

Azamov S. S., Tursunmuratov S. T.
Вычисление Нормы Функционала Погрешности Оптимальных Квадратурных Формул В Пространстве $S_2(P_2)$ 308

Бакишев А. К., Алимбекова Н. Б., Бердышев А. С., Мадияров М. Н.
Численный Метод Решения Дробно-Дифференциальной Задачи Фильтрации С Переменными Порядками Дробных Производных 309

Болтаев А. К.
Элемент Рисса Одной Квадратурной Формулы 311

Водинчар Г. М., Фещенко Л. К.
Аппроксимации Решений Спектральной Задачи О Собственных Колебаниях Вращающейся Жидкой Сферической Оболочки И Их Применение В Моделировании Геодинамо 313
Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б., Муминов У.Р.
Маршруты Траекторий Операторов Лотки-Вольтерры На Симплексе S^4 315
Шадиметов Х. М., Гуломов О. Х., Элмуратов Г. Ч.
Оптимальные Квадратурные Формулы Для Вычисления Интегралов Быстро Осциллирующих Функций 317
Шадиметов Х. М., Давлатова Ф. И.
Коэффициенты Квадратурных Формул Для Быстроосцилирующих Интегралов 319
Эшмаматова Д.Б.,Таджиева М.А., Солижанова К.А.
Дискретные Модели Круговорота Фосфора И Углевода В Экосистеме 320
Шадиметов Х. М., Каримов Р. С.
Алгоритм Построения Оптимальных Конечно-Разностных Формул В Гильбертовом Пространстве 322
Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С., Худойбердиев А.А.
Математическая Модель Одной Задачи Уравнений Параболического Типа Математической Физики 324
Мамадалиев Н. А., Васиева Х. Г.
Метод Разрешающих Функций Для Решения Задачи Преследования 326
Матанов М. Ч.
Математическое Моделирование Распространения Волн Рэлея В Пористо-Упругих Полупространственных Средах 328
Адхамов Х. А., Мустапокулов Х. Я.
Об Одном Задаче Простого Преследования С Импульсным Управлением 330
Мусурмонов Д. Н., Мустапокулов Х. Я.
Об Одной Задаче Импульсного Преследования При Наличии Запаздывания 332
Мухамбетжанов С. Т., Джанабекова С. К.
Разработка Цифровой Технологии В Нефтегазовых Месторождениях Республики Казахстан 334
Нормуродов Ч.Б., Муродов С.К.
Об Одном Высокоточном Методе Решения Обыкновенного Дифференциального Уравнения С Малым Параметром При Старшей Производной 334
Нормуродов Ч.Б., Зиякулова Ш.А., Норматова М.М.
Об Одном Высокоточном Прямом Методе Решения Эллиптических Уравнений 337
Нуруллаев Ж. А., Бауетдинов А. А.
Численное Решение Уравнения Спиновой Волны В Магнитах 339
Байгереев Д. Р., Омариева Д. А.
Численный Метод Для Модели Фильтрации На Основе Нелинейного Интегро-Дифференциального Уравнения В Частных Производных 340
Салимова А.И., Паровик Р. И.
Исследование Динамических Режимов Дробного Осциллятора Ван Дер Поля-Эйри С Помощью Бифуркационных Диаграмм 342

Сафаров И. И., Собиров С. Ж., Мирзаева Г. Т., Зарипов Б. Ш.
Динамческое Напряженно- Деформированное Состояние Трехслойной Вязкоупругой Цилиндрической Оболочки При Нагружении 344
Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И.
Оценка Изменения Плотности Потока Радона С Помощью Эредитарной Математической α-Модели До И После Сильного Землетрясения На Камчатке 346
Твёрдый Д. А., Малкин Е. И.
Моделирование Эффектов Распространения Em Излучения Грозового Происхождения В Окрестности Участка Неоднородной Проводимости На Поверхности Земли 348
Тешаев М.Х., Жалолов Ф.Б., Нарзуллоев М., Ибрагимова Д.А.
Колебания Сферических Тел В Вязкоупругой Среде 350
Туйчиев С. Г., Эшдавлатова С. Э.
Применение Методов Анализа Устойчивости Систем Дифференциальных Уравнений В Модели Безработицы 352
Умаров И. Н., Янгибоев З. Ш., Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А.
Численное Определение Зон Фокусировки Энергии Различных Сейсмических Волн На Отдельных Участках Среды 354
Утебаев Б. Д.
Консервативные Компактные И Монотонные Разностные Схемы Для Квазилинейных Уравнений 355
Утебаев Б. Д., Калмуратова С. М.
О Сходимости Схемы Метода Конечных Элементов Для Нестационарных Задач Конвекции-Диффузии 356
Утеулиев Н. У., Сеидуллаев А. К., Низаматдинова С. С.
Моделирование Задач Интегральной Геометрии На Семействах Гипербол И Их Применение В Обработке Сейсмических Данных 358
Учкунов Б., Рузибоев М.
Оптимальные Стратегии Для Одновременных Антагонистических Игр 359
Халджигитов А. А., Хасанова З. З.
Уравнения В Напряжениях Для Анизотропных Тел 360
Хаётов А.Р., Кулдошев Х.М.
Алгебро-Экспоненциальная Оптимальная Квадратурная Формула С Производными 362
Кангужин Б.Е., Хужахметов Ж.Ж.
Преобразование Тригонометрического Произведения В Сумму 363
Жураев Г. У., Мусурмонова М. О., Шукурова З. У., Шукуров А. М.
Нестационарное Вращение Жесткого Шара Вблизи Сферического Включения В Пористо-Упругом Пространстве, Насыщенной Жидкостью 365
Эргашалиев М.Й.
Об Одном Методе Определение Длину Переходной Части Железной Дороги 367

Югай Л.П.
Моделирование Процесса Уклонения Траекторий Квазилинейных Динамических Систем В Классах Локально-Инерционных Управлений (Тонкий Случай) 368

Abdullayeva G. Sh.
Hilbert Fazosidagi Yarim-Normani Minimallashtiruvchi Natural Splayn 369

Sharipov M. Z., Boltayev Z. I., Mirzayeva G. T., Jurayev Sh. I.
Qovushoq-Magnito-Elastik Plastinkaning Chiziqli Ko‘ndalang Tebranishlari 372

Islamov E. R.
Bessel Operatori Qatnashgan To‘lqin Tenglamasini Taqribiy Yechish 373

Jabborov X. X.
Gilbert Yadroli Singulyar Integral Uchun Xatolik Funksionalining Normasi 375

Seytov A. J., Abduraxmonov O. N., Quramboyev I. N.
Suv Resurslarining Beqaror Harakatini Ikki O‘lchovli Fazoviy Taqsimlanishini Hisobga Olgan Holda Modellashtirishning Sonli Usuli 376

Seydullayeva G.B.
Kompleks O‘zgaruvchili Ishlab Chiqarish Funksiyalarining Dinamikasi 378

Qurbanbaev O‘.O., Askarova D.B.
Impuls Ta’siriga Ega Kechiguvchi Argumentli Differensial Tenglamalar Uchun Asosiy Boshlang‘ich Masalalar 379

Turdiyev Sh. R.
Trigonametrik Funksiyalarga Aniq Hosilali Kvadratur Formula 381

Xamidullayeva X.G‘.
Iqtisodiy O‘sishni Prognoz Qilishning Matematik Modeli 383

Xasanov J., Muminov S., Jabbarov O.
Ikki Komponentali Muhitda Yutiluvchan Manba Va O‘zgaruvchan Zichlikka Ega Nodivergent Kross-Diffuziya Masalasining Global Yechimlari 384



Академик
ШАВКАТ АРИФДЖАНОВИЧ АЛИМОВ
(к восьмидесятилетию со дня рождения)

2 марта 2025 года исполняется 80 лет со дня рождения известного ученого–математика, специалиста по спектральной теории дифференциальных операторов, математической физики и функционального анализа, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Государственной премии им. Беруни, организатора, внесший большой вклад в развитие и организацию науки и высшего образования, видного общественного и государственного деятеля, академика Шавката Арифджановича Алимова.

СЕКЦИЯ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
SECTION 3. DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Space-Dependent Source Identification Problem For The Subdiffusion Equation With A Non-Local In Time Condition

Ashurov R.R.[1], **Shakarova M.D.** [2]

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
ashurovr@gmail.com shakarova2104@gmail.com

Suppose that H is a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$, and let A be an operator in H, with a domain of definition $D(A)$, satisfying the following conditions:

1) $A = A^*$, where A^* denotes the adjoint operator of A,

2) $(Ah, h) \geq \lambda_0(h, h)$, $h \in D(A)$, for some $\lambda_0 > 0$.

Assume that A has a complete system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}_1^\infty$ in H and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. It is assumed that the eigenvalues are ordered such that $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$.

Let $AC[0,T]$ be the set of absolutely continuous functions defined on $[0,T]$ and let $AC([0,T];H)$ stand for a space of absolutely continuous functions $y(t)$ with values in H.

Inverse problem. Let $0 < \rho \leq 1$. Find a pair of function $u(t) \in AC([0,T];H)$ and element $f \in H$ that satisfies the following non-local boundary value problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = fg(t), \quad t \in (0,T], \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{1}$$

and additional

$$\int_0^T u(t)dt = \psi, \tag{2}$$

condition. Here $g(t) \in C[0,T]$ is a given function, $\psi \in H$ is a known element and D_t^ρ stands for the Caputo fractional derivative (see e.g. [1], p.14).

For a sign-preserving function $g(t)$, the existence and uniqueness of a solution of the inverse problem are proved. If the function $g(t)$ changes sign, then necessary and sufficient conditions for the existence of a solution are found. All the presented results are new for diffusion equations as well.

Literature

1. Pskhu A. V., Fractional Differential Equations, Moscow: Nauka, 200, 2005, [in Russian].

Forward And Inverse Problems For The Rayleigh-Stokes Equation

Ashurov R.R.[1], **Mukhiddinova O.T.**[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, University str.,9, Olmazor district, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
e-ashurovr@gmail.com

[2] Tashkent University of Information Technologies, 108 Amir Temur Avenue, Tashkent, 100200, Uzbekistan;
e-oqila1992@mail.ru

The well-known Rayleigh-Stokes problem (see, for example, [1])

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - (1+\gamma\,\partial_t^\alpha)\Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T; \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \le T; \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

involves the fractional derivative ∂_t^α, which describes the behavior of a viscoelastic flow. However, this parameter is often unknown and difficult to measure directly.

We are taking an abstract self-adjoint operator instead of the Laplace operator, we constructed an explicit form of the solution of the Rayleigh-Stokes problems by the Fourier method and investigated the regularity of the solution in an arbitrary N-dimensional domain. The backward problem was also investigated.

So, we studied the inverse problem for the Rayleigh-Stokes equation. We proved that the additional condition $||u(x,t_0)||_{L_2(\Omega)} = d_0$ for sufficiently large t_0 uniquely determines the parameter α.

Another very important problem studied in this work is to clarify the dependence of the behavior of the norm of the solution of the initial boundary value problem on the order of the fractional derivative. In this work, an interesting fact was discovered: if we consider the norm of the solution $||u(x,t_0)||^2_{L_2(\Omega)}$ as a function of the parameter α, then this is a decreasing function.

Literature

1. Bazhlekova E., Jin B., Lazarov R., Zhou Z. An analysis of the Rayleigh-Stokes problem for a generalized second-grade fluid.//Numer. Math. year-2015. Vol.-131, P. 1–31.

Monotonicity In The Parameter Of The Mittag-Leffler Function And Determining The Fractional Exponent Of The Subdiffusion Equation

Ashurov R. R.[1], **Sulaymonov I. A.**[2]

[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,Tashkent, Uzbekistan;
ashurovr@gmail.com

[2] National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Let Ω be an arbitrary N - dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following *Initial-boundary value problem*:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi(x)$ is a continuous function, Δ is the Laplace operator, $\rho \in (0,1)$ and D_t^ρ is the fractional Caputo derivative defined as (see, for example, [1], p. 91):

$$D_t^\rho u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{u(x,\xi) - u(x,0)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0, \ x \in \Omega.$$

A very interesting paper [2] by G. Li, Z. Wang, X. Jia, Y. Zhang was recently published, in which the order of the fractional derivative ρ in the equation $D_t^\rho u(x,t) - c\Delta u(x,t) = 0$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1,2,3$ and c is a sufficiently small positive number) was reconstructed from information on the solution of the initial-boundary value problem at only one point of space-time (x_0, t_0). However, in our opinion, this result is questionable in the sense that the conditions of this theorem are not sufficient to guarantee its assertion. Note also that the proof relies on the condition $d \le 3$. However, the paper contains an interesting auxiliary result: the authors proved that the function $g(\rho) = E_\rho(-ct^\rho)$ has a negative derivative, $g'(\rho) < 0$, if t is large enough and c is small enough.

Motivated by the results and interesting ideas of [2], we continued our research in this direction. We managed to find the missing condition in Theorem 2 and remove some restrictions mentioned in [2]. In particular:

1) we have proved that the Mittag-Leffler functions $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ and $E_\rho(-t^\rho)$ increase monotonically in parameter ρ for sufficiently small t. This is the main result of this work;

2) the requirement of a sufficiently small coefficient c was removed from the considered equation;

3) it is shown that the conditions of Theorem 2 of [2] is not complete and an updated version of this theorem with a proof is presented.

References

1. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier.Amsterdam. 2006.

2. Li G., Wang Z., Jia X., Zhang Y. An inverse problem of determining the fractional order in the TFDE using the measurement at one space-time point //Fractional Calculus and Applied Analysis, 2023. Vol. 26, pp. 1770–1785.

Inverse Coefficient Problem For A Full Fractional Diffusion-Wave Equation With The Caputo Time Derivative

Durdiev D. K.[1], **Turdiev H. H.**[1]

[1]Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Uzbekistan
hturdiev@mail.ru

In the domain $\Omega_T := \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$ We consider the time-fractional diffusion-wave equation

$$\left(\partial_t^\alpha u\right)(x,t) - \left(\partial_x^\beta u\right)(x,t) + q(t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

with initial and boundary conditions

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

where ∂_t^α, ∂_x^β are the Caputo fractional derivative [1] of order $1 < \alpha, \beta < 2$ in the time variable t and space variable x, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ are given smooth functions.

We pose the inverse problem as follows [2]-[5]: find the function $q(t)$, $t > 0$ in (1), if the solution of the initial-boundary problem (1)-(3) satisfies condition:

$$\int_0^1 u(x,t)dx = g(t),\ 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$g(t)$ is a given function. The functions $\varphi(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ and $g(t)$ satisfy the following assumptions.

Definition 1. *A function $u(x,t)$ is called a classical solution to initial - boundary problem (1) – (3), if:*
(i) *the Caputo derivative $\left(\partial_x^\beta u\right)(x,t)$ is continuous in x for each $t > 0$;*
(ii) *for each $x \in \mathbb{R}$ the Caputo derivative $\left(\partial_t^\alpha u\right)(x,t)$ is continuous in $t > 0$;*
(iii) *$u(x,t)$ satisfies (1) – (3).*

The functions $\varphi(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ and $g(t)$ satisfy the following assumptions

A1) $\{\varphi, \psi\} \in C^2[0,1]$, $\{\varphi^{(3)}, \psi^{(3)}\} \in L_2[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(1) = 0$;

A2) $f(x,\cdot) \in C[0,T]$ *and for* $t \in [0,T]$, $f(\cdot,t) \in C^2[0,l]$, $f^{(3)}(\cdot,t) \in L_2[0,l]$, $f(0,t) = f(1,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) = 0$;

A3) $\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha g(t) \in C[0,T]$ *and* $|g(t)| \geq g_0 > 0$, g_0 *is a given number,* $\int_0^1 \varphi(x)dx = g(0)$, $\int_0^1 \psi(x)dx = g'(0)$.

For the initial boundary value problem (1)-(3), the following theorem holds:

Theorem 1. Let $q(t) \in C[0,T]$, A1), A2) are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3), $u(x,t) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$.

For the inverse problem, the following holds

Theorem 2. Let A1)-A3) be satisfied. Then there exists a number $T^* \in (0;T)$, such that there exists a unique solution $q(t) \in C[0,T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).

References

1. A.A. Kilbas, H.M. J.J. Srivastava, Trujillo. Theory and application of fractional differential equations. North-Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.

2. T.S. Aleroev, M. Kirane, and Y.-F. Tang. Boundary-value problems for differential equations of fractional order // J. Math. Sci., **194**(5), 499–512 (2013).

3. H. H. Turdiev, Inverse coefficient problems for a time-fractional wave equation with the generalized Riemann–Liouville time derivative// Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika) **10**, 46–59 (2023).

4. D. K. Durdiev and H. H. Turdiev, Inverse Coefficient Problem for Fractional Wave Equation with the Generalized Riemann–Liouville Time Derivative // Indian J. Pure Appl. Math. (2023).

5. D. K. Durdiev and H. H. Turdiev, Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type overdetermination conditions // Math. Meth. Appl. Sci. Mathematical Methods in the Applied Sciences 47 (6), 5329–5340, (2024)

On The Cauchy Problem For The Langevin-Type Fractional Equation

Fayziev Yu. E.[1,3], Jumaeva Sh. F. [2], Chorieva G. H.[1], Giyosova F. U.[3]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; fayziev.yusuf@mail.ru

[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; shahnozafarhodovna79@gmail.com

[3]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan;

Let H be a separable Hilbert space and $A : D(A) \to H$ be an arbitrary unbounded positive self-adjoint operator, where $D(A) \subset H$ is the domain of the operator A. The operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\lambda_k : 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \to +\infty$. The sequence $\{\lambda_k\}$ has no finite limit points.

Let $C((a,b);H)$ be the sets of continuous vector-valued functions $u(t)$ on $t \in (a,b)$ with values in H. Let ε be an arbitrary real number. The power of the operator A is defined by the following:

$$A^{\varepsilon}h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\varepsilon} h_k v_k,$$

where h_k is the Fourier coefficient of the function $h \in H$, i.e., $h_k = (h, v_k)$. The domain of this operator is defined as:

$$D(A^{\varepsilon}) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\varepsilon} |h_k|^2 < \infty\}.$$

We consider the following Cauchy problem for a Langevin-type fractional differential equation:

$$\begin{cases} D_t^{\beta}(D_t^{\alpha}u(t)) + D_t^{\beta}(Au(t)) = f(t), \quad 0 < t \leq T \\ u(+0) = \varphi, \\ D_t^{\alpha}u(+0) = \psi, \end{cases} \tag{1}$$

where $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$; $\varphi, \psi \in H$,$f(t) \in C([0,T];H)$ and $D_t^{\alpha}, D_t^{\beta}$ are the Caputo derivatives (see [1]).

Theorem. *Let $\varphi \in D(A)$, $\psi \in H$. Further, let $0 < \varepsilon < 1$ be any fixed number and $f(t) \in C([0;T];D(A^{\varepsilon})) \cup C^1([0,T];H)$. Then, problem (1) has a unique solution given by:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[\varphi_k E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha}) + [\psi_k + \lambda_k \varphi_k] t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \\ + \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\alpha+\beta}(-\lambda_k (t-\eta)^{\alpha}) f_k(\eta) d\eta \Bigg] v_k, \tag{2}$$

where $f_k(t), \varphi_k$ and ψ_k are the Fourier coefficients of the elements $f(t)$, φ and ψ, respectively.

Similarly, the same result has been obtained when the derivative is in the sense of Riemann-Liouville.

Literature

1. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier.Amsterdam.–2006.

On The Forward And Inverse Problems In Fractional Derivative Equations Of Benney-Luke Type

Husanov E. A.[1]

[1]V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; elbekhusanov02@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space. The operator $A : D(A) \to H$ is an arbitrary unbounded, positive self-adjoint operator in H, where $D(A)$ is the domain of the operator A. We assume that the inverse of the operator A is a compact operator, then A has a complete system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues λ_k: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$.

Let $C((a,b);H)$ and $AC((a,b);H)$ be the sets of continuous and absolutely continuous vector-valued functions $y(t)$ on $t \in (a,b)$ with values in H, respectively.

The fractional Caputo derivative D_t^{ρ} of order $1 < \rho < 2$ of a vector-valued function $y(t) \in H$ is defined as: (see, [1])

$$D_t^{\rho} y(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\rho)} \int_0^t \frac{y''(\eta)}{(t-\eta)^{\rho-1}} d\eta \quad t > 0,$$

here $\Gamma(\rho)$ is Euler's gamma function.

We consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} D_t^{\rho} u(t) + A(D_t^{\rho} u(t)) + A^2(D_t^{\rho} u(t)) + Au(t) = f(t), & 0 < t \leq T; \\ u(0) = h; \\ u'(0) = g, \end{cases} \tag{1}$$

where $h, g \in H$ and $f(t) \in C([0,T];H)$. T is a constant number.

Definition 1.1. A function $u(t) \in AC([0,T];H)$ with the properties $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $A^2(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0,T];H)$ and satisfies all the conditions of the problem (1), then it is called the solution of the Cauchy problem.

The problem of finding a solution to the problem (1) that satisfies Definition 1.1 is called the forward problem. To solve the forward problem (1), we will prove the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $h, g \in D(A)$, $f(t) \in C([0,T];H)$. Then there is a unique solution to the Cauchy problem (1) and this solution has the following form:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [h_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + g_k t E_{\rho,2}(-\mu_k t^\rho) +$$

$$+ \frac{1}{1+\lambda_k+\lambda_k^2} \int_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\mu_k \eta^\rho) f_k(t-\eta)\, d\eta]\, v_k \tag{2}$$

where h_k, g_k and $f_k(t)$ are the Fourier coefficients of the elements h, g and $f(t)$ respectively, $E_{\rho,\beta}(z)$ is the function of the Mittag-Leffler and $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k+\lambda_k^2}$.

Moreover, we also study the inverse problem of finding the right-hand side of the problem (1). In the case, we assume that the right-hand side of the equation does not depend on t. To find the inverse problem, we use the following additional condition:

$$u(T) = \psi, \tag{3}$$

where $\psi \in H$.

Definition 1.2. If the functions $u(t) \in C([0,T];H)$ and $f \in H$ have the properties $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $A^2(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0,T];H)$ and satisfies all the conditions of problem (1) and (3), then the pair of functions $\{u(t); f\}$ is called the solution of the inverse problem (1) and (3).

To solve the inverse problem (1)-(3), we will prove the following theorem.

Theorem 1.2. *Let $h, g, \psi \in D(A^2)$ and $f \in H$. Then there is a unique solution to the inverse problem (1),(3) and this solution has the following form:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[h_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + g_k t E_{\rho,2}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1+\lambda_k+\lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] v_k,$$

where

$$f_k = \left(\frac{\psi_k}{T^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k T^\rho)} - \frac{h_k E_{\rho,1}(-\mu_k T^\rho)}{T^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k T^\rho)} - \frac{g_k E_{\rho,2}(-\mu_k T^\rho)}{T^{\rho-1} E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k T^\rho)} \right) (1+\lambda_k+\lambda_k^2),$$

and

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k.$$

Wave motion in an incompressible fluid with a free surface under the action of gravity was studied by D.J. Benney and J.C. Luke in the article [2]. Furthermore, the forward and inverse problems for the Benny-Luke type fractional partial differential equation were studied in the article [3].

Literature

1. C. Lizama. Abstract linear fractional evolution equations. Fractional Differential Equations (pp. 465-498). 2019. Berlin: De Gruyter.

2. D. J. Benney, J. C. Luke. Interactions of permanent waves of finite amplitude. Mathematical Physics. 1964. Vol. 43, Issue 1-4, pp. 309-313.

3. Yu. E. Fayziyev, Sh. T. Pirmatov, Kh. T. Dekhkonov. Forward and inverse problems for the Benney-Luke type fractional equations. 2024. Russian Mathematics. Vol. 68, pp. 70-78.

The Inverse Problem for a Multidimensional Integro-Differential Parabolic Equation with Nonlocal Initial-Boundary Conditions

Jumaev J. J.[1]

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan, Uzbekistan

jonibekjj@mail.ru

We consider the following integro-differential equation parabolic equation:

$$u_t - Lu = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau + g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

with initial

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

and boundary conditions:

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial Q_T, \tag{3}$$

where $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c(x)$ is the uniformly elliptic operator ($n \geq 1$), the coefficients satisfy the conditions $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$. $Q_T := \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, and $\partial Q_T := \partial\Omega \times [0,T]$, $\varphi(x)$, and $g(x,t)$ are given functions, $\delta \geq 0$ is given number. Finding function $u(x,t)$ from (1)–(3), with known $k(t)$, we call the *direct problem.*

Definition 1. *A classical solution of the initial and boundary problem (1)-(3) is a function $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q}_T\right)$, that satisfies all the equalities of problem (1)-(3) in the usual sense.*

The inverse problem consists in determining the unknown coefficient $k(t)$, $t > 0$, from the available additional data on the solution to the direct problem :

$$\int_\Omega \eta(x)u(x,t)dx = h(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

where $\eta(x), h(t)$ are the given functions.

Definition 2. *A classical solution of the inverse problem (1)-(4) is pair functions $\{u(x,t), k(t)\} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q}_T\right) \times C[0,T]$, which satisfy all the equalities of the problem (1)-(4) in the usual sense.*

This work considers the inverse problem for a multidimensional integro-differential parabolic equation with nonlocal initial boundary conditions. The Fourier method on the eigenfunction of an auxiliary spectral problem with the boundary condition, which is suitable for studying the problem under consideration. Under some regularity, the existence and uniqueness of the classical solution of the direct problem have been shown. This article also has investigated the inverse problem of finding the kernel of a multidimensional convolution-type parabolic equation with the uniformly elliptic operator from integral overdetermination data. The existence and uniqueness of the solution of the inverse problem have been proved using the fixed point principle.

References

1. N.I. Ionkin. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // Differentsial'nye Uravneniya **13**:2, 294–304 (1977).

2. V.A. Il'in. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations // Russ. Math. Surv. **15**:2, 85–142 (1960).

On A Forward Problem Linked With The Wave-Diffusion Process

Karimov E.[1], Tokmagambetov N.[2], Toshpulatov M.[3].

[1]Ghent University, Ghent, Belgium;
erkinjon@gmail.com; erkinjon.karimov@ugent.be

[2] Centre de Recerca МатемГrtica, Campus Bellaterra, Barcelona, Spain and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
tokmagambetov@crm.cat; tokmagambetov@math.kz

[3]Andijan State University,Andijan,Uzbekistan;
muzaffar.toshpulatov89@gmail.com

Abstract. We consider the uniqueness of the solution of the initial boundary problem for the fractional order mixed diffusion-wave equation with respect to time. We provide an integral representation of the two-variable Mittag-Leffler function, as well as important estimates for this function. The main research tool in this matter is the method of separation of variables. Most of our evaluations are linked with the proof of uniform convergence of infinite series. We impose certain conditions to given functions in order to provide uniform convergence of infinite series corresponding to the solution of formulated problem.

Let us consider the following mixed equation

$$\frac{1-sgn(t-a)}{2}\,{}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x)+\frac{1+sgn(t-a)}{2}\,{}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)-u_{xx}(t,x)=f(t,x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$. Here $J=\{(t,x):t=a,0<x<1\}$,
$\Omega_1=\{(t,x):0<x<1,0<t<a\}$, $\Omega_2=\{(t,x):0<x<1,a<t<b\}$, $a,b\in\mathbb{R}^+$ such that $b>a$, $1<\beta_1<2,0<\beta_2<1$, $\alpha,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $f(t,x)$ is a given function and

$${}^{PC}D_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}f(x)={}^{P}I_{ax}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^m}{dx^m}f(x)$$

is a regularized Prabhakar derivative of order β,

$$ {}^{P}I_{ax}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}f(x)=\int_a^x (x-\xi)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\delta(x-\xi)^{\alpha})f(\xi)d\xi, x>a $$

is the Prabhakar fractional integral of order β and $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ is the Prabhakar function [1]

$$ E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}\frac{z^i}{i!}. $$

Forward problem. Find a regular solution of (1) in Ω, satisfying the following conditions:

$$ u(t,0)=u(t,1)=0,\ 0\le t\le b,\ \ u(0,x)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, $$

$$ \lim_{t\to a+}{}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)=\lim_{t\to a-}u_t(t,x), 0<x<1. $$

Definition. Function $u(t,x)$ is called a **regular solution** of (1) in Ω, if $u(t,x)\in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}(t,x)\in C(\Omega_1\cup\Omega_2)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}u(t,x)\in C(\Omega_1\cup J)$, ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}u(t,x)\in C(\Omega_2\cup J)$ and satisfies (1) in Ω.

We note that given function $\varphi(x)$ should satisfy the following matching conditions:

$$ \varphi(0)=\varphi(1)=0. $$

We search for a solution to the problem as follows:

$$ u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}{}_1T_k(t)\cdot\sin k\pi x, 0\le t\le a, \tag{2} $$

$$ u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}{}_2T_k(t)\cdot\sin k\pi x, a\le t\le b. \tag{3} $$

We substitute (2) and (3) into (1) and will get the following fractional differential equations:

$$ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta_1,\gamma,\delta}{}_1T_k(t)+(k\pi)^2{}_1T_k(t)=f_k(t), 0<t<a, \tag{4} $$

$$ {}^{PC}D_{at}^{\alpha,\beta_2,\gamma,\delta}{}_2T_k(t)+(k\pi)^2{}_2T_k(t)=f_k(t), a<t<b, \tag{5} $$

where $f_k(t)=2\int_0^1 f(t,x)\sin k\pi x dx$ are the Fourier coefficients of the function $f(t,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin k\pi x$.

Involved fractional derivative is comparatively less studied and hence, first we have studied corresponding Cauchy problem for equations (4) and (5) (see [2]-[4]), obtaining solutions in terms of the bi-variate Mittag-Leffler type function $E_2(x,y)$. Then we prove certain statements related to this function (see [3]-[5]). Since mixed equation consists of fractional wave and sub-diffusion equations, proposed problem might used in modeling variety of diffusion-wave processes.

References

1. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Math. J., 1971, 19, pp.7-15.

2. Rani N., Fernandez A. Solving Prabhakar differential equations using Mikusinski's operational calculus. Computational and Applied Mathematics, 2022, 41, 107, 15 p.

3. Karimov E.T., Hasanov A. On a boundary-value problem in a bounded domain for a time- fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023, 111, №3, pp.39-46.

4. Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M. On a Mixed Equation Involving Prabhakar Fractional Order Integral-Differential Operators. In: Ruzhansky, M., Van Bockstal, K. (eds) Extended Abstracts 2021/2022. APDEGS 2021. Trends in Mathematics, 2024, Vol. 2, chapter 25, pp.221-230. https://doi.org/10.1007/978-3-031-42539-4_25.

5. Toshpulatov M. Initial-boundary problem for time-fractional mixed equation with space-variable coefficients Bull. Inst. Math., 2024, 7, №3, pp. 77-91.

On A Problem For Sub-Diffusion Equation With The Caputo-Type Katugampola-Prabhakar Fractional Derivative

Khasanov Sh.[1],

Ferghana State University, Fergana, Uzbekistan;
shohzodbekxasanov@gmail.com

In this short talk, we will present a definition of the Caputo-type Katugampola-Prabhakar fractional derivative and discuss the solvability of the considered problem for the time fractional sub-diffusion equation with Caputo-type Katugampola-Prabhakar fractional derivative.

Let us define the Caputo-type Katugampola-Prabhakar fractional derivative.

Definition 1. Let $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^+$ and $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $n-1 < \beta \leq n$, also $f(x) \in AC^n_{\delta_p}[a,b]$, $a \geqslant 0$ be. The following operators:

$$ {}^{CKP}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p}_{a+} f(x) = {}_{KP}I^{\alpha,n-\beta,-\gamma,\delta,p}_{a+} \left(t^{1-p} \frac{d}{dt} \right)^n f(x) := $$

$$ \int_a^x \left(\frac{x^p - t^p}{p} \right)^{n-1-\beta} E^{-\gamma}_{\alpha,n-\beta} \left(\delta \left(\frac{x^p - t^p}{p} \right)^{\alpha} \right) t^{p-1} \left(t^{1-p} \frac{d}{dt} \right)^n f(t)\, dt,\ x > a\,, $$

$$ {}^{CKP}D^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p}_{b-} f(x) = {}_{KP}I^{\alpha,n-\beta,-\gamma,\delta,p}_{-b} \left(-x^{1-p} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) := $$

$$ \int_x^b \left(\frac{t^p - x^p}{p} \right)^{n-1-\beta} E^{-\gamma}_{\alpha,n-\beta} \left(\delta \left(\frac{t^p - x^p}{p} \right)^{\alpha} \right) t^{p-1} \left(-t^{1-p} \frac{d}{dt} \right)^n f(t)\, dt,\ x < b $$

are called as left and right-side Caputo-type Katugampola-Parbhakar fractional derivatives. Here ${}_{KP}I^{\alpha,\beta,\gamma,\delta,p}_{at}$ represents Katugampola-Prabhakar fractional integral and defined in [1], the $AC^n_{\delta_p}[a,b]$ class of the function is introduced in [2] and $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ is the Prabhakar function [3].

Let us consider the following time-fractional diffusion equation

$$ {}^{CKP}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < T\,,\ 0 < x < 1\}$. Here $0 < \beta < 1,\ \gamma, \delta, \in \mathbb{R}\,,\ \alpha > 0$ and $f(t,x)$ is a given function.

Problem 1: To find a solution to equation (1) in Ω, satisfying the following

- regularity conditions:

$$u(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ u(\cdot\,,x) \in C^2\,(0,1)\,,\ {}^{CKP}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,\cdot) \in C\,(0,T)\,;$$

- initial condition: $u(0,x) = B(x)\,, 0 \leqslant x \leqslant 1\,;$
- boundary conditions: $u(t,0) = u(t,1) = 0\,,\ 0 \leqslant t \leqslant T\,.$

Here $B(x)$ is a given function such that $B(0) = B(1) = 0$.

Below we present the main statements regarding the unique solvability of the problem 1.

Lemma. If the function $u(x)$ is absolutely continuous on $[a,b]$, $a \geqslant 0$ and $0 < \alpha \leqslant 1,\ \delta < 0,\ 0 < \beta < 1,\ \gamma < 0,\ p > 0$, then the following inequality holds:

$$u(x)\,{}^{CKP}D_{a+}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(x) \geqslant \frac{1}{2}\,{}^{CKP}D_{a+}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u^2(x)\ ,\ 0 < \beta < 1\,.$$

Theorem 1. Let all conditions of the Lemma are valid. If a solution to problem 1 exists, then it is unique.

Theorem 2. If $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2},\ \frac{\beta}{2} > \alpha\theta,\ \gamma > \frac{\theta}{1-\theta}, \beta > \theta\,(\beta - \alpha)\,,\ \delta < 0\,, \frac{\partial^3 f(t,x)}{\partial x^3} \in C\left(\overline{\Omega}\right), \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ f(t,1) = f(t,0) = \frac{\partial^2 f(t,1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(t,0)}{\partial x^2} = 0,\ B'(x) \in L_2\,(0,1), B^{(3)}(x) \in L_2\,(0,1), B^{(5)}(x) \in L_2\,(0,1), B''(0) = B''(1) = B^{(4)}(1) = B^{(4)}(0) = 0,\ f(t,x) \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ f(t,\cdot) \in C^{(1)}[0,1]$, then there exist a solution to the Problem 1 and it is represented as follows:

$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left[B_m - (\pi m)^2\Gamma\,(\gamma)\,B_m\left(\frac{t^p}{p}\right)^{\beta} E_2\left(\begin{matrix}\gamma,\gamma,1;1,0\\ \beta+1,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}-(\pi m)^2\left(p^{-1}t^p\right)^{\beta}\\ \delta\left(p^{-1}t^p\right)^{\alpha}\end{matrix}\right) + \right.$$

$$\left. \int_0^t \left(\frac{z^p - t^p}{p}\right)^{\beta-1} \Gamma\,(\gamma)\,E_2\left(\begin{matrix}\gamma,\gamma,1;1,0\\ \beta,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}-(\pi m)^2 p^{-\beta}(t^p - z^p)^{\beta}\\ \delta p^{-\alpha}(t^p - z^p)^{\alpha}\end{matrix}\right) z^{p-1} f_m(z)dz\right]\,\sin \pi m x\,.$$

Here, $E_2(x,y)$ function is a bivariate Mittag-Leffler function (see for the series form [4]) and $f_m(t) = 2\int\limits_0^1 f(t,x)\sin \pi m x\,dx\,, B_m = 2\int\limits_0^1 B(x)\sin \pi m x\,dx\,.$

References

1. Karimov E.T., Khasanov Sh. On a Katugampola-Prabhakar fractional order integral and integro-differential operators // Proceedings of conference "The non-classical equations of mathematical physics and their applications Tashkent, 2024, P.83.

2. Lupinska B. Properties of the Katugampola fractional operators // Tatra Mt. Math. Publ. 2021. V.79, P. 135–148 DOI: 10.2478/tmmp-2021-0024

3. Prabhakar T.R. A singular integral equations with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama.Math.J. 2006. V.19, –1. P. 7–15.

4. Garg M., Manohar P., Kalla S.L. A Mittag-Leffler-type function of two variables // Integral Transf. Special Funct. 2013. V.24, –11. P. 934–944.

Non-Local Time Problem For The Barenblatt-Zheltov-Kochina Type Fractional Equations

Ashurov R.R.[1], Fayziyev Yu.E.[2], Khushvaktov N.Kh.[3]

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan
ashurovr@gmail.com
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
fayziev.yusuf@mail.ru
Tashkent International University of Financial Management and Technology, Tashkent, Uzbekistan
nuriddinh@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space, the operator $A : H \to H$ be a self-adjoint, positive, unbounded operator defined on the domain $D(A)$. We assume that A possesses a compact inverse A^{-1}. Denote by $\{v_k\}$ a complete orthonormal set of eigenfunctions and by $\{\lambda_k\}$ the associated set of positive eigenvalues. The eigenvalues can be ordered in a non-decreasing sequence, meaning $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \to +\infty$. Let the vector function (or simply function) $h(t)$ be defined on the interval $[0, +\infty)$ with values in the Hilbert space H. The Caputo fractional derivative of order $\rho \in (0, 1)$ is defined as follows (see, for example [1])

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int\limits_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Let $\rho \in (0, 1)$ is a given constant. Let $C((a, b); H)$ stand for a set of continious functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H.

We consider the following non-local problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A(1 + \gamma D_t^\rho)u(t) = 0, \quad \gamma > 0, \quad 0 < t < T; \\ u(\tau_0) = \alpha u(0) + \varphi, \quad 0 < \tau_0 \leq T, \end{cases} \tag{1}$$

here, $\varphi \in H$ is a given function. The parameters $\gamma > 0$, α is a constant, and τ_0–fixed point. When $\rho \in (0, 1)$ the first equation in (1) is called to the Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional differential equation. These types of problems are also called *the forward problems.*

Definition. *An absolutely continuous function $u(t) \in C([0, T]; H)$ that has the properties $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0, T); H)$ and satisfies the conditions in (1) is called the solution of the non-local problem (1).*

If $\alpha \in (0, 1)$, there is $\lambda_0 > 0$ such that $E_\rho(-\mu_0 \tau^\rho) = \alpha$, $\mu_0 = \dfrac{\lambda_0}{1 + \gamma\lambda_0}$.

We suppose $\lambda_k = \lambda_0$ and let it be multiple of p_0. We denote by

$$K_0 = \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots, k_0 + p_0 - 1\},$$

the set of numberes k by $\lambda_k = \lambda_0$.

Theorem. Let $\varphi \in H$.

If $\alpha \notin (0, 1)$ or $\alpha \in (0, 1)$, but $\lambda_k \neq \lambda_0$ for all $k \geq 1$, then the problem (1) has a unique solution and this solution has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{E_\rho(-\mu_k \tau_0^\rho) - \alpha} E_\rho(-\mu_k t^\rho)\, v_k.$$

If $\alpha \in (0, 1)$ and $\lambda_k = \lambda_0$, $k \in K_0$, then we assume that the orthogonality conditions

$$\varphi_k = (\varphi, v_k) = 0, \quad k \in K_0$$

are satisfied. Then the solution of problem (1) has the form

$$u(t) = \sum_{k \neq K_0} \frac{\varphi_k}{E_\rho(-\mu_k \tau_0^\rho) - \alpha} E_\rho(-\mu_k t^\rho)\, v_k + \sum_{k \in K_0} c_k E_\rho(-\mu_k t^\rho)\, v_k,$$

with arbitrary coefficients c_k, $k \in K_0$.

References

1. C. Lizama. Abstract linear fractional evolution equations // in Handbook of Fractional Calculus with Applications, Ed. by J. A. T.Marchado, De Gruyter, Berlin, 2019. Vol. 2, pp. 465–497.

On A Bvp For The Heat Equation With A Loaded Term As A Fractional Derivative

Kosmakova M.T.[1], Akhmanova D. M.[2], Tuleutaeva Zh. M.[3]

[1,2,3]Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan,
[1]Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan
[1]svetlanamir578@gmail.com; [2]danna.67@mail.ru; [3]erasl-79@mail.ru

In the domain $Q = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ we consider a boundary value problem for a loaded differential equation with a Riemann-Liouville derivative of an order $\beta > 0$

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ {}_r D_{ox}^{\beta} u(x, t) \right\}\Big|_{x=\gamma(t)} = f(x, t) \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = g(x), \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0 \tag{2}$$

for $f(x) \in L_1([a; b]); x \in [a; b]$.

$\gamma(t)$ is a non-negative, non-decreasing continuous function, $\gamma(0) = 0, \gamma(t) \geq 0$ or $\gamma(t) =$ const.

The problem is investigated in the class of functions

$$u(x, t) \in C^2(x \in [a; b]) \cap C^1(t \in [0, T]).$$

Solving problem (1)-(2) is reduced to solving an integral equation

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \frac{\mu(r)}{\Gamma(1-\beta)(\gamma(t))^\beta} dr = f_2(t), \tag{3}$$

where

$$f_2(t) = {}_rD_{ox}^{\beta} f_1(x,t)\big|_{x=\gamma(t)}, \tag{4}$$

$$f_1(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,r)G(x,\xi,t-r)\mu(r)d\xi dr + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)G(x,\xi,t)d\xi$$

$$\mu(t) = \left\{ {}_rD_{ox}^{\beta} u(x,t) \right\}\big|_{x=\gamma(t)},$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right).$$

The following theorems are proved.

Theorem 1. Integral equation (3) for $\beta > 0$ and for $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ in the neighborhood of the point $t = 0$ for any continuous right-hand side $f_2(t)$ defined by formula (4) for $\omega \geq 0$, has a solution defined by formula

$$\mu(t) = f_2(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} t^{-\omega\beta} \exp\left(-\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)(1-\omega\beta)} t^{1-\omega\beta}\right) \times$$

$$\times \int_0^t f_2(r) \exp\left(\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)(1-\omega\beta)} r^{1-\omega\beta}\right) dr. \tag{5}$$

Theorem 2. Let the function $f_2(t)$ be defined by formula (4). Then the solution of BVP (1)-(2) with the law of load motion $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ for $\omega \geq 0$, $1 - \omega\beta > 0$ (in the neighborhood of the point $t = 0$) is defined by formula

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t f_2(r) \exp\left\{-\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)(1-\omega\beta)} \left(t^{1-\omega\beta} - r^{1-\omega\beta}\right)\right\} dr + f_1(x,t).$$

This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488740, 2024–2026.)

References

1. Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003.

2. Pskhu A.V. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka. Equations in partial derivatives of fractional order. Moscow: Nauka; 2005.

On The Control Problem For A Pseudo-Parabolic Equation With Caputo Fractional Derivative

Dekhkonov F. N., Kuchkorov E. I.
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
f.n.dehqonov@mail.ru
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
e_kuchkorov@mail.ru

Let $\alpha \in (0,1]$ be a fixed number. In this paper, we consider the following pseudo-parabolic equation with Caputo fractional derivative in the domain $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$

$$D_t^{\alpha}\left(u(x,y,t) - \Delta u(x,y,t)\right) - \Delta u(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \Omega_T := \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

with boundary value conditions

$$u(0,y,t) \;=\; \Phi(y)\,\nu(t), \quad u(\pi,y,t) \;=\; 0, \tag{2}$$

and

$$u(x,0,t) \;=\; 0, \quad u(x,\pi,t) \;=\; 0, \tag{3}$$

and initial value condition

$$u(x,y,0) \;=\; 0, \quad 0 \le x,y \le \pi, \tag{4}$$

where $\Delta u = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)$, $\Phi(y)$ is a given function and $\nu(t)$ is the control function.

It can be seen that the Caputo fractional derivative $D_x^{\alpha} g(x)$ is defined as (see e.g. [1])

$$D_x^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}\, g'(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

It is called that the control function $\nu(t) \in C^1[0,T]$ is *admissible*, if it fulfills the following conditions

$$\nu(0) = 0, \quad |\nu(t)| \le 1, \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Assume, the given function $\Phi \in C^3([0,\pi])$ satisfies the conditions

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0.$$

Control Problem. Assume that function $\phi(t)$ is a given. Then find the control function $\nu(t)$ from the condition

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} u(x,y,t)\, dx\, dy = \phi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

where $u(x,y,t)$ is a solution of the problem (1)-(4) and it depends on the control function $\nu(t)$.

The optimal control problem for the parabolic type equations was studied [2, 3]. The boundary control problem for a parabolic equation with a piecewise smooth boundary

in an $n-$dimensional domain was studied in [4] and an estimate for the minimum time required to reach a given average temperature was found. Boundary control problems for pseudo-parabolic type equations were studied in works [5, 6], and it was proved that there is a control function for heating the domain to the average temperature.

Theorem 1. There exists a constant $M > 0$ such that for any function $\phi(t) \in C[0,T]$ satisfying the conditions

$$\phi(0) = 0, \quad |\phi(t)| \leq \frac{1}{M}, \quad t \in [0,T],$$

the solution $\nu(t)$ of the equation (6) exists, unique and satisfies the conditions (5).

References

1. Pskhu A.V. Fractional Differential Equations, Moscow: Nauka, 2005, [in Russian].

2. Friedman A. Differential equations of parabolic type. XVI, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

3. Fattorini H. O., Russell D. L. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension// Arch. Rational Mech. Anal. 1971. Vol. 43, P. 272–292.

4. Albeverio S., Alimov Sh.A. On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process// Applied Mathematics and Optimization. 2008. Vol. 57, №. 1, P. 58–68.

5. Fayazova Z.K. Boundary control for a pseudo-parabolic equation// Mathematical notes of NEFU. 2018. Vol. 25. №. 2, P. 40–47.

6. Dekhkonov F.N. On a boundary control problem for a pseudo-parabolic equation// Communications in Analysis and Mechanics. 2023. Vol. 15, №. 2, P. 289–299.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS TO THE TIME-SPACE NONLOCAL DIFFUSION EQUATION

Mambetov S.[1]

[1] *Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University, Kazakhstan*
samatmambetov09@gmail.com
[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan*
berikbol.torebek@ugent.be

Abstract: This article investigates a time-fractional space-nonlocal diffusion equation in a bounded domain. The fractional operators are defined rigorously, using the Caputo fractional derivative of order β and the Riemann-Liouville fractional integral of order α, where $0 < \alpha < \beta \leq 1$. The solution is expressed as a series involving the two-parameter Mittag-Leffler function and orthonormal eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator. The convergence of the series is investigated, and conditions for the solution to belong to a specific function space are established. The uniqueness of the solution is demonstrated and the continuity of the solution in the specified domain is confirmed through the uniform convergence of the series.

Keywords: fractional derivative, integral equation, the method of separation variables, time-nonlocal diffusion equation.

2020 Mathematics Subject Classification: 35A01, 35B09, 35B44

Unique Solvability Of An Initial Boundary Value Problem For A Fourth Order Partial Differential Equation That Degenerates On The Boundary Of The Domain

Mirzagiyosova S. M.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
sevinchbonumirzagiyosova@gmail.com

In the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}u(x,t) + \left[x^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

where ${}_CD^{\alpha}_{0t}$ is Caputo fractional differential operator α order [1]

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{g^{(n)}(z)dz}{(t-z)^{\gamma-n+1}}, \quad (n = [\alpha]+1, t > 0),$$

α, β, T are given real numbers, such that $0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad T > 0; \quad f(x,t)$ is a given function on Ω.

First, we introduce the definition of the regular solution of the equation (1).

Definition. A function $u(x,t)$ satisfying in the domain Ω equation (1) and the following conditions $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}), \quad {}_CD^{\alpha}_{0t}u(x,t), \quad (x^{\beta}u_{xx})_{xx} \in C(\Omega)$ is called regular in the domain Ω solution of the equation (1).

In the domain Ω, we study the following problem for the equation (1):

Problem 1. Find a regular in the domain Ω solution of the equation (1) satisfying the following initial and boundary conditions:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}(x^{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ is a given sufficiently smooth function.

By applying the method of separation of variables to the considered problem, i.e., seeking a solution of the corresponding homogeneous equation to (1) that satisfies condition (3) in the form $u(x,t) = T(t)v(x)$, we obtain the following spectral problem:

$$Lv \equiv [x^{\beta}v''(x)]'' = \lambda v(x), \quad x \in (0,1); \tag{4}$$

$$v(1) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v'(1) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(x^{\beta}\frac{d^2 v}{dx^2}\right) = 0. \tag{5}$$

Using the theory of integral equations with symmetric kernels, we proved the existence of eigenvalues and eigenfunctions for the spectral problem $\{(4), (5)\}$. That is, the problem (4), (5) has a countable set of eigenvalues $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le ...$ with corresponding

orthonormal eigenfunctions $v_1(x), v_2(x), v_3(x), ...$, moreover, any arbitrary function $g \in L_2[0,1]$ expands into a series by these eigenfunctions, which converges on average.

Let $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ be the eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem $\{(4),(5)\}$, respectively.

We prove the following lemmas.

Lemma 1. On the interval $[0,1]$ the following series converge uniformly:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[v_k'(x)]^2}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[x^\beta v_k''(x)]^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left\{\left[x^\beta v_k''(x)\right]'\right\}^2}{\lambda_k^2}.$$

Lemma 2. Suppose the following conditions hold:

$$f(x), \quad f'(x) \in C[0,1], \quad x^{\beta/2} f''(x) \in L_2[0,1], \quad f(1)=0, \quad f'(1)=0, \quad f'(0)=0.$$

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k f_k^2 \le \int_0^1 x^\beta [f''(x)]^2 dx. \tag{7}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (7).

Here in after f_k denotes Fourier coefficient of the function $f(x)$ by the system of eigenfunctions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Lemma 3. Suppose that the following conditions hold:

$$f(x), \quad f'(x), \quad x^\beta f''(x), \quad [x^\beta f''(x)]' \in C(0,1), \quad [x^\beta f''(x)]'' \in L_2(0,1),$$

$$f(1)=0, \quad f'(0)=0 \quad f'(1)=0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\left(x^\beta \frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0.$$

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \le \int_0^1 \left[\left(x^\beta f''(x)\right)''\right]^2 dx. \tag{8}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (8).

Using Lemmas 1, 2, and 3, and the properties of the two-parameter Mittag-Leffler functions, we proved the following

Theorem 1. Let the following conditions be fulfilled:

1. $\varphi(x)$ satisfies the conditions of Lemma 1.
2. $f(x,t)$ satisfies the conditions of Lemma 1 uniformly with respect to t.
3. $f_t'(x,t)$ satisfies the conditions of Lemmas 1 and 2 uniformly with respect to t.

Then the unique solution of the problem $\{(1),(2),(3)\}$ is defined by

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_k E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) + \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_k (t-z)^\alpha] f_k(z) dz\right] v_k(x), \tag{9}$$

where $E_{\alpha,\beta}(z)$ is two-parameter Mittage-Leffler's function[3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equation. Amsterdam: Elsevier, 2006.

2. Mikhlin S.G. Linear integral equations. Moscow: Fizmatgis, 1959.

3. Podlubny I. Fractional differential equations. United States: Academic Press, 1999.

Forward Problems For Fractional Wave Equation

Mukhiddinova O.[1,2], **Abdullayeva F.**[1]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, University str.,9, Olmazor district, Tashkent, 100174, Uzbekistan;

[2] Tashkent University of Information Technologies, 108 Amir Temur Avenue, Tashkent, 100200, Uzbekistan;

e-oqila1992@mail.ru

We study a forward problem for fractional wave equation with Riemann-Liouville fractional derivative, whose elliptic part has the Laplace operator and is defined in an arbitrary multidimensional domain (with sufficiently smooth boundary). The Fourier method is used to prove theorems on the existence and uniqueness of the classical solution of forward problem for fractional Wave equation

Consider the time-fractional string vibration equation with the Riemann-Liouville fractional derivative of order ρ:

$$\partial_t^\rho u\,(x,t) - \Delta u\,(x,t) = f\,(x,t)\,, \quad 0 < t \leq T,\ x \in \Omega \subset R^N \tag{1}$$

with the following initial conditions

$$\lim_{t\to 0} \partial_t^{\rho-1} u\,(x,t) = \varphi\,(x)\,,\ \lim_{t\to 0} \partial_t^{\rho-2} u\,(x,t) = \psi\,(x)\,,\ \ x \in \Omega \tag{2}$$

and boundary condition

$$u\,(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

where $\varphi(x)$, $\psi(x)$ and $f(x,t)$ are given smooth functions and $\triangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ is the Laplace operator.

Definition 1. A function $t^{1-\rho}u(x,t) \in C(\bar{\Omega} \times [0,T])$ with the properties

1. $\partial_t^{\rho-1}u(x,t), \quad \partial_t^{\rho-2}u(x,t) \in C(\Omega \times (0,T])$,

2. $\partial_t^{\rho}u(x,t), \quad \triangle u(x,t) \in C(\Omega \times (0,T])$,

and satisfying conditions (1)-(3) is called **the classical solution** of the forward problem (1)-(3).

When proving the existence of solutions to forward problem, it is necessary to study the convergence of series of the form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\tau} |h_k|^2, \quad \tau > \frac{N}{2} \tag{4}$$

where h_k - is the Fourier coefficient of function $h(x)$. In the case of integers τ, the conditions for the convergence of such series in terms of the membership of the function $h(x)$ in classical Sobolev spaces $W_2^1(\Omega)$ were obtained in the work of V.A. IlвГЄin [1]. To formulate these conditions, we introduce the class $\dot{W}_2^1(\Omega)$ as the closure in the $W_2^k(\Omega)$ norm of the set of all functions that are continuously differentiable in Ω and vanish near the boundary of Ω.

So, if function $h(x)$ satisfies the conditions

$$h(x) \in W_2^{[\frac{N}{2}]+1}(\Omega) \quad va \quad h(x), \Delta h(x), ..., \Delta^{[\frac{N}{4}]} \in \dot{W}_2^1, \tag{5}$$

then the number series (4) (we can take $\tau = \frac{N}{2} + 1$ if N is even, and $\tau = \frac{N+1}{2}$ if N is odd) converges.

Theorem 1. Let $\tau > \frac{N}{2}$, $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ functions satisfy conditions 4 Moreover, let $t^{1-\rho} f(x,t)$ as a function of x satisfy conditions 4 for all $t \in [0,T]$. Then there exists a unique solution of the forward problem (1)-(3) and this classical solution has the representation

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\varphi_j t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_j t^{\rho}) + \psi_j t^{\rho-2} E_{\rho,\rho}(-\lambda_j t^{\rho}) + \int_0^t f_j(t-\xi) \xi^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_j \xi^{\rho}) d\xi \right] v_j(x) \tag{6}$$

where φ_j, ψ_j and $f_j(t)$ are the Fourier coefficients of functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $f(x,t)$.

Literature

1. Il'in V.A. Fundamental systems of functions of the Laplace operator in an arbitrary domain and asymptotic estimates for fundamental numbers // Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences. year 1967. Vol. -177, №1, P. 25–28.

Inverse Source Problem For The Time-Fractional Parabolic Equation On Metric Graphs With Final Overdetermination Condition

Sobirov Z. A.[1], **Narziyeva I. A.**[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
z.sobirov@nuu.uz
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
ironarziyeva4@gmail.com

In this talk, we investigate direct and inverse source problems for time-fractional parabolic type equation on a metric graph with final-time overdetermination condition. A graph $\mathcal{G}$ consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_j\}_{j=1}^{k}$ and edges $E = \{e_j\}_{j=1}^{n}$. Each edge e_i is assigned an interval $(0, l_j)$ and has coordinates x_j. The set of boundary vertices is denoted by $\partial\mathcal{G} \subset V$. We set $C[\mathcal{G}]$ as a space of functions u defined on the graph and uniformly continuous on each of its edges.

We are interested in the following time-fractional parabolic equation with the Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$ on $\mathcal{G}_T = \{\mathcal{G} \times [0,T]\}$

$$\partial_{0,t}^{\alpha} u(x,t) + \mathcal{L}u = f(x)g(x,t), \quad x \in e_j, \quad t \in (0,T],$$

where

$$\mathcal{L}u\big|_{e_j} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a^{(j)}(x,t)\frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x}\right) + b^{(j)}(x,t)u_x^{(j)}(x,t) + c^{(j)}(x,t)u^{(i)}(x,t),$$

with initial conditions

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in e_j,$$

the vertex conditions at inner vertices

$$\begin{cases} u(x,t) \ \textit{are continuous in } \nu, \\ \sum\limits_{e_i \sim \nu} \sigma_{e_i,\nu}\left\{a^{(j)}(\nu,t)\frac{\partial}{\partial x}u^{(j)}(\nu,t)\right\} = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\mathcal{G}, \end{cases}$$

where $\sigma_{e_i,\nu} = 1$ if ν is the right end of the edge e_i, $\sigma_{e_i,\nu} = -1$ if ν is the left end of the edge e_i, and at each boundary vertex, Dirichlet conditions

$$u(\nu,t) = 0, \quad \nu \in \partial\mathcal{G}, \quad t \in [0,T],$$

where $0 < A_0 \le a^{(j)}(x) \le A_1 < +\infty$, $j = \overline{1,n}$, and we suppose that $a, b, c \in C[\mathcal{G}]$, $c(x,t) > 0$.

The main aim is to find the pair of functions $\{u(x,t), f(x)\}$. To find $f(x)$, which is the solution of the inverse problem, we need an an additional condition. That is why we introduce an additional condition of the form

$$u\big|_{t=T} = \psi(x), \quad x \in e_j,$$

where $\psi(x)$ is a given function.

References

1. Evans L. C. Partial Differential Equations. American Mathematical Soc., 2010.

2. Leugering G., Mophou G., Moutamal M., and Warma M. Optimal control problems of parabolic fractional Sturm-Lioville equations in a star graph// Mathematical Control and Related Fields, (2022) vol. 13 №2, pp. 771-807.

Inverse Source Problems For The Time-Fractional Diffusion-Wave Equation

Rahmonov A. A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan; araxmonov@mail.ru

We consider the following fractional diffusion-wave equation:

$$\partial_t^\alpha u(t) + Au(t) = F(t), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

with the Caputo time fractional derivative ∂_t^α of order $1 < \alpha < 2$, with the non-local initial conditions

$$\gamma u(0) + u(T) = \varphi, \quad \partial_t u(T) = \psi, \tag{2}$$

here, we assume that the γ is given number, φ and ψ are given elements of a separable Hilbert space H. Moreover, $A : H \to H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H and A^{-1} is a compact operator. First we consider the following *direct problem:* given α, γ, φ, ψ and $F(t)$, find a function $u(t)$ satisfies the Eq. (1) and the nonlocal initial conditions (2).

Next, based on the direct problem, we consider the following inverse problem of finding the coefficient $p(t)$ in (1) with $F(t) = fp(t)$, i.e., the coefficient depends on only time variable.

Inverse problem. Given α, γ, $\varphi = \psi = 0$ and f, find a pair of functions $\{u, p(t)\}$ satisfying the problem (1)-(2) and the additional condition

$$\Phi[u(t)] = h(t), \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

where $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ is a given function, $\Phi : D(\Phi) \subset H \to \mathbb{R}$ is a known linear bounded functional.

In this work, we derive sufficient conditions for the given functions that ensure the existence and uniqueness of the inverse problem (1)-(3).

The Direct And Inverse Problems For The Fractional Equation With The Hilfer Derivative

Fayziev Yu. E.[1,3], **Sadullaeva Sh. Sh.**[2]

[1] National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; fayziev.yusuf@mail.ru
[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; ssh45984@gmail.com
[3]Karshi State University, Karshi, Uzbekistan.

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(,)$, the norm $\| \cdot \|$ and $A : H \to H$ be a self-adjointed, positive, unbounded arbitrary operator defined in H, with the domain of definition $D(A)$. Suppose that the operator A has a complete system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \to +\infty$.

The integral of the Riemann-Liouville order α of the function $y(t)$ in the interval $[0, +\infty)$ is defined by the following formula (see [1]):

$$I^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} y(\xi) d\xi.$$

The Hilfer fractional derivative of order $1 < \alpha < 2$ and $0 \leq \beta \leq 1$ of the function $y(t)$ is defined as following (see [2]):

$$D^{\alpha,\beta} y(t) = I^{\beta(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} I^{(1-\beta)(2-\alpha)} y(t), \quad t > 0.$$

Let $1 < \alpha < 2$ and $0 \leq \beta \leq 1$ are a fixed number and let $C((a,b); H)$ stands for a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a,b)$ with values in H.

Consider the following problem:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t \leq T; \\ \lim\limits_{t \to +0} I_t^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(t) = \varphi, \\ \lim\limits_{t \to +0} \frac{d}{dt} I_t^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(t) = \phi, \end{cases} \tag{1}$$

where $\varphi, \phi \in H$ and $f(t) \in C([0,T]; H)$ are given functions.

The problem (1) also called the *direct problem.*

Definition. A function $t^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(t) \in C([0,T]; H)$ with the properties $D_t^{\alpha,\beta} u(t)$, $Au(t) \in C((0,T]; H)$ and satisfying conditions (1) is called the solution of the problem (1).

Theorem 1. *Let $\varphi, \phi \in D(A)$, and $f(t) \in H$. Then the problem (1) has a unique solution and this solution has the following form:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-2)} E_{\alpha,\beta+(1-\beta)(\alpha-1)}(-\lambda_k t^{\alpha}) \tag{2}$$

$$+ \phi_k t^{\alpha-1+\beta(2-\alpha)} E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^{\alpha}) f_k(t-\tau) d\tau \Big] v_k,$$

where φ_k, ϕ_k *and* $f_k(t)$ *are the Fourier coefficients of the function* φ, ϕ *and* $f(t)$ *respectively.*

Let us consider the inverse problem, for this we need an additional condition. We use the following condition as an additional condition for the problem (1) :

$$u(\tau) = \psi, \quad 0 < \tau < T \tag{3}$$

in which the unknown element $f \in H$ does not depend on t and φ, ϕ, $\psi \in H$ are given elements.

Theorem 2. *Let* $1 < \alpha < 2$, $0 \le \beta \le 1$ *and* $\varphi, \phi \in H$, $\psi \in D(A)$. *Then the inverse problem* (1), (3) *has a unique solution* $\{u(t), f\}$ *and this solution has the following form:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-2)} E_{\alpha,\beta+(1-\beta)(\alpha-1)}(-\lambda_k t^{\alpha}) + \tag{4}$$

$$+\phi_k t^{\alpha-1+\beta(2-\alpha)} E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}(-\lambda_k t^{\alpha}) + f_k t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^{\alpha}) \Big] v_k,$$

where

$$f_k = \frac{\psi_k}{\tau^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^{\alpha})} - \frac{\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-2)} E_{\alpha,\beta+(1-\beta)(\alpha-1)}(-\lambda_k \tau^{\alpha})}{\tau^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^{\alpha})} -$$

$$- \frac{\phi_k \tau^{\alpha-1+\beta(2-\alpha)} E_{\alpha,\alpha+\beta(2-\alpha)}(-\lambda_k \tau^{\alpha})}{\tau^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^{\alpha})}$$

and

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k. \tag{5}$$

Literature

1. C. Lizama, *Abstract linear fractional evolution equations. Handbook of Fractional Calculus with Applications, 2019.*

2. R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculs in Physics (World Scientific,Singapore, 2000).*

3 R. Hilfer, Y. Luchko, Z. Tomovski, *Operational method for solution of the fractional differential equations with the generalized Riemann-Liouville fractional derivatives* // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2009. Vol. 12. №. 3. P. 299–318.

Existence And Uniqueness Of A Time-Dependent Coefficient And Source Problem For Fractional Telegraph Equation

Saparbayev R.
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
University street 9, Tashkent 100174, Uzbekistan.
rajapboy1202@gmail.com

Consider the fractional telegraph equation in the domain $(0,\pi)\times(0,T]$,

$$(D_{0t}^{\alpha}\circ D_{0t}^{\alpha})u(x,t)+2aD_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)-r_1(t)u(x,t)+r_2(t)f(x,t), \tag{1}$$

with the initial conditions

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,0)=\varphi_0(x),\quad x\in[0,\pi], \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad x\in[0,\pi], \tag{3}$$

and the boundary conditions

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad 0<t\leq T, \tag{4}$$

where D_{0t}^{α} is the Caputo fractional derivative of order $0<\alpha<1$ in the time variable and $\varphi_0(x),\varphi_1(x),f(x,t)$ are given smooth functions. We call this problem the forward problem.

Definition 1. (see, [1]) The Caputo fractional derivative of order $0<\alpha<1$ of the integrable function $u(x,t)$ is defined by

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\frac{d}{d\tau}u(x,\tau)d\tau.$$

We formulate the inverse problem as follows: find the functions $u(x,t)$, $r_1(t)$, $r_2(t)$, $0<t\leq T$ in (1), if the solution of the forward problem (1)-(4) satisfies conditions

$$\int_0^{\pi}\rho_i(x)u(x,t)dx=\psi_i(t),\quad 0<t\leq T, \tag{5}$$

$\rho_i(x)$, $\psi_i(t)$, $i=1,2$ are given functions.

One of the first works studying the fractional-time telegraph equation is the fundamental paper by R. Cascaval et al.[2]. In the paper [3] this equation with the right-hand side $f(t)$ is considered and conditions for the initial functions and the right-hand side of the equation are found that guarantee both the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem. It should be emphasized that these conditions turned out to be less restrictive than was assumed in the paper by R. Cascaval et al. [2], where some restrictions on the spectrum of the operator A were also assumed. Work [4] is a continuation of the article [3], where the authors investigated the inverse problem of determining the right-hand side $f(t)$ of the equation.

In the present paper we first investigate the forward problem. By the separating variables method, the forward problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using estimates of the Mittag-Lefer function and generalized singular Gronwall inequalities, an estimate for the solution of the forward problem is obtained in terms of the norm of the unknown functions. The inverse problem is reduced to the equivalent system of integral equations. For solving this system, the contracted mapping principle is applied.

Literature

1. A. V. PSKHU, Partial Differential Equations of Fractional Order, Moscow, Nauka, 2005, [in Russian].

2. Cascaval.R. Eckstein.E. Frota.C. Goldstein.A. Fractional telegraph equations. J. Math.Anal. Appl. 2002. 276(1), 145-159.

3. Ashurov.R. Saparbayev.R. Fractional telegraph equation with the Caputo derivative. Fractal Fract. 2023. 7(6), 1-17.

4. Ashurov.R. Saparbayev.R. Time-dependent identification problem for a fractional Telegraph equation with the Caputo derivative. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2024. 27, 652–676.

Application Of L^p-L^q Boundedness Of Fourier Multipliers To Heat-Type Equation On Non-Commutative Euclidean Space

Shaimardan S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan
shaimardan.serik@gmail.com

Let $0 < \alpha \leq 1$ and $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. In this subsection, we obtain the L^p-L^q norm estimates for the solutions of heat type equation generated by the operator $\mathcal{L}$ on $L^p(\mathbb{R}^d_\theta)$ defined by

$$\mathcal{L}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sigma(\xi)\widehat{x}(\xi)U_\theta(\xi)d\xi, \tag{1}$$

with the symbol σ satisfying the condition

$$M_t := \sup_{0<\rho<1} \rho \left(\mathrm{Vol}\{\xi \in \mathbb{R}^d : |\sigma(\xi)| \leq t^{-\alpha}(\rho^{-1}-1)\}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < \infty, \tag{2}$$

for $t > 0$. Here and below, Vol - means the volume of a set in $\mathbb{R}^d$. Let us define the Caputo fractional operator (see, [1, Chapter 2]) in time as follows

$$\left({}^cD^\alpha_t f\right)(s) = \left(I^{[\alpha]-\alpha}\partial^{[\alpha]} f\right)(s), \quad s > 0,$$

where $[\alpha]$ denotes the smallest integer greater or equal than $\alpha > 0$ and the Riemann-Liouville fractional integral $I^\alpha f$ of order $\alpha > 0$ (see, [1, Chapter 2]) is defined by

$$\left(I^\alpha f\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s (s-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad s > 0,$$

where f is a continuous function on the interval $[0, s]$.

Remark. *For further investigation, we will use the two-parameter Mittag-Leffler function (see, [1, Section 1.8]) frequently*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Also, we need the following estimate in [2, Subsection 2.1]:

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad 0 < \alpha < 2, \tag{3}$$

where $C > 0$ is a constant independent of z. Note that, $E_{\alpha,1}(\cdot)$ is briefly denoted by $E_\alpha(\cdot)$, is the usual Mittag-Leffler function.

For a Banach space X, we denote by $C([0,\infty), X)$ the Banach space of continuous X-valued functions on the interval $(0, T]$ with the norm

$$\|f\|_{C([0,\infty),X)} = \sup_{0\leq s<\infty T} \|f(s)\|_X.$$

We consider the following heat type equation

$$\left({}^c D_t^\alpha u\right)(t) + \mathcal{L}u(t) = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{4}$$

with the initial data

$$u(0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d_\theta). \tag{5}$$

The next result gives the L^p-L^q estimates for the solution of problem (4)-(5).

Theorem. *Let $0 < \alpha \leq 1$ and $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. Let $\mathcal{L}$ be an operator defined by (1) with the symbol σ satisfying condition (2). If $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d_\theta)$, then there exists a solution $u \in C([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^d_\theta))$ for the $\mathcal{L}$-heat type equation (4)-(5), represented by*

$$u(t) = E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{L})u_0, \quad t > 0,$$

where the propagator is defined as

$$E_\alpha(-t^\alpha \mathcal{L}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \mathcal{L}^k.$$

Moreover, we have the following time decay rate for all $t > 0$,

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d_\theta)} \lesssim M_t \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d_\theta)}. \tag{6}$$

In particular, if

$$|\sigma(\xi)| \gtrsim |\xi|^\lambda \quad as \quad |\xi| \to \infty, \quad for\ some\ \lambda > 0, \tag{7}$$

then we get the following time decay rate for all $t > 0$,

$$\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d_\theta)} \leq C_{\alpha,\lambda,p,q} t^{-\frac{d\alpha}{\lambda}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d_\theta)}, \quad \lambda \geq d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \tag{8}$$

References

1. A.A. Kilbas. Theory and applications of fractional differential equations. 1st Edition, Volume 204-January 12, 2006.

2. I. Podlubny, Fractional Diferential Equations. Academic Press, San Diego (1999).

A Tutorial On Fractional Burger Model For Tunnel Design

Abhishek Tiwari[1], **Shashank Pathak**[1]
Indian Institute of Technology Mandi, Himachal Pradesh, India - 175005
shashank@iitmandi.ac.in; shashankpathaks@gmail.com

The tunnels are constructed by boring long cylindrical cavities through rocks. Due to the presence of tectonic stresses, we cannot leave these cavities unsupported for a longer time. Otherwise, these cavities would begin to converge and collapse. Therefore, an accurate prediction of the tunnel closure with time is needed by analysing the creep in the rocks subjected to tectonic stresses. Several studies highlight that the fractional creep models fit the experimental data with high accuracy, therefore, now the researchers are using a variety of fractional models to understand the tunnel closure. One such popular model is Burger's model [1]. However, due to the lack of training in fractional calculus, it is not yet being used on the industrial scale by tunnel engineers. Therefore, this paper serves as a tutorial where a simplified approach to obtaining the governing creep equation of rocks is discussed and a non-dimensional tunnel closure model is developed. Moreover, some conditions on the model parameters are highlighted to model a weak rock behaviour exhibiting large long-term deformation.

TUNNEL CLOSURE MODEL

Consider a long circular tunnel in a viscoelastic rock medium modelled using fractional Burger model. In a rheological model, the two fundamental elements are: spring and dashpot. For the spring element the strain ϵ_s is linearly related to the stress σ through a stiffness K as: $\epsilon_s = \sigma/K$. For the Abelian dashpot, $D^\alpha[\epsilon_d] = \sigma/\eta$. Here, $D^\alpha[\cdot]$ denotes the Caputo's time-derivative of order $\alpha \in (0,1)$ and η is the corresponding viscosity coefficient and ϵ_d is dashpot strain. The choice of the Caputo derivative is motivated by its capability to account for the non-zero initial conditions [2]. The governing equation can be developed using the stress equilibrium and strain compatibility conditions. In the case of multiple spring and dashpot elements, as in fractional Burger model, developing the governing equation can be a tedious process. This complication can be avoided if we define a dashpot like an equivalent spring with stiffness equal to $\eta D^\alpha[\cdot]$ in an operator format. Thus, we get the following for fractional Burger model:

$$\left[\frac{D^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1K_2} + \frac{D^{\alpha_1}}{\eta_2 K_1} + \left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\frac{D^{\alpha_2}}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_1\eta_2}\right]\sigma(t) = \left[\frac{D^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1} + \frac{D^{\alpha_2}}{\eta_1}\right]\epsilon(t). \quad (1)$$

where K_1 and K_2 are stiffness parameters and η_1, α_1 and η_2, α_2 are dashpot parameters. Since tectonic stress are large and do not vary much with time, we assume $\sigma = \sigma_o$ (a constant), hence, we get:

$$\left[\frac{1}{\eta_1\eta_2}\right]\sigma_o = \left[\frac{D^{\alpha_1+\alpha_2}}{K_1} + \frac{D^{\alpha_2}}{\eta_1}\right]\epsilon. \quad (2)$$

Note that the Caputo derivative of constant σ is zero. The initial condition to solve Eq. 2 is defined by the initial strain at $t = 0$ (elastic deformation) given as $\epsilon(0) = \sigma_o/K_2$. Solving Eq. 2 using Laplace transform approach leads to:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_o}{K_2} + \frac{\sigma_o}{\eta_2}\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma[\alpha_2+1]} + \frac{\sigma_o}{\eta_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-K_1/\eta_1)^k t^{\alpha_1(1+k)}}{\Gamma[\alpha_1(1+k)+1]}. \quad (3)$$

Таблица 1: Some combinations of model parameters and normalized tunnel closure $C_n(t) \times t^{\alpha_1}$

Sl. No.	$\mathbf{K_1 : \eta_1 : \eta_2}$	α_1	α_2	$\mathbf{C_n(10) \times 10^{\alpha_1}}$	$\mathbf{C_n(1000) \times 1000^{\alpha_1}}$
1	0.1:10:1	0.5	0.5	39.1531	384.4673
2	0.1:10:1	0.05	0.5	36.8220	358.2551
3	0.1:10:10	0.5	0.5	7.0388	63.3250
4	0.1:10:1	0.5	0.05	14.9961	42.1523
5	0.1:10:10	0.05	0.5	4.7077	37.1128
6	0.1:10:10	0.5	0.05	4.6231	29.0935
7	0.1:10:1	0.05	0.05	12.6650	15.9401
8	0.1:1:10	0.5	0.5	3.1211	11.8627
9	0.1:1:10	0.5	0.05	2.8795	8.4395
10	0.1:1:10	0.05	0.5	1.3906	4.8359
11	0.1:10:10	0.05	0.05	2.2920	2.8813
12	0.1:1:10	0.05	0.05	1.1491	1.4128

Considering the plane-strain problem in polar coordinates and using the correspondence principle, the following radial deformation u_r as a function of radial distance r from the centre of the tunnel is obtained:

$$u_r = \frac{\sigma_o r}{2}\left[\frac{1}{K_2} + \frac{1}{\eta_2}\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma[\alpha_2+1]} + \frac{1}{\eta_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-K_1/\eta_1)^k t^{\alpha_1(1+k)}}{\Gamma[\alpha_1(1+k)+1]}\right]. \tag{4}$$

The tunnel convergence $C(t)$ is defined as $2(u_r(a) - u_o(a))$, where a is the tunnel radius and u_o represents the time-independent elastic displacement. Thus, we get the following non-dimensional tunnel closure rate $C_n(t)$:

$$C_n(t) = \frac{C(t)}{a}\frac{\eta_1}{\sigma_o t^{\alpha_1}} = \frac{\eta_1 t^{\alpha_2}}{\eta_2 t^{\alpha_1}}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-K_1 t^{\alpha_1}/\eta_1)^k}{\Gamma[1+\alpha_1(1+k)]}. \tag{5}$$

As listed in Table 1, the relative magnitudes of η_1, η_2, and K_1 will influence the tunnel closure response. When $\eta_1 \geq \eta_2$, the long-term and short-term deformations are significant and quite sensitive to the value of α_2. When $\eta_1 < \eta_2$, the short-term deformations are not sensitive to α_1 and α_2, and the long-term deformations are also not significant. Based on this limited study, one can understand that weaker rocks (exhibiting large deformations) would be represented by higher values of fractional orders and a higher ratio of viscosities of the first dashpot η_1 to the second dashpot η_2. There is a further need to rigorously analyse the extent of the sensitivity of tunnel deformation on model parameters.

Literature

1. Okuka AS, Zorica D. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models. Acta Mechanica. 2018 Aug; 229(8):3557-70.

2. Pathak S. Fractional Differential Equations: A Primer for Structural Dynamics Applications. In Analysis and PDE Workshop 2021 Jan 1 (pp. 271-281). Cham: Springer Nature Switzerland.

A Mixed Problem For A Fourth-Order Partial Differential Equation With Two Degeneracy Lines

Sobirjonova M. K.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
mohinurqahramonovna1@gmail.com

In the present thesis, in a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, we consider the following equation

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}u(x,t) + \left[x^{\beta}(1-x)^{\gamma}u_{xx}(x,t)\right]_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

where ${}_CD^{\alpha}_{0t}$ is Caputo fractional differential operator α order [1]

$$ {}_CD^{\alpha}_{0t}g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{g^{(n)}(z)dz}{(t-z)^{\gamma-n+1}}, \quad (n = [Re(\gamma)] + 1, t > 0),$$

α, β, γ, T are given real numbers, such that $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1, \quad T > 0; \quad f(x,t)$ is a given function on Ω.

First, we introduce the definition to the regular solution of the equation (1) in the domain Ω.

Definition. A function $u(x,t)$ satisfying in the domain Ω equation (1) and the following conditions $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}), \quad {}_CD^{\alpha}_{0t}u(x,t), \quad (x^{\beta}(1-x)^{\gamma}u_{xx})_{xx} \in C(\Omega)$ is called regular in the domain Ω solution of the equation (1).

We study the following problem for the equation (1):

Problem 1. Find a regular in the domain Ω solution of the equation (1) satisfying the following initial and the boundary conditions:

$$ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2}$$

$$ u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^{\beta}(1-x)^{\gamma}u_{xx}(x,t) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left[x^{\beta}(1-x)^{\gamma}u_{xx}(x,t)\right]_x = 0, \tag{3}$$

where $\varphi(x)$ is a given sufficiently smooth function.

By applying Fourier's method to the considered problem, i.e., seeking a solution of the corresponding homogeneous equation to (1) that satisfies condition (3) in the form $u(x,t) = T(t)v(x)$, we obtain the following spectral problem:

$$ \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]'' = \lambda v(x), \quad x \in (0,1) \tag{4}$$

$$ v(1) = 0, \quad v'(1) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^{\beta}(1-x)^{\gamma}v''(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left[x^{\beta}(1-x)^{\gamma}v''(x)\right]' = 0. \tag{5}$$

Using the theory of integral equations with symmetric kernels, we proved the existence of the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem $\{(4),(5)\}$, i.e. the problem $\{(4),(5)\}$ has a countable set of eigenvalues $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ and corresponding orthonormal eigenfunctions $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots$ and, also any arbitrary function $g(x) \in L_2[0,1]$ expands into a series in these eigenfunctions, which converges on average.

Let $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ be the eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem $\{(4),(5)\}$, respectively.

We proved the following lemmas.

Lemma 1. On the interval $[0,1]$ the following series converge uniformly:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2(x)/\lambda_k,\ \sum_{k=1}^{+\infty} [v_k'(x)]^2/\lambda_k,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \left[x^\beta(1-x)^\gamma v_k''(x)\right]^2/\lambda_k^2,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{\left[x^\beta(1-x)^\gamma v_k''(x)\right]'\right\}^2/\lambda_k^2.$$

Lemma 2. Suppose the following conditions hold:

$$f(x),\quad f'(x)\in C[0,1],\quad x^{\beta/2}(1-x)^{\gamma/2}f''(x)\in L_2[0,1],\quad f(1)=0,\quad f'(1)=0.$$

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k f_k^2 \le \int_0^1 x^\beta(1-x)^\gamma\left[f''(x)\right]^2 dx. \tag{7}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (7).

Here in after f_k denotes Fourier coefficient of the function $f(x)$ by the system of eigenfunctions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Lemma 3. Let the following conditions hold:

$$\begin{aligned}&f(x),\quad f'(x),\quad x^\beta(1-x)^\gamma f''(x),\quad \left[x^\beta(1-x)^\gamma f''(x)\right]'\in C[0,1],\\ &\left[x^\beta(1-x)^\gamma f''(x)\right]''\in L_2[0,1],\quad f(1)=0,\quad f'(1)=0,\\ &\lim_{x\to 0}x^\beta(1-x)^\gamma f''(x)=0,\lim_{x\to 0}\left[x^\beta(1-x)^\gamma f''(x)\right]'=0.\end{aligned}$$

Then the following Bessel type equality is valid:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 f_k^2 \le \int_0^1\left[\left(x^\beta(1-x)^\gamma f''(x)\right)''\right]^2 dx. \tag{8}$$

Particularly, it is possible to assert convergence of the series in (8).

Our main result is as follows:

Theorem 1. Let the following conditions be fulfilled:

1. $\varphi(x)$ satisfies the conditions of Lemma 1.
2. $f(x,t)$ satisfies the conditions of Lemma 1 uniformly with respect to t.
3. $f_t'(x,t)$ satisfies the conditions of Lemmas 1 and 2 uniformly with respect to t.

Then the unique solution of the problem $\{(1),(2),(3)\}$ is defined by

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\varphi_k E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)+\int_0^t (t-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_k(t-z)^\alpha]f_k(z)dz\right]v_k(x), \tag{9}$$

where $E_{\alpha,\beta}(z)$ is two-parameter Mittage-Leffler's function [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}.$$

References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equation. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. Mikhlin S.G. Linear integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1959.
3. Podlubny I. Fractional differential equations. United States: Academic Press, 1999.

Abstract
Global solutions of a fractional wave equation

Suleman I. A.[1], **Kirane M.**[2]
[1] Khalifa University, Abu Dhabi, UAE;
Sulemani30@yahoo.com
[2] Khalifa University, Abu Dhabi, UAE;
Mokhtar.Kirane@yahoo.com

This article addresses global existence of solutions to a space fractional wave equation with a nonlocal nonlinearity. Specifically, we apply Matsumura-type estimates of the solution of the linear problem

$$\varepsilon u_{tt} + u_t + (-\Delta)^{\beta} u = 0,$$

to establish unique local in time mild solutions, and global solutions, under the influence of the nonlinear term.

References

1. A. Alsaedi, B. Ahmad and M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 20, no. 3, pp. 574-594, 2017.
2. D.T. Pham, M.K. Mezadek and M. Reissig, Global existence for semi-linear structurally damped σ-evolution models, Journal of Mathematical Analysis an Applications, vol. 431, no. 1, pp. 569-596, 2015.
3. A. Fino and M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quaterly of Applied Mathematics, vol. 70, no. 1, pp. 133-157, 2012.
4. G. Todorova and B. Yordanov, Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping, Journal of Differential equations, vol. 174, no. 2, pp. 464-489, 2001.
5. A. Matsumura, On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equation, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, vol. 12, no. 1, pp. 169-189, 1976.

Initial-Boundary Value Problem For A Partial Differential Equation Containing Integro-Differential Operator With Bessel Function In The Kernel

Usmonov D.A.[1], **Tokhirjonov U.R.**[2]
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
tokhirjonovumidjon2105@gmail.com
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
usmonov-doniyor@inbox.ru;

In a rectangular domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$, we consider the following equation:

$$ {}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma} u\,(x,t) - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is the unknown function, α, γ, T are given real numbers, such that $1 < \alpha < 2$, $T > 0$ and the operator ${}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma}$ is defined as follows:

$$ {}_CD_{at}^{\alpha,\gamma} f(t) = I_{at}^{2-\alpha,\gamma} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) f(t) =$$

$$ = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t (t-y)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2}[\gamma(t-y)] \left(\frac{d^2}{dy^2} + \gamma^2 \right) f(y)dy, \quad t > a,$$

that operator is referred to as the left-sided and generalized Caputo fractional derivatives of order α for the function $f(t)$ [1],

$$ \bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k},$$

$(z)_k = \Gamma(z+k)/\Gamma(z)$ is the Pochhammer symbol [2], $\Gamma(x)$ is the Euler's gamma–function [2], $J_\nu(x)$ is the Bessel function of the first kind of order ν [3].

Problem G. Find a function $u(x,t)$ satisfying the following conditions:

1) $u\,(x,t) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right),\quad u_{xx}\,(x,t)\,,\ {}_CD_{0t}^{\alpha,\gamma} u\,(x,t) \in C\,(\Omega)$;

2) It satisfies equation (1) in the domain Ω;

3) It satisfies the following initial and boundary conditions:

$$ u\,(x,0) = \varphi_1\,(x)\,, \quad u_t\,(x,0) = \varphi_2\,(x)\,, \quad x \in [0,1]\,;$$

$$ u\,(0,t) = 0, \quad u\,(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]\,,$$

where $\varphi_k\,(x)\,,\ k = \overline{1,2}$ are given continuous functions.

Theorem 1. Let $\varphi_k\,(x) \in C^2\,[0,1] \cap C^3\,[0,1]\,,\ \varphi_k\,(0) = \varphi_k\,(1) = 0,\ \varphi''_k\,(0) = \varphi''_k\,(1) = 0,\ k = \overline{1,2}$. Then the solution to the problem G is unique, exists, and is given by the following formula:

$$ u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} \mathbb{E}_{\alpha,1,\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[-(\pi n)^2 t^\alpha, \gamma t \right] \sin(\pi n x) +$$

$$ + \sqrt{2} t \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{2n} \mathbb{E}_{\alpha,2,\frac{1}{2}} \left[-(\pi n)^2 t^\alpha, \gamma t \right] \sin(\pi n x),$$

where

$$ \mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \bar{J}_{\alpha n/2+\theta}(y) \tag{2}$$

that (2) is a function similar to the Mittag-Leffler function[1].

References

1. Urinov A., Usmonov D. On the Cauchy problem for an ordinary differential equation containing integro differential operator with function Bessel in the kernel. Bull. Inst. Math., 2023, Vol.6, №1, pp. 138–153.

Time-Dependent Inverse Source Problem For A Generalized Telegraph Equation With The Prabhakar-Caputo Fractional Derivative

Turdiev Kh. N.

Fergana state university, Fergana, Uzbekistan;
xurshidjon2801@gmail.com

We consider the following time-fractional generalized telegraph equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\,{}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u\left(t,x\right)-a\frac{\partial}{\partial x}u\left(t,x\right)-b\,{}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u\left(t,x\right)=f\left(t\right) \tag{1}$$

in a domain $\Omega=\{(t,x):0<t<q,0<x<p\}$. Here $f(t)$ is unknown function,

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y\left(t\right)=\ {}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta}\frac{d^{m}}{dt^{m}}y\left(t\right)$$

represents Caputo-Prabhakar fractional derivative [1] and

$${}^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y\left(t\right)=\int_{0}^{t}\left(t-\xi\right)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta\left(t-\xi\right)^{\alpha}\right]y\left(\xi\right)d\xi,\quad t>0$$

represents Prabhakar fractional integral [2]. We note that above-given definitions are valid for α, β, γ, δ, $a,b\in\mathbb{R}$ such that $\alpha>0$ and $0<\beta<1$.

Here $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(z\right)$ is the generalized Mittag-Leffler function [2]:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma\right)_{m}}{\Gamma\left(\alpha m+\beta\right)}\frac{z^{m}}{m!}.$$

We now consider an inverse source problem for the equation (1) as follows.

Problem *I*. To find a pair of functions $\{u(t,x),f(t)\}$, satisfying:

1) regularity conditions

$$u(t,x)\in C(\overline{\Omega}),\ u_{x}(t,x)\in C(\Omega),\ {}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}u(t,x)\in C(\Omega),\ f(t)\in C[0,q];$$

2) Eq. (1) in Ω;

3) the initial condition

$$u(0,x)=\tau(x),\ 0\leq x\leq p;$$

4) the boundary condition

$$u(t,0)=\varphi(t),\ 0\leq t\leq q;$$

5) the over-determination condition

$$u_{x}(t,0)=\omega(t),\ \ 0\leq t\leq q.$$

Here $\tau(x)$, $\varphi(t)$ and $\omega(t)$ are given functions, such that $\tau(0) = \varphi(0)$.

We equivalently reduce the formulated problem to the second kind of Volterra integral equation, and by solving it using the successive iteration method, we will represent the solution in an explicit form. The solution is represented via bivariate and trivariate Mittag-Leffler functions.

References

1. D'Ovidio, M., & Polito, F. (2018). Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions. Theory Probab. Appl., Vol. 62, Issue 4, 552–574.

2. Prabhakar, T.R. (1971). A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama Math. J., Vol. 19, 7–15.

Fractional Sturm–Liouville Problem On Metric Graphs

Sobirov Z. A.[1], **Turemuratova A. A.**[2], **Kulaev R. Ch.**[3]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
z.sobirov@nuu.uz
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
turemuratova_a@nuu.uz
Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences
North Ossetian State University after K.L. Khetagurov
kulaevrch@mail.ru

A graph $\mathcal{G}$ consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_i\}_{i=1}^{j}$ and a set $E = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ of edges. Each edge e_i is assigned the interval $(0, l_i)$, $i = \overline{1,n}$, and the coordinates x_i are defined on each edge. Let $\partial\mathcal{G} \subset V$ be the set of boundary vertices of the graph.

We consider the following fractional differential equation on the graph $\mathcal{G}$

$$\mathcal{L}u = \lambda r u, \quad x \in e_i, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1,$$

where $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, $r : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, and

$$\mathcal{L}u\big|_{e_i} = \partial^{\beta}_{x,l_i}\left(p^{(i)}(x) D^{\beta}_{0,x} u^{(i)}(x)\right),$$

where $0 < a_0 \le p^{(i)} \le a_1 < +\infty$, $0 < R_0 \le r^{(i)} \le R_1 < +\infty$ and we suppose that $r, p \in C[\mathcal{G}]$. At each interior vertex ν, continuity conditions and transmission conditions

$$\begin{cases} I^{1-\beta}_{0,x} u^{(i)}(x) \text{ are continuous in } \nu, \\ \sum\limits_{e_i \sim \nu} \sigma_{e_i,\nu} p^{(i)}(\nu) D^{\beta}_{0,x} u^{(i)}(\nu) = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\mathcal{G}, \end{cases}$$

are specified, where $\sigma_{e_i,\nu} = 1$ if ν is the right end of the edge e_i, $\sigma_{e_i,\nu} = -1$ if ν is the left end of the edge e_i, and at each boundary vertex, Dirichlet conditions

$$I^{1-\beta}_{0,x} u(\nu) = 0, \quad \nu \in \partial\mathcal{G},$$

are specified.

We studied a fractional analog of the Sturm-Liouville problem on a metric graph, combining left Riemann-Liouville and right Caputo type fractional derivatives. This approach yields a symmetric and positive analog of the Sturm-Liouville operator. We established that this operator has countably many eigenvalues converging to infinity and examined the convergence of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$, providing estimates for the eigenfunctions. Our results enhance similar findings from references [1] and [2].

References

1. Klimek M., Malinowska A. B., Odzijewicz T. Applications of the fractional Sturm–Liouville problem to the space–time fractional diffusion in a finite domain//Frac. Calc. and Frac. Analysis. 2016. Vol. 19, №. 2.

2. Klimek M., Ciesielski M., Blaszczyk T. Exact and numerical solutions of the fractional Sturm–Liouville problem //Frac. Calc. and Frac. Analysis. 2018. Vol. 21, №. 1.

Well-Posedness Time-Fractional Subdiffusion Equation Of Time-Dependent Piecewise Constant Order

Van Bockstal K.[1]

Ghent Analysis & PDE Center, Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281, 9000 Ghent, Belgium
karel.vanbockstal@ugent.be

Let $0 < T < \infty$ and let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, be an open bounded domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$. For $\alpha : (0,T) \to (0,1)$, we consider the Caputo variable-order derivative in the form

$$\partial_t^{\alpha(t)} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(t)} u'(s) ds, \qquad t > 0,$$

where $\alpha(t)$ is a piecewise constant function with a finite number of jumps. In this talk, I will discuss the existence and uniqueness of the solution to the following initial-boundary value problem

$$\begin{cases} \left(\partial_t^{\beta(t)} u\right)(x,t) + \mathcal{L}u(x,t) &= f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathcal{L}$ is a general autonomous second-order linear differential operator. The proof technique is based on the Fourier method and results from constant-order fractional subdiffusion equations. The results presented in this talk are published in [1].

Literature

1. Kian, Y., Slodička, M., Soccorsi, É., Van Bockstal, K. On time-fractional partial differential equations of time-dependent piecewise constant order. //Math. Methods Appl. Sci. 2024. Vol . 48, №. 2. P. 2354–2369.

Solution Of The Cauchy Problem For An Equation Containing Regularized Fractional Derivatives Of Prabhakar

Hasanov A.[1], **Yuldashova H.A.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences[1,2], Tashkent, Uzbekistan;
anvarhasanov@yahoo.com[1]
hilolayuldashova77@gmail.com[2]

It is well-known that many special functions appear in solutions for differential equations. For instance, hypergeometric functions are key part of solutions for singular elliptic equations and many other degenerate partial differential equations. In fractional calculus, so called Mittag-Leffler type functions play crucial role. Multivariable analogs of such functions are also important and they are linked with multi-term fractional differential equations [7].

In this short note, we want to give the main parts of the verification of the ordered Prabhakar fractional order differential operator and the Cauchy problem for an equation with singular coefficients. That is, we present the exact solution of the Cauchy problem for the Prabhakar fractional derivative partial differential equation. Using the Fourier method, we find the general solution of the given equation. The unknown coefficients are found using the Hankel transformation. We have also presented important statements the bivariate Mittag-Leffler function $E_2(x,\ y)$ [2-3] and the Bessel function. The main objective is the Cauchy problem for a singular coefficient equation involving ordered Prabhakar derivatives.

Let us consider the following time-fractional diffusion equation

$$ {}^{PC}\mathtt{D}_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} u(x,t) - u_{xx}(x,t) - \frac{\nu}{x} u_x(x,t) = 0, \quad 0 < \nu < 1, \tag{1} $$

in a domain $\Omega = \{(x,t):\ x > 0,\ 0 < t < \infty\}$. Here $\alpha, \beta \in \mathrm{R}^+,\ \gamma, \delta \in \mathrm{R},\ m = [\beta] + 1$, $m - 1 \le \beta < m$ and

$$ {}^{PC}\mathtt{D}_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = {}^{P}I_{0t}^{\alpha,m-\beta,-\gamma,\delta} \frac{d^m}{dt^m} y(t), \tag{2} $$

represents regularized Prabhakar fractional derivative [4] and

$$ {}^{P}I_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} y(t) = \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[\delta (t-\xi)^{\alpha}\right] y(\xi)\, d\xi, \ \ t > 0, \tag{3} $$

represents Prabhakar fractional integral [6]. We formulate the Cauchy problem for time-fractional diffusion equation in the case of $1 < \beta < 2$.

Cauchy problem. It is required to find in the domain a solution to equation (1) satisfying the initial condition

$$ u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{4} $$

and for any fixed t we have

$$ \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{x \to +0} u(x,t) = 0, \tag{5} $$

where $\varphi(x)$, $\psi(x) \in \mathbf{C}^2$, $\int_0^\infty |\varphi(x)| x^{\frac{\nu}{2}} dx < c = const$ and $\int_0^\infty |\psi(x)| x^{\frac{\nu}{2}} dx < c = const$, in addition to this

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0. \tag{6}$$

Solution. We look for the solution of equation (1) using the Fourier method.From the initial conditions (4), we find the unknown functions $C_1(\lambda)$ and $C_2(\lambda)$ using the Hankel substitution. Then the solution of Cauchy problem is as follows

$$u(x,t) = \frac{1}{2} x^{\frac{1-\nu}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{\nu-1}{2}} (\psi(\rho) G_1(x,t,\rho) + \varphi(\rho) G_2(x,t,\rho)) \rho d\rho, \tag{7}$$

where

$$G_1(x,t,\rho) = \int_0^\infty J_{\frac{1-\nu}{2}}(\lambda\rho) J_{\frac{1-\nu}{2}}(\lambda x) \left(1 - \lambda^2 t^\beta \Gamma(\gamma) E_2\left(\begin{array}{c|c} \gamma,\gamma,1;1,0 & -\lambda^2 t^\beta \\ \beta+1,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1 & \delta t^\alpha \end{array}\right)\right) \lambda d\lambda,$$

$$G_2(x,t,\rho) = \int_0^\infty J_{\frac{1-\nu}{2}}(\lambda\rho) J_{\frac{1-\nu}{2}}(\lambda x)\, t \left(1 - \lambda^2 t^\beta \Gamma(\gamma) E_2\left(\begin{array}{c|c} \gamma,\gamma,1;1,0 & -\lambda^2 t^\beta \\ \beta+2,\beta,\alpha;\gamma,\gamma;1,1 & \delta t^\alpha \end{array}\right)\right) \lambda d\lambda.$$

Here $E_2(\cdot)$ is a bi-variate Mittag-Leffler function [5]

$$E_2\left(\begin{array}{c|c} \gamma_1,\alpha_1,\beta_1;\gamma_2,\alpha_2; & x \\ \delta_1,\alpha_3,\beta_2;\delta_2,\alpha_4;\delta_3,\beta_3; & y \end{array}\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m+\beta_1 n} (\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_3 m+\beta_2 n)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3+\beta_3 n)}.$$

Now we show that function (7) satisfies condition (6). For any fixed t, function $T(t)$ is bounded. Further, taking into account the asymptotic representation of the Bessel functions [1] for $z \to \infty$, with $|\arg(z)| < \pi$, then $X \sim c(\lambda) x^{-\frac{\nu}{2}}$. And this means that on the basis of Fourier method we are convinced that the condition (5) is satisfied.

Literature

1. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions, vol. I,New York, Toronto and London: McGraw-Hill, 1953.

2. Rani N., Fernandez A. Solving Prabhakar differential equations using Mikusinski's operational calculus // Computational and Applied Mathematics. 2022. vol 41. №.107. P.15.

3. Karimov E. T., Hasanov A. On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Math. series. Vol 111. №.3. P.39–46.

4. D'Ovidio M., Polito F. Fractional diffusion–telegraph equations and their associated stochastic solutions. Theory Probab. Appl. 2018. Vol 62. №. 4. P.552–574 [arXiv: 1307.1696 (2013)]

5. Garg M., Manohar, P., Kalla, S.L. A Mittag- Leffler-type function of two variables. Integral Transf. Special Funct. 2013. Vol 24. №. 11. P. 934–944.

6. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel. Yokohama Math. J. 1971. Vol 19. P. 7–15.

7. Hasanov A., Yuldashova H.A. Solving the Cauchy problem for a frational parabolic degenerate equation using the Hankel transform method. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol 45. №. 11. P. 5702–5709.

Краевая Задача С Начальными Условиями Для Диффузионного Уравнения Дробного Порядка С Оператором Герасимова-Капуто С Кусочно-Постоянными Коэффициентами

Ахмадов И. А.

Навоийский государственный университет, Навои, Узбекистан;
ahmadov.ilhom@mail.ru

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо изучены. Стоит отметить работы [1–3], которые наиболее тесно связаны с нашей работой. В работе Самарского [1] доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности целого порядка с разрывным коэффициентом с использованием метода функций Грина и тепловых потенциалов. В работе [3] доказано существование классических решений различных краевых задач для параболических уравнений целого порядка с использованием тепловых потенциалов. В случае отсутствия разрыва спектральная теория этих задач практически полностью разработана. Отметим работы [4–5]. Математические модели диффузии в нескольких слоях используется в широком диапазоне областей тепло и масса обмена [6–7].

Настоящая работа посвящена краевую задачу с начальными условиями с кусочно-постоянными коэффициентами для уравнения

$$Lz(x,y) = g(x;y), \tag{1}$$

где

$$Lz(x,y) = {}_cD^{\alpha}_{0y}z(x,y) - \mu_i^2 z_{xx}(x,y),\ \ i\,x_0 < x < i(p-x_0)+x_0,\ \ i=0,1 \tag{2}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y):\ 0<x<p,\ 0<y<q\}$, здесь $\mu_0, \mu_1, p,\ q \in \mathbb{R}^+$, а ${}_cD^{\alpha}_{0y}f(y)-$ дробная производная в смысле Герасимова–Капуто определяется формулой [4]:

$${}_cD^{\alpha}_{0y}f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ f'(y), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначения

$\Omega_1 = \{(x,y) : 0<x<x_0,\ 0<y<q\}$, $\Omega_1 = \{(x,y) : x_0<x<p,\ 0<y<q\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача М. Найти классическое решение уравнение (1), удовлетворяющее начальным условием

$$z(x,0)\ = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le p, \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$a_1 z_x(0,y) + b_1 z(0,y) = 0,\ \ a_2 z_x(p,y) + b_2 z(p,y) = 0,\ \ 0 \le y \le q, \tag{5}$$

а также условию сопряжения

$$z(x_0-0,y) = z(x_0+0,y),\ \ \mu_0 z_x(x_0-0,y) = \mu_1 z_x(x_0+0,y),\ \ 0 \le y \le q. \tag{6}$$

где $a_j, b_j (j=1,2)-$ действительные числа, причем $|a_j| + |b_j| > 0$.

Определение. Классическим решением задачи M назовем функцию из класса $\mathrm{P} = \left\{z(x,y): \ z(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,y}(\bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_1)\right\}$, удовлетворяющую условиям (4), (5) и (6) задачи M и обращающую уравнение (1) в тождество.

Условия (5) называется условиям типа Штурма. Точка x_0 является строго внутренней точкой интервала $0 < x_0 < p$.

Функция $g(x,y)$ является непрерывной, а $\varphi(x)-$ дважды непрерывно дифференцируемой функцией, которая удовлетворяет граничным условиям (5) и условиям сопряжения (6):

$$a_1\varphi'(0) + b_1\varphi(0) = 0,\ a_2\varphi'(p) + b_2\varphi(p) = 0,$$
$$\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0 + 0),\ \mu_0\varphi'(x_0 - 0) = \mu_1\varphi'(x_0 + 0),\ |a_j| + |b_j| > 0.$$

Решения задачи (1),(4),(5),(6) будем искать в виде

$$z(x,y) \ = \vartheta(x,y) \ + \omega(x,y),$$

Задача A**.** Найти решение уравнение

$$L\vartheta(x,y) = {}_cD^{\alpha}_{0y}\vartheta(x,y) - \mu_i^2\vartheta_{xx}(x,y) = g(x,y), \ \ i\,x_0 < x < i(p - x_0) + x_0, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиями

$$\vartheta(\mathrm{x},0) \ = \varphi(\mathrm{x}), \ \ 0 \le x \le p, \tag{8}$$

$$a_1\vartheta_x(0,y) + b_1\vartheta(0,y) = 0, \ \ a_2\vartheta_x(p,y) + b_2\vartheta(p,y) = 0, \ \ 0 \le y \le q, \tag{9}$$

$$\vartheta(x_0 - 0,t) = \vartheta(x_0 + 0,t), \ \mu_0\vartheta_x(x_0 - 0,t) = \mu_1\vartheta_x(x_0 + 0,t), \ 0 \le y \le q. \tag{10}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $\varphi(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет краевым (5) и (6):

$$a_1\varphi'(0) + b_1\varphi(0) = 0, a_2\varphi'(p) + b_2\varphi(p) = 0,$$
$$\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0 + 0), \mu_0\varphi'(x_0 - 0) = \mu_1\varphi'(x_0 + 0),$$

то в области Ω классическое решение задачи A существует и единственно.

Литература

1. Samarskiy A.A. Parabolic equations with discontinuous coefficients // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1958. T.121, N 2. C. 225–228.

2. Kim Y.I., Baymukhanov B.B. About temperature distribution in a piecewise homogeneous semi-infinite plate // Dokl.Akad. Nauk SSSR. 1961. T.140, N 2. C. 333–336.

3. Kamynin L.I. On potential method for a parabolic equation with discontinuous coefficients // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1962. T.145, N 6. C. 1213–1216.

4. Ionkin N.I., Morozova V.A. Two-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions. Differ. Equ. 2000. T.36, N 7. C. 884–888.

5. Sadybekov M.A. Initial-boundary value problem for a heat equation with not strongly regular boundary conditions // In: Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. T. 36. 330–348.

6. Carr E.J., March N.G. Semi-analitical solution of multilayer diffusion problems with time-varying boundary conditions and general interface conditions// Appl. Math. Comput. 2018. 286Ц303.

7. Rodrigo M.R., Worthy A.L. Solution of multilayer diffusion problems via the Laplace transform // J. Math. Anal. Appl. 2016. 475–502.

Композиция Операторов Эрдейи-Кобера Дробного Порядка И Левосторонней Дробной Производной Бесселя На Полуоси

Бойназаров А. Н.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
ahror010185@gmail.com

Пусть $f \in L[0,\infty)$, $IB^{1-\alpha}_{\eta,0+}f \in C^2(0,\infty)$ и $f'(0)=0$. При $0<\alpha<1$ определим левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси равенством [1]

$$(B^{\alpha}_{\eta,0+}f)(x) = (IB^{1-\alpha}_{\eta,0+}B_\eta f)(x) = \frac{1}{(2(1-\alpha))}\times$$

$$\times\int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\eta}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{1-2\alpha} {}_2F_1\left(1-\alpha+\frac{\gamma-1}{2},1-\alpha;2(1-\alpha);1-\frac{y^2}{x^2}\right)B_\eta f(y)dy \quad (1)$$

где $B_\eta = d^2/dx^2 + (\eta/x)(d/dx)$- оператор Бесселя, $\eta>0$.

Рассмотрим композицию оператора левосторонней дробной производной Бесселя на полуоси (1) и Эрдейи-Кобера [2;стр.246] и [3]

$$I_{\eta,\beta}\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\beta)}}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\beta-1}t^{2\eta+1}\varphi(t)dt \quad (2)$$

где, Γ(p) - гамма функция, $\beta>0$. После некоторых вычислений, получим

$$\left(B^{\alpha}_{\eta,0+}I_{\eta,\beta}f\right)(x) = \frac{2^{2\alpha-1}x^{-\eta+2\alpha-1}}{(2(1-\alpha)+\beta)}\int_0^x (s)^{\eta-2\beta}\left(x^2-s^2\right)^{\beta-2\alpha+1}\times$$

$$\times F_3\left(1-\alpha+\frac{\eta-1}{2},\beta+\frac{\eta+3}{2},1-\alpha,\beta;2(1-\alpha)+\beta;X,\frac{X}{X-1}\right)B_\eta f(s)ds \quad (3)$$

где $X=(x^2-s^2)/x^2$.

Теперь рассмотрим композицию оператора Эрдейи-Кобера (2) и левосторонней дробной производной Бесселя (1) на полуоси с весом $x^{2\alpha}$. После некоторых вычислений, получим

$$(I_{\eta,\beta}x^{2\alpha}B^{\alpha}_{\eta,0+}f)(x) = x^{2\alpha}\frac{2^{2\alpha-1}x^{-\eta+2\alpha-1}}{(2(1-\alpha)+\beta)}\int_0^x y^{\eta-2\beta}\left(x^2-y^2\right)^{1-2\alpha+\beta}\times$$

$$\times F_3\left(1-\alpha+\frac{\eta-1}{2},\beta+\frac{\eta+3}{2},1-\alpha,\beta,2(1-\alpha)+\beta;X,\frac{X}{X-1}\right)(B_\eta f)(y)dy \quad (4)$$

где $X = (x^2 - y^2)/x^2$.

Теорема 1. Если $f \in L[0,\infty)$, $IB^{1-\alpha}_{\eta,0+}f \in C^2(0,b)$,b>0 и $f'(0) = 0$, то справедливо следующие равенство

$$(I_{\eta,\beta}x^{2\alpha}B^{\alpha}_{\eta,0+}f)(x) = x^{2\alpha}\left(B^{\alpha}_{\eta,0+}I_{\eta,\beta}f\right)(x). \tag{5}$$

Если в формуле (5) $\lim\limits_{\alpha\to 1}\left(B^{\alpha}_{\eta,0+}f\right)(x) = B_\eta f(x)$, тогда получим

$$B_\eta\left(I_{\eta,\beta}f\right)(x) = \left(I_{\eta+1,\beta}B_\eta f\right)(x)$$

Литература

1. Shishkina E.L., Sitnik S.M. On fractional powers of Bessel operators, Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan DimovskiЎs contributions, 2017, 8, 1, 49Ц67.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Мн.: Наука и техника. 1987. -688 с.

3. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи -Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных.-Фергана: изд. Фергана, 2021. -202 с.

Задача Ильина–Моисеева Второго Рода Для Обыкновенного Дифференциального Уравнения Второго Порядка С Оператором Нахушева

Эфендиев Б. И.

Институт прикладной математики и автоматизации Ц филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения кФедеральный научный центр кКабардино-Балкарский научный центр Российской академии наукњ, Нальчик, Россия;

beslan_efendiev@mail.ru

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) + \lambda D^{[\alpha,\beta]}_{0x}u(x) = f(x), \qquad \alpha < \beta, \quad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

где

$$D^{[\alpha,\beta]}_{0x}u(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} D^{\gamma}_{0x}u(x)d\gamma$$

– оператор дифференцирования Нахушева [1],

$$D^{\gamma}_{0x}u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\gamma+1}}, \qquad \gamma < 0,$$

$$D^{\gamma}_{0x}u(x) = u(x), \qquad \gamma = 0,$$

$$D^{\gamma}_{0x}u(x) = \frac{d^n}{dx^n}D^{\gamma-n}_{0x}u(x), \qquad n-1 < \gamma \le n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) порядка γ [1], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, λ – заданная постоянная величина.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0,1[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C^1[0,1] \cap C^2]0,1[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0,1[$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0,1[$, удовлетворяющее условиям* [2]

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u'(\xi_i), \tag{2}$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_m < 1$, α_1, α_2, ..., α_m – заданные постоянные величины.

Теорема. *Пусть $f(x) \in L[0,1] \cap C]0,1[$. Тогда, при выполнении условия разрешимости*

$$\Delta = W'(1) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W'(\xi_i) \neq 0,$$

существует единственное регулярное решение задачи (1), (2). Решение имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt.$$

Здесь

$$G(x,t) = H(x-t)W(x-t) - \frac{W(x)}{\Delta}\left[W'(1-t) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i H(\xi_i - t) W'(\xi_i - t)\right]$$

– функция Грина задачи (1), (2), $H(z)$ – функция Хевисайда,

$$W(x) \equiv W(x;\lambda,\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu_n(x,)$$

$$\nu_0(x) = x, \quad \nu_n(x) = \nu_{n-1}(x) * \frac{1}{x} Vi(2-\beta, 2-\alpha, x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Vi(\gamma,\delta,x) = \int_\gamma^\delta \frac{x^t}{\Gamma(t)} dt, \quad 0 \leq \gamma \leq \delta, \quad x \geq 0, \quad (g*h)(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)dt$$

– свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, №1. С. 101–109.

2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора ШтурмаЦЛиувилля // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №8. С. 1422–1431.

Модель Плоскорадиальной Фильтрации Жидкости В Пористой Среде С Дробными Производными

Хужаёров Б.Х.[1,2], **Зокиров М.С.**[1]

[1] Самаркандский государственный университет им.Шарофа Рашидова,Самарканд,Узбекистан;

[1,2] Институт математики имени В.И.Романовского, Академия наук РУз, Ташкент, Узбекистан;

b.khuzhayorov@mail.ru

Самаркандский государственный университет им.Шарофа Рашидова,Самарканд,Узбекистан;

mzokirov45@gmail.com

Известно, что при фильтрации высоковязких нефтей в пористых средах проявляется ряд аномальных явлений [1, 2]. Одной из известных аномалий является проявление предельного градиента давления.

В [3] рассмотрено дробно-дифференциальное обобщение двухфазной модели нелетучей нефти, построенной на основе модифицированного закона фильтрации Дарси с потенциалом Рисса. Из системы уравнений модели выбрано одно уравнение, описывающее процесс изменения давления нефти. Для линейно-однородного случая этого уравнения, описывающего эволюцию давления в плоскорадиальном течении жидкости, построено частное решение с использованием метода интегрального преобразования Меллина.

В данной работе рассматривается радиальная задача аномальной фильтрации однородной жидкости. Фильтрация жидкости происходит в радиальном направлении в сторону центра области. В центре находится скважина радиуса r_c. Внешний контур области имеет радиус R . Закон фильтрации в радиальном случае с учетом релаксации по скорости фильтрации и градиента давления с использованием дробных производных записывается в виде

$$\upsilon + \lambda_\upsilon D_t^\beta \upsilon = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda_p D_t^\alpha \frac{\partial p}{\partial r}\right), \tag{1}$$

где λ_υ, λ_p - времена релаксации скорости фильтрации υ и давления p, k-проницаемость среды, μ-вязкость жидкости,r-координата, D_t^α, D_t^β - операторы дробной производной в смысле Капуто [4], по времени t порядка β и α, соответственно.

Аналогично [5] на основе (1) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p + \lambda_p D_t^\beta p\right) = \kappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \lambda_\upsilon D_t^\alpha p\right)], \tag{2}$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu \cdot \beta^*}$-коэффициент пьезопроводности.

Для уравнения (2) ставится следующая начально-краевая задача

$$p(0,r) = p_k, D_t^\beta p(0,r) = 0, \tag{3}$$

$$p(t,r_c) = p_c, p(t,R) = p_k \tag{4}$$

$p_k, p_c = conct.$

Задача (2)-(4) решена численно и анализировано влияние λ_p, λ_v, α и β на распределение давления и скорости фильтрации в пласте для $k = 10^{-13}m^2$, $\mu = 10^{-2}$Па·с, $p_k = 20$МПа, $p_1 = 15$МПа, $\beta^* = 3 \cdot 10^{-10}\text{Па}^{-1}$, $r_c = 0.1$м, $R = 40$м.

Результаты расчетов показывают, что уменьшение порядка производной β от 1 приводит к замедлению распространения поля давления в области. При $\beta = 0,7$ и 0,5 профили давления находится ваше, чем соответствующее распределение для $\beta = 1,0$. Таким образом, понижение давления в среде имеет отстающий характер. Уменьшение же α от 1 действует противоположно. Понижение давления за счет задания меньшего давления при $r = r_c$, т.е.$p(r_c, t) = p_c < p_k$ происходит интенсивнее. Следовательно, при уменьшении α от 1 зона понижения давления охватывает более широкую область в среде.

Литература

1. Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. Вузов. Нефть и газ. 1975, №6. С. 71-74.

2. Мирзаджанзаде А.Х, Хасанов М.М, Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазедовычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. -Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2004. -368 с.

3. Бслевцов Н. С, Об одной дробно-дифференциальной модификации модели нелетучей нефти //Математика и математическое моделирование. №06. с. 13-27 2020. doi: 10.24108. matht.0620.0000228

4. Caputo M. Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research, 2000, Vol. 36, №3. P. 693-705.

5. Khuzhayorov B, Djiyanov T.O, Zokirov M.S, Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium. // International Journal of Applied Mathematics. 2024. Volume 37. №1. Pp.119Ц132. ISSN: 1311-1728 (printed version). ISSN: 1314-8060 (on-line version). doi: http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10.

Задача Типа Дирихле Для Вырождающегося Уравнения Высокого Порядка С Дробной Производной

Иргашев Б. Ю.[1,2]

[1]Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан;
[2]Наманганский Государственный Технический Университет, Наманган, Узбекистан;
bahromirgasev@gmail.com

В области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y,\ \Omega_x = \{x : 0 < x < 1\},\ \Omega_y = \{y : 0 < y < 1\}$, рассмотрим уравнение

$$K(y) l\left(u\left(x,y\right)\right) + q_C D_{0x}^{\alpha} u = f\left(x,y\right), 0 \neq q \in R, \tag{1}$$

где

$$l(u) = (-1)^s \frac{\partial^{2s} u\left(x,y\right)}{\partial y^{2s}} + \frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}} \left((-1)^{s-1} p_{s-1}\left(y\right) \frac{\partial^{s-1} u\left(x,y\right)}{\partial y^{s-1}} \right) + ...$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-p_1\left(y\right) \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y} \right) + p_0\left(y\right) u\left(x,y\right),$$

$$0 \leq p_j\left(y\right) \in C^j\left(\overline{\Omega}_y\right),\ j = 0,1,...,s-1,\ s \in N,$$

$$K\left(y\right) > 0, y \in (0,1], K(0) = 0,$$

$$K^{(i)}\left(y\right) = O\left(y^{m-i}\right), y \to 0+0, 0 \leq m < s, i = 0,1,...,$$

$$K\left(y\right) \in C^{2s}\left(0,1\right]; 1 < \alpha < 2,$$

${}_C D_{0x}^{\alpha} u\left(x,y\right) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial t^2} dt}{(x-t)^{\alpha-1}}$ – производная Капуто, функция $f(x,y)$ является достаточно гладкой в $\overline{\Omega}$.

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача D. Найти решение уравнения (1) с условиями:

$u\left(x,y\right) \in AC^2\left[0,1\right]$, по переменной x;

$$u\left(x,y\right) \in C\left(\bar{\Omega}\right), \frac{\partial^{2s-1} u\left(x,y\right)}{\partial y^{2s-1}} \in C\left(\bar{\Omega}\right), \frac{\partial^{2s} u\left(x,y\right)}{\partial y^{2s}} \in C\left(\Omega\right),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial^j u\left(x,0\right)}{\partial y^j} = \frac{\partial^j u\left(x,1\right)}{\partial y^j} = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ j = 0,1,...,s-1,$$

$$u\left(0,y\right) = \varphi_0\left(y\right), u\left(1,y\right) = \varphi_1\left(y\right),$$

где функции $\varphi_0\left(y\right), \varphi_1\left(x\right)$ достаточно гладкие.

Решение задачи D построено в виде ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи для вырождающегося уравнения четного порядка. Также при построении решения, исследована краевая задача для одномерного уравнения дробного порядка, в зависимости от знака постоянного коэффициента уравнения q, получены необходимые оценки. Найдены достаточные условия сходимости ряда, которое является решением задачи D и рядов, полученных дифференцированием. Единственность решения показана спектральным методом.

Об Однозначной Разрешимости Многомерной Начально–Граничной Задачи Для Уравнения Высокого Порядка С Дробной Производной В Смысле Миллера–Росса В Классах Соболева

Касимов Ш.Г[1]., Кощанов А.П[2].

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, ул.Университетская 4, Ташкент, Узбекистан[1,2] ;
e-mail shokiraka@mail.ru[1], e-mail allanazarkoshanov@mail.ru[2]

Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устой-чивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных произ-водных четвёртого порядка [1, с. 364-374].

В данной работе в области $Q = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = (0,l) \times ... \times (0,l)$, а $l,\ T-$ заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$\begin{array}{l} D_j^{\alpha} u(y_1,...,y_N,t) + \sum\limits_{p=1}^{N} a_\rho^2 \frac{\partial^{4\rho_p} u(y_1,...,y_N,t)}{\partial y_p^{4\rho_p}} + b^2 \sum\limits_{p=1}^{N} a_\rho^2 D_j^{\alpha} \frac{\partial^{4\rho_p} u(y_1,...,y_N,t)}{\partial y_p^{4\rho_p}} + \\ +c^2 u(y_1,...,y_N,t) = f(y_1,...,y_N,t),\ \ (y,t) \in Q,\ n-1 \le \alpha < n,\ 0 \le j \le n-1, \\ N,\ \ n,\ \ j+1 \in \mathbb{N},\ \ \rho_p \in \mathbb{N},\ \ a_\rho > 0,\ b > 0,\ p = \overline{1,N},\ \ c = const \end{array} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(y,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(y),\ \ i = 0,...,j-1,\ \ \left.\frac{\partial^s u(y,t)}{\partial y^s}\right|_{t=0} = \varphi_s^0(y),\ s = 0,...,n-j-1 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^{4k_p} u(y,t)}{\partial y_p^{4k_p}}\right|_{y_p=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_p+1} u(y,t)}{\partial y_p^{4k_p+1}}\right|_{y_p=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_p+1} u(y,t)}{\partial y_p^{4k_p+1}}\right|_{y_p=l} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_p+3} u(y,t)}{\partial y_p^{4k_p+3}}\right|_{y_p=l} = 0, \\ k_p = \overline{0,\rho_p-1},\ \ p = \overline{1,N}, \end{array} \tag{3}$$

где $(y,t) = (y_1,...,y_N,t) \in \Pi \times (0,T)$ и $f(y,t),\ \tilde{\varphi}_i^0(y),\ \ i = 0,\ ...,\ j-1,\ \varphi_s^0(y),\ s = 0,\ ...,\ n-j-1-$ достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\left\{v_{m_1,...,m_N}(y_1,...,y_N),\ \ (m_1,...,m_N) \in \mathbb{N}^N\right\}$, $D_j^{\alpha}-$ интегро–дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=l} = 0,\ \ \left.\frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=l} = 0$$

при $k_j = \overline{0,\left[\frac{s_j+1}{2}\right]-1},\ j = \overline{1,N}.$

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$ функций $N-$ переменных $f(x) = f(x_1,...,x_N)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N) = X_{m_1}(x_1)\cdot...\cdot X_{m_N}(x_N), \tag{4}$$

где

$$X_{m_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{1+d_{m_j}^{4s_j}}}\frac{1}{\sqrt{l}\cdot\left|ctgd_{m_j}l\right|}\left(\frac{\cos d_{m_j}(l-x_j)}{\sin d_{m_j}l}+\frac{chd_{m_j}(l-x_j)}{shd_{m_j}l}\right),\ \ m_j\in\bar{\mathbb{Z}}_+,$$

$d_{m_j}-$ корень трансцендентного уравнения $tgld = -thld$.

Теорема. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(y),\ \ i=0,...,j-1;\ \varphi_s^0(y),\ \ s=0,...,n-j-1$ и правая часть $f(y,t)$ при каждом $t>0$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho_p+\frac{N}{2},\ p=\overline{1,N}$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho_p+\frac{N}{2},\ \ p=\overline{1,N},\ \theta > -[-\alpha]+\frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1}\varphi^0_{s;\ m_1,...,m_N}\cdot t^s\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}\cdot t^\alpha;\ \ s+1\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\tilde{\varphi}^0_{i\ ;\ m_1,...,m_N}\cdot t^{\alpha-i-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}\cdot t^\alpha;\ \alpha-i\right)+$$

$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}(t-\tau)^\alpha;\ \ \alpha\right]\frac{1}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}f_{m_1,...,m_N}(\tau)d\tau\right]\cdot$$

$$\cdot\tilde{v}_{m_1,...,m_N}(y).$$

Здесь $E_\eta(x;\ \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k\eta^{-1}+\mu)}$ функция Миттаг–Лефлера, $\lambda_{m_1,...,m_N} = \sum\limits_{p=1}^{N}a_p^2d_{m_p}^{4\rho_p}$, где d_{m_p} корень трансцендентного уравнения $tgld = -thld$ и в каждом из интервалов $\frac{\pi m_p}{l} < d_{m_p} < \frac{\pi m_p}{l}+\frac{3\pi}{4l}$, $m_p = 0,1,2,...,p=1,2,...,N$ имеется равно один корень d_{m_p}, причем $\frac{\pi m_p}{l}+\frac{3\pi}{4l}-d_{m_p}\to 0$ при $m_p\to\infty$ и коэффициенты определяется по формулам

$$f_{m_1,...,m_N}(t) = \int\limits_\Pi f(y,t)\,\tilde{v}_{m_1,...,m_N}(y)dy,$$

$$\tilde{\varphi}^0_{i;\,m_1,...,m_N} = \int\limits_\Pi\tilde{\varphi}_i^0(x)\tilde{v}_{m_1,...,m_N}(y)\,dy,\quad i=0,\dots,j-1,\quad m_1,\dots,m_N\in\overline{\mathbb{Z}}_+,$$

$$\varphi^0_{s;m_1,...,m_N} = \int\limits_\Pi\varphi_s^0(x)\,\tilde{v}_{m_1,...,m_N}(y)\,dy,\quad s=0,\dots,-\big[-\alpha\big]-j-1,\quad m_1,\dots,m_N\in\overline{\mathbb{Z}}_+.$$

Литература

1. Сабитов К.Б. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе //Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №3. С. 364–374.

Задача Коши Для Системы Дробных Диффузионно-Волновых Уравнений

Мамчуев М. О.[1]

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mamachuev@rambler.ru

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - AD^{\alpha}_{0y}u(x,y) + Bu(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,2)$, A и B – заданные постоянные $n \times n$ – матрицы, матрица A – положительно определенная, $f(x,y) = (f_1(x,y), ..., f_n(x,y))$ и $u(x,y) = (u_1(x,y), ..., u_n(x,y))$ – соответственно заданная и искомая вектор-функции, D^{ν}_{0y} – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегродифференцирования порядка ν [1, с. 9].

Задача 1. *В области* $\Omega = \{(x,y) : \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < T\}$ *найти решение* $u(x,y)$ *системы* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-k}_{0y}u(x,y) = \tau_k(x), \quad k = 1,p, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\tau_k(x)$ *– заданные вектор-функции, число* $p \in \mathbb{N}$ *такое, что* $p - 1 < \alpha \leq p$.

Регулярным в области Ω решением системы (1) назовцм вектор-функцию $u(x,y)$ из класса

$$u_{xx}(x,y), \quad D^{\alpha}_{0y}u(x,y) \in C(\Omega), \quad D^{\alpha-k}_{0y}u(x,s) \in C(\bar{\Omega}), \quad 1 \leq k \leq p,$$

удовлетворяющую системе (1) во всех точках $(x,y) \in \Omega$.

Примем следующие обозначения

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|}^{\infty} \phi\left(1,1; B\frac{\tau^2 - x^2}{4}\right)\frac{1}{y}\phi\left(-\beta,0; -\Lambda\tau y^{-\beta}\right)d\tau, \tag{2}$$

$$\phi(\mu,\rho;z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\mu+\rho n)}$$

– функция Райта [2], $\beta = \alpha/2$, Λ – положительно определенный корень из матрицы A.

Теорема 1. *Пусть функции* $\tau_k(x)$ $(k = 1,p)$ *удовлетворяют условиям*

$$\tau_1(x) \in C(\mathbb{R});$$
$$\tau_2(x) \in C^{1,q}(\mathbb{R}), \quad q > \tfrac{1-\beta}{\beta}, \quad при \ p = 2;$$

$y^{p-\alpha}f(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет в области* Ω *условию Гельдера по переменной* x, *при* $|x| \to \infty$ *выполняются соотношения*

$$\tau_k(x) = O(\exp(\rho|x|^{\varepsilon})), \tag{3}$$

$$y^{n-\alpha}f(x,y) = O(\exp(\rho|x|^{\varepsilon})), \tag{4}$$

где $\varepsilon = \frac{1}{1-\beta}$, $\rho < (1-\beta)\left(\sqrt{\lambda}\beta T^{-1}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$, λ – *минимальное собственное значение матрицы* A.

Тогда существует регулярное решение задачи 1. В случае когда $AB = BA$ *решение имеет вид*

$$u(x,y) = A\sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau_k(t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\Gamma(x-t,y)dt - \int_{0}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x-t,y-s)f(t,s)dtds.$$

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения* $u(x,y)$ *задачи 1, в классе функций удовлетворяющих для некоторого* $\sigma > 0$ *условию*

$$y^{n-\alpha}u(x,y) = O(\exp(\sigma|x|^{\varepsilon})) \tag{5}$$

при $|x| \to \infty$.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М., 2003.

2. Wright E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function // Proc. London Math. Soc. Ser. II. 1934. V. 38. P. 257–270.

Решение Нелокальной Краевой Задачи Диффузионно-Конвективного Переноса Радиоактивных Веществ В Системе Литосфера-Атмосфера

Паровик Р. И.[1]

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия;
parovik@ikir.ru

Изучение переноса радиоактивных веществ в системе литосфера-атмосфера имеет большое значение. С одной стороны, такие задачи возникают в экологии и связаны с прогнозированием распространения радиоактивных веществ в атмосфере [1], с другой стороны, радиоактивные вещества могут быть индикаторами напряженно-деформированного состояния геосреды и влиять на другие геофизические поля [2].

Процессы переноса радиоактивных веществ или эманаций изучаются в рамках теории эманационного метода. Согласно этой теории основными механизмами переноса радиоактивных веществ являются диффузия и конвекция. Затем с помощью математической физики строятся уравнения диффузии-конвекции с соответствующими начальными и граничными условиями. Как правило, это линейные уравнения, позволяющие находить решение с помощью интегральных преобразований. В рамках классической теории метода эманации уравнения модели содержат целочисленные

производные, что в свою очередь ограничивает применение уравнений диффузионно-конвективного переноса [3]. Это связано с тем, что радиоактивные вещества имеют ограниченную длину диффузии. Поэтому с помощью классических уравнений переноса невозможно описать аномальные эффекты в значениях концентрации радиоактивных веществ на поверхности земли при отсутствии мощного радиоактивного источника на некоторой глубине в грунте. Поэтому стала развиваться неклассическая теория метода эманации, в уравнениях которой стали использоваться дробные производные [4]. Дробные производные позволили описать эффект нелокальности (наследственности) среды, связанный с ее проницаемостью.

В данной работе изучается нестационарный процесс диффузии-конвекции радиоактивного вещества в системе литосфера-атмосфера с учетом нелокальности. Нелокальность учитывается в верхнем слое литосферы (почве), в атмосфере эффекты наследственности отсутствуют. Задача ставится следующим образом: необходимо найти решение $A(z,t)$ в области $(t>0, -\infty<z<\infty)$:

$$\lim_{z\to\infty} A\left(z,t\right)=0,$$

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}=D_a\frac{\partial^2 A\left(z,t\right)}{\partial z^2}+v_a\frac{\partial A\left(z,t\right)}{\partial z}-\lambda A\left(z,t\right),\quad z>0 \tag{1}$$

$$\lim_{z\to 0-0} D_{z0}^{\alpha-2}A\left(z,t\right)=A\left(z,t\right)|_{z=0+0},$$

$$\lim_{z\to 0-0}\left[D_g D_{z0}^{\alpha-1}A\left(z,t\right)+v_g D_{z0}^{\beta-1}A\left(z,t\right)\right]=D_a\frac{\partial A\left(z,t\right)}{\partial z}\bigg|_{z=0+0}+v_a\ A\left(z,t\right)|_{z=0+0},$$

$$\frac{\partial^\gamma A(z,t)}{\partial t^\gamma}=D_g D_{z0}^{\alpha}A\left(z,t\right)+v_g D_{z0}^{\beta}A\left(z,t\right)-(\lambda A\left(z,t\right)-A_\infty),\ z<0,$$

$$\lim_{z\to-\infty} A\left(z,t\right)=A_\infty.$$

where $D_{z0}^{\alpha}, D_{z0}^{\beta}$ are Riemann-Liouville fractional differentiation operators ($1<\alpha<2$, $0<\beta<1$) [4]:

$$D_{z0}^{\alpha}A\left(z,t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}\frac{d^2}{dz^2}\int\limits_z^0\frac{A\left(y,t\right)dy}{\left(z-y\right)^{\alpha-1}},\ D_{z0}^{\beta}A\left(z,t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\frac{d}{dz}\int\limits_z^0\frac{A\left(y,t\right)dy}{\left(z-y\right)^{\beta}},$$

where $\Gamma\left(\cdot\right)$ is the gamma function and ∂_{0t}^{γ} is the operator in the sense of Gerasimov-Caputo [5,6]:

$$\frac{\partial^\gamma A\left(z,t\right)}{\partial t^\gamma}=\frac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\int\limits_z^0\frac{A'_\theta\left(z,\theta\right)d\theta}{\left(t-\theta\right)^{\gamma}},0<\gamma<1,$$

D_a, D_g – коэффициенты диффузии вещества в атмосфере и рыхлых отложениях, м^2/с, м$^\alpha$/с; λ – постоянная распада вещества, 1/с; A_∞ – объемная активность вещества, находящегося в радиоактивном равновесии с источником эманации на заданной глубине, Бк/м^3; $A(z,t)$ – объемная активность вещества в рыхлых отложениях, Бк/м^3, A_∞=$KA_M\rho$(1-η)/η, где K – коэффициент эманации вещества, отн. ед.; A_M – удельная активность источника эманации, Бк/кг; ρ – плотность твердых частиц рыхлых отложений, кг/м^3; η – пористость рыхлых отложений.

Далее решение задачи (1) ищется в виде бегущей волны с интегральным преобразованием Лапласа и выписывается в терминах обобщенной функции Райта [4]. В частном случае, при значениях $\alpha = 2, \beta = \gamma = 1$ найденное решение переходит в классическое решение, полученное в статье [7].

Работа выполнена в рамках Соглашения между В.И. Институтом математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан и Федеральным государственным бюджетным научным учреждением "Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН"о сотрудничестве в области математических исследований (№117 от 28 апреля 2022 г.), а также в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (регистрационный номер темы 124012300245-2).

Литература

1. Geraskin I.N., Krayushkin A.V., Smirnova A.K. RC Code for Calculating Doses from Radioactive Releases to the Atmosphere // Phys. Atom. Nuclei. 2023. vol. 86. P. 1818–1826.

2. Tverdyi D., Makarov E., Parovik R. Estimation of Radon Flux Density Changes in Temporal Vicinity of the Shipunskoe Earthquake with Mw= 7.0, 17 August 2024 with the Use of the Hereditary Mathematical Model // Geosciences. 2025. vol. 15(1). 30.

3. Yakovleva V.S., Parovik R.I. Solution of diffusion-advection equation of radon transport in many–layered geological media // Nukleonika. 2010. vol. 55. P. 601-606.

4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier. 2006.

5. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. vol. 20. P. 790Ц809.

6. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. 2017. vol. 52. P. 3043Ц3052.

7. Parovik R.I. Mathematical model of non–stationary diffusion–advection of radon in the soil–atmosphere system // E3s web of conferences. 2023. vol. 462. 02023.

Об Условиях Переопределения В Обратных Задачах Определения Порядка Для Уравнения Дробной Диффузии

Псху А. В.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} - \Delta_x\right) u(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D^\alpha_{0y}$ — дробная производная Римана–Лиувилля порядка α с началом в точке $y = 0$; $\alpha \in (0,1)$; Δ_x Ч оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Уравнение (1) будем рассматривать в бесконечном слое

$$\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

Задача Коши для уравнения (1), как известно, ставится следующим образом: найти решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)\,. \tag{2}$$

В работе доказываются интегральные соотношения (законы сохранения), связывающие решения задачи (1), (2) в различные моменты времени. Доказанные соотношения позволяют строить зависящие от времени функционалы, которые остаются неизменными на множестве решений задачи (1), (2). В терминах этих функционалов формулируются пространственно-ориентированные условия переопределения в обратных задачах по определению порядка дробной производной [1], [2] для уравнения (1). Указанные условия позволяют однозначно и явно находить значения искомого порядка дробного дифференцирования для любого временного интервала.

Литература

1. Alimov Sh., Ashurov R. Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative // Progr. Fract. Differ. Appl. 2022. **8**:4, 467–474.

2. Alimov Sh., Ashurov R. On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2025. bf 33:2, 171–181.

Об Однозначной Разрешимости Многомерной Задачи Колебаний Пластин С Дробными Операторами Миллера–Росса, В Случае С Заделанными И Шарнирно Закрепленными Условиями В Классах Соболева

Реймбаева Д.К.

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза;
e-mail dilya201127@mail.ru

В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times ... \times (0, l)$, а $l,\ T-$заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$\begin{array}{l} D_j^{\alpha} u(x_1, ..., x_N, t) + a^2 \Delta^{4\rho} u(x_1, ..., x_N, t) + b^2 D_j^{\alpha} \Delta^{4\rho} u(x_1, ..., x_N, t) + \\ +c^2 u(x_1, ..., x_N, t) = f(x_1, ..., x_N, t), (x, t) \in Q,\ n-1 \le \alpha < n,\ 0 \le j \le n-1, \\ N,\ n,\ j+1 \in \mathbb{N},\ \rho \in \mathbb{N},\ a > 0,\ b > 0,\ c = const \end{array} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x, t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x),\ \ i = 0, ..., j-1,\ \ \left.\frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s}\right|_{t=0} = \varphi_s^0(x),\ s = 0, ..., n-j-1 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^{4k} u(x,t)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k+1}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k} u(x,t)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=l} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2} u(x,t)}{\partial x_p^{4k+2}}\right|_{x_p=l} = 0, \\ k = \overline{0, \rho-1},\ p = \overline{1, N}, \end{array} \tag{3}$$

где $(x,t)=(x_1,...,x_N,t)\in\Pi\times(0,T)$ и $f(x,t)$, $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i=0,...,j-1$, $\varphi_s^0(x)$, $s=0,...,n-j-1$−достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\left\{v_{m_1,...,m_N}(x_1,...,x_N),\ (m_1,...,m_N)\in\mathbb{N}^N\right\}$ следующей спектральной задачи:

$$a^2\Delta^{4\rho}v(x_1,\ldots,x_N,t)-\lambda v(x)=0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{4k}v(x)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1}v(x)}{\partial x_p^{4k+1}}\right|_{x_p=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k}v(x)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2}v(x)}{\partial x_p^{4k+2}}\right|_{x_p=l}=0,\quad k=\overline{0,\rho-1},\ j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

λ−спектральный параметр. D_j^α− интегро–дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x)\in W_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j}f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j+3}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=l}=0$$

при $k_j=\overline{0,\left[\frac{s_j+1}{2}\right]-1}$, $j=\overline{1,N}$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$ функций N−переменных $f(x)=f(x_1,...,x_N)$ полную ортонормальную систему образуют все произведения

$$v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N)=X_{m_1}(x_1)\cdot...\cdot X_{m_N}(x_N), \tag{6}$$

где

$$X_{m_j}(x_j)=\frac{1}{\sqrt{1+d_{m_j}^{4s_j}}}\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{\sin d_{m_j}(l-x_j)}{\sin d_{m_j}l}-\frac{shd_{m_j}(l-x_j)}{shd_{m_j}l}\right),\ \ m_j\in\bar{\mathbb{Z}}_+,$$

d_{m_j}−корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}ld=\operatorname{th}ld$. Справедлива следующая

Теорема 1. Система собственных функций

$$\left\{v_{m_1...m_N}(x_1,...,x_N)\right\}_{(m_1,...,m_N)\in\bar{\mathbb{Z}}_+^N}=\left\{\prod_{j=1}^N X_{m_j}(x_j)\right\}_{(m_1,...,m_N)\in\bar{\mathbb{Z}}_+^N} \tag{7}$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированный системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i=0,...,j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s=0,...,n-j-1$ и правая часть $f(x,t)$ при каждом $t>0$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p>4\rho+\frac{N}{2}$, $p=\overline{1,N}$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_p>4\rho+\frac{N}{2}$, $p=\overline{1,N}$, $\theta>-[-\alpha]+\frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1}\varphi^0_{s;\,m_1,...,m_N}\cdot t^s\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}\cdot t^\alpha;\ \ s+1\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\tilde{\varphi}^0_{i\ ;\ m_1,\ldots,m_N}\cdot t^{\alpha-i-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\ldots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\ldots,m_N}}\cdot t^{\alpha};\ \alpha-i\right)+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{a^2\lambda_{m_1,\ldots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\ldots,m_N}}(t-\tau)^{\alpha};\ \alpha\right]\frac{1}{1+b^2\lambda_{m_1,\ldots,m_N}}f_{m_1,\ldots,m_N}(\tau)d\tau\Bigg]\cdot$$

$$\cdot v_{m_1,\ldots,m_N}(x).$$

Здесь $E_\eta(x;\ \mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k\eta^{-1}+\mu)}$ функция Миттаг–Лефлера, $\lambda_{m_1,\ldots,m_N}=\left(\sum\limits_{p=1}^{N}d_{m_p}^2\right)^{2\rho}$, где d_{m_p} корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} ld=\operatorname{th} ld$ и в каждом из интервалов $\frac{\pi m_p}{l}<d_{m_p}<\frac{\pi m_p}{l}+\frac{\pi}{4l}$, $m_p=0,1,2,...,p=1,2,...,N$ имеется равно один корень d_{m_p}, причем $\frac{\pi m_p}{l}+\frac{\pi}{4l}-d_{m_p}\to 0$ при $m_p\to\infty$ и коэффициенты определяется по формулам

$$f_{m_1,\ldots,m_N}(t)=\int\limits_{\Pi}f(x,t)\,v_{m_1,\ldots,m_N}(x)dx,\quad \tilde{\varphi}^0_{i;\,m_1,\ldots,m_N}=\int\limits_{\Pi}\tilde{\varphi}^0_i(x)v_{m_1,\ldots,m_N}(x)\,dx,$$

$$\varphi^0_{s;m_1,\ldots,m_N}=\int\limits_{\Pi}\varphi^0_s(x)\,v_{m_1,\ldots,m_N}(x)\,dx,\quad m_1,\ldots,m_N\in\overline{\mathbb{Z}}_+.$$

Литература

1. Сабитов К.Б. К теории начально–граничных задач для уравнения стержней и балок//Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, №1. С. 89–100.

Спектральная Задача Для Вырождающегося Дифференциального Уравнения Эллиптического Типа

Турдиева К. О.[1]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
komilaxon84.84@gmail.com;

В прямоугольнике $\Omega=\{(x,t):0<x<1;\ 0<y<1\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,y)\right]_x+u_{yy}(x,y)+\lambda u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $u(x,y)$ - неизвестная функция; λ - числовой параметр, α,β - заданные действительные числа, причем $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$.

Задача D_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,y)\right]$, $u_y(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$; $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,y)\right]_x$, $u_{yy}(x,y)\in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3)на границе области Ω выполняются следующие граничные условия:

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,1)=0,\quad x\in[0,1];$$

$$u(0,y)=0,\ u(1,y)=0,\ \ y\in[0,1].$$

Теорема 1. *Если $\lambda\le 0$, то задача D_λ имеет только тривиальное решение.*

Эта теорема была доказана методом интегральных энергий.

Теорема 2. *Если $\lambda>0$, то задача D_λ существует счетное число собственных значений λ_{nk} $(n,k\in N)$ задачи D_λ.*

Эта теорема была доказана методом разделения переменных и методом функций Грина.

Спектральные задачи для уравнения с сингулярными коэффициентами изучались в [1].

Литература

1. Каримов К. Т. Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. №2(18). С. 7-19.

Разрешимость Краевой Задачи Дифференциальных Уравнений Дробного Порядка С Инволюцией

Усманов К. И.[1], **Назарова К. Ж.**[2]

[1,2]Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан,

[1]kairat.usmanov@ayu.edu.kz; [2]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz;

Дробное исчисление является расширением классического дифференциального и интегрального исчисления для произвольных порядков дифференцирования. В последние десятилетия интерес к данной области значительно возрос из-за широкого спектра приложений, включая моделирование процессов с памятью, аномальную диффузию и динамику сложных систем.

Определение. Пусть $[a,b]$ конечный интервал на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если $0<\alpha<1$, то производная Капуто определяются в виде [1]

$${}_CD_a^\alpha f(x)={}_{RL}D_a^\alpha\left(f(x)-f(a)\right),$$

$${}_CD_b^\alpha f(x)={}_{RL}D_b^\alpha\left(f(x)-f(b)\right).$$

Данные производные называются соответственно левосторонними и правосторонними дробными производными Капуто порядка α, где ${}_{RL}D_a^\alpha f(x)$, ${}_{RL}D_b^\alpha f(x)$ соответственно левосторонними и правосторонними дробными производными Римана – Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

В данной работе на отрезке $[0,T]$ исследуется краевая задача для неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка $0<\alpha<1$ с инволютивным преобразованием

$${}_CD^\alpha y(x)+\varepsilon_C D^\alpha y(T-x)=f(x), \tag{1}$$

$$ay(0)+by(T)=c, \tag{2}$$

где функция $f(x)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Для решения задачи был применен метод параметризации профессора Д.Джумабаева [2]. Вводится параметр $\mu = y(0)$ и выполняется замена $y(x) = u(x) + \mu$. Тем самым рассматриваемая задача разбивается на две части, это задача Коши для дифференциального уравнения дробного порядка $0 < \alpha < 1$ и линейное уравнение, относительно введенного параметра. Параметры введены так, чтобы задача Коши для дифференциального уравнения дробного порядка $0 < \alpha < 1$ имело классическое решение. Применяя некоторые преобразования, определяется единственное решение задачи Коши. Исходя из однозначной разрешимости полученого уравнения, относительно введенного параметра, устанавливается разрешимость исследуемой задачи.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon \neq 1$, тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) необходимо и достаточно чтобы $q = a + b \neq 0$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon \neq 1$. Если $q = a+b = 0$, тогда для однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^T \left((T-\xi)^{\alpha-1} - \varepsilon\xi^{\alpha-1}\right) f(\xi)\, d\xi = \frac{c\,(1-\varepsilon^2)\,\Gamma(\alpha)}{b}.$$

This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant №. AP 23488086, AP 26197913)

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006. T. 204.

2. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т.29, №1. С. 50–66.

Об Одной Задаче Для Вырождающегося Интегро-Дифференциального Уравнения Второго Порядка

Усмонов Д. А.[1], **Омонова А. Н.**[2]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
usmonov-doniyor@inbox.ru;
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
adibaxonomonova@gmail.com

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$ {}_C D_{0t}^{\gamma} u(x,t) + a^2 I_{0t}^{\delta} u(x,t) + b^2 u(x,t) = \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_x(x,t)\right]_x, \qquad (1)$$

где $u(x,y)$ - неизвестная функция; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$ - заданные действительные числа, причем $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$, $0<\delta<1$,

$$ {}_{C}D_{0t}^{\gamma}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_{0}^{t}(t-z)^{-\gamma}u_{z}(x,z)\,dz $$

– дробный производные Капуто порядка γ [1],

$$ I_{0t}^{\delta}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int\limits_{0}^{t}(t-z)^{\delta-1}u(x,z)\,dz $$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка δ [1], $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [2].

Задача A**.** Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{x}(x,t)\right]\in C\left(\bar{\Omega}\right)$; $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{x}(x,t)\right]$, ${}_{C}D_{0t}^{\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3)на границе области Ω выполняются следующие граничные условия:

$$ u(x,0)=\tau(x), \quad x\in[0,1]; $$

$$ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0, t\in[0,T], $$

где $\tau(x)$ – задана непрерывная функция, причем $\tau(0)=0,\ \tau(1)=0$.

Теорема 1. *Задача A не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Если функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условиям* $\tau(x)$, $[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\tau'(x)]$, $[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\tau'(x)]'\in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\tau'(x)]''\in C(0,1)\cap L_{2}(0,1)$, $\tau(0)=0$, $\tau(1)=0$, $[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\tau'(x)]'\big|_{x=0}=0$, $[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\tau'(x)]'\big|_{x=1}=0$, *то решение задача A существует.*

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. 2006. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier. 2006.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965.

Уравнения С Производной Римана– Лиувилля И Принцип Субординации

Федоров В. Е., Вершинина Д. А.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
kar@acsu.ru, vd2400@mail.ru

Рассмотрим задачу типа Коши

$$ D^{\alpha-m+k}z(0)=z_{k}, \quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{1} $$

для линейного уравнения с оператором $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ (т.е. A линеен и замкнут, плотно определен в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ и действует в это пространство)

$$D^{\alpha}z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, для которой $J^{m-\alpha}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap AC^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2), называется решением задачи (1), (2). Здесь $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Семейство ограниченных в пространстве $\mathcal{Z}$ операторов $\{S(t) : t > 0\}$ называется разрешающим семейством типа $\omega \geq 0$ для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

(i) существуют такие $K > 0$, $\omega \geq 0$, что при всех $t > 0$ $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ke^{\omega t}t^{\alpha-m}$;

(ii) $S(t)$ сильно непрерывно при $t > 0$, $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J^{m-\alpha}S(t) = I$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az = AS(t)z$ при всех $z \in D_A$, $t > 0$;

(iv) для всех $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{\alpha-m}z(0) = z_0$, $D^{\alpha-m+k}z(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (2).

Здесь и далее символом $s\text{-}\lim$ обозначается сильный предел.

Теорема 1 [1]. Пусть $\alpha > 2$ и существует разрешающее семейство операторов уравнения (2). Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ принадлежит классу $\mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ при некотором $\omega \geq 0$, если выполняются следующие условия:

(i) если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^{\alpha} \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует такое $K > 0$, что при всех $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda^{m-1}(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}\right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma(\alpha - m + n + 1)}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{\alpha-m+n+1}}.$$

Для $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ обозначим $H(\lambda) := \lambda^{m-1}(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}$, $\lambda > \omega$, и

$$\mathcal{S}_n(t) := e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H^{(k)}(n+\omega), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. [1]. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$. Тогда разрешающее семейство операторов $\{S(t) : t > 0\}$ уравнения (2) существует, если и только если $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$. При этом $S(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{S}_n(t)$ для всех $t > 0$.

Разрешающее семейство операторов называется аналитическим, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0, ω_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $\omega_0 \geq 0$, если для любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $\omega > \omega_0$ найдется такое $C(\psi, \omega) > 0$ что при всех $t \in \Sigma_{\psi}$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, \omega)e^{\omega \mathrm{Re}\, t}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, \omega_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $\omega_0 \geq 0$ класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых $\lambda^{\alpha} \in \rho(A)$ при всех $\lambda \in S_{\theta_0,\omega_0}$; при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\omega > \omega_0$ найдется $K(\theta, \omega) > 0$, такое, что для всех $\lambda \in S_{\theta,\omega}$

$$\|(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, \omega)}{|\lambda|^{\alpha}}.$$

Теорема 3. [2]. Пусть $\alpha > 0$. Тогда существует аналитическое разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, \omega_0)$ для уравнения (2), если и только если $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$.

Для $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, рассмотрим 2 уравнения с одним и тем же оператором A

$$D^{\alpha_1} z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \quad D^{\alpha_2} z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Если $A \in \mathcal{C}_{\alpha_i,R}(\omega)$ при некотором $\omega \geq 0$, разрешающее семейство операторов i-го уравнения из (3) обозначим через $\{S_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, $i = 1, 2$.

Для $\gamma \in (0,1)$, $\delta \in \mathbb{R}$ возьмем функцию типа Райта $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!\Gamma(\delta - \gamma n)}$. Через $\mathfrak{M}[h]$ обозначим преобразование Меллина функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, напомним также определение обобщенной функции Миттаг-Леффлера

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}, \quad \alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 4. Пусть $m_1 - 1 < \alpha_1 \leq m_1 \in \{1, 2\}$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \leq m_2 \in \{1, 2\}$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0, 1)$, $\omega \geq 0$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha_1,R}(\omega)$. Тогда $A \in \mathcal{A}_{\alpha_2}(\theta_0, \omega_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\omega_0 \geq 0$. При $z \in \mathcal{Z}$ операторы аналитического разрешающего семейства, порождаемого оператором A, имеют вид

$$S_2(t)z = t^{\gamma(m_1-1)-m_2} \int\limits_0^{\infty} \Phi_{\gamma,\gamma(m_1-1)-m_2+1}(st^{-\gamma}) S_1(s) z ds =$$

$$= \frac{t^{\gamma m_1 - m_2}}{2\pi i} \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma) t^{-\gamma\sigma} \mathfrak{M}[S_1(t)z](\sigma) d\sigma}{\Gamma(\gamma(1-\sigma) + \gamma(m_1 - 1) - m_2 + 1)}, \quad d \in (0, 1).$$

Более того, при всех $t > 0$ $\|S_2(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K\Gamma(\alpha_1 - m_1 + 1) t^{\alpha_2 - m_2} |E^{\alpha_1 - m_1 + 1}_{\gamma, \alpha_2 - m_2 + 1}(\omega t^{\gamma})|$.

Литература

1. Fedorov V.E., Vershinina D.A. Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // Journal of Mathematical Sciences. 2025. V.287, №.1. P.52–68.

2. Федоров В.Е., Авилович А.С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т.60, №2. С. 461–477.

Задача Типа Гурса Для Дифференциального Уравнения В Частных Производных Третьего Порядка

Фозилов М. Н.[1], **Усмонов Д. А.**[2]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
fozilovmuhammaddiyor@gmail.com
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
usmonov-doniyor@inbox.ru;

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p;\ 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнение

$$u_{xyy}(x,y) + \gamma^2 u_x(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $u(x,y)$ - неизвестная функция, а $f(x,y)$ - заданная функция; γ, λ, p, q - заданные действительные числа, причем $\alpha > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

Задача G. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C^{0,1}_{x,y}\left(\bar{\Omega}\right)$, $u_x(x,y), u_{xyy}(x,y) \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3)на границе области Ω выполняются следующие граничные условия:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_y(x,0) = \nu(x),\ x \in [0,p];$$

$$u(0,y) = \varphi(y),\ y \in [0,q],$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\varphi(y)$ – заданные непрерывные функции, причем $\tau(0) = \varphi(0)$, $\nu(0) = \varphi'(0)$.

Теорема 1. *Если* $\tau(x),\ \nu(x) \in C[0,p] \cap C^1(0,p)$, $\varphi(y) \in C^1[0,q] \cap C^2(0,q)$, $\tau(0) = \varphi(0)$, $\nu(0) = \varphi'(0)$, *а* $f(x,y) = x^{-p_1} y^{-p_2} f_1(x,y)$, $f_1(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 \le p_1 < 1$, $0 \le p_2 < 1$, *то решение задачи G единственно, существует и определяется по следующей формуле:*

$$u(x,y) = \varphi(y) + \cos(\gamma y)\tau(x) + \frac{1}{\gamma}\sin(\gamma y)\nu(x) - -\cos(\gamma y)\tau(0) - \frac{1}{\gamma}\sin(\gamma y)\nu(0) -$$

$$-\lambda\tau(0)xy^2\mathbb{E}_{(1,1),(2,3,1/2)}\left[-\lambda x(y-\eta)^2;\gamma(y-\eta)\right] -$$

$$-\lambda\nu(0)xy^3\mathbb{E}_{(1,1),(2,4,3/2)}\left[-\lambda x(y-\eta)^2;\gamma(y-\eta)\right] -$$

$$-\lambda x\int_0^y (y-\eta)\varphi(\eta)\,\mathbb{E}_{(1,2),(2,2,1/2)}\left[-\lambda x(y-\eta)^2;\gamma(y-\eta)\right]d\eta -$$

$$-\lambda y^2\int_0^x \tau(\xi)\,\mathbb{E}_{(1,1),(2,3,1/2)}\left[-\lambda x(y-\eta)^2;\gamma(y-\eta)\right]d\xi -$$

$$-\lambda y^3\int_0^x \nu(\xi)\,\mathbb{E}_{(1,1),(2,4,3/2)}\left[-\lambda x(y-\eta)^2;\gamma(y-\eta)\right]d\xi -$$

$$+\int_0^x\int_0^y (y-\eta)\,\mathbb{E}_{(1,1),(2,2,1/2)}\left[-\lambda(x-\xi)(y-\eta)^2;\gamma\,(y-\eta)\right] f\,(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где

$$\mathbb{E}_{(\alpha_1,\,\beta_1),\,(\alpha_2,\,\beta_2,\theta)}\,[x;y]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma\,(\alpha_1 n+\beta_1)\,\Gamma\,(\alpha_2 n+\beta_2)}\overline{J}_{\frac{\alpha_2 n}{2}+\theta}\,(y), \tag{2}$$

$$\bar{J}_\nu\,(z)=\Gamma\,(\nu+1)\,(z/2)^{-\nu}J_\nu\,(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k},$$

$(z)_k=\Gamma(z+k)/\Gamma(z)$ - символ Похгаммера [1], $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [1], $J_\nu\,(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [2]. Очевидно, что (2)-есть функция типа функции Райта [3]:

$$e^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,-\alpha_2}\,(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma\,(\alpha_1 n+\beta_1)\,\Gamma\,(\alpha_2 n+\beta_2)}.$$

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. Москва: Наука, 1966.

3. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005.

СЕКЦИЯ 4. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ
SECTION 4. MODERN PROBLEMS OF ALGEBRA AND GEOMETRY

2-Local Derivations And Automorphisms On Von Neumann Algebras And $\mathbb{C}^*$-Algebras

Ayupov Sh.A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Given an algebra A, a linear mapping $T : A \to A$ is called *a homomorphism* (respectively, *a derivation*) if $T(ab) = T(a)T(b)$ (respectively, $T(ab) = T(a)b + aT(b)$) for all a, b in A. A one-to-one homomorphism is called an *automorphism.*

A mapping $\Delta : A \to A$ (not linear in general) is called *a 2-local automorphism* (respectively, *a 2-local derivation*) on A, if for every x, y in A there exists an automorphism $a_{x,y}$ (respectively, a derivation $d_{x,y}$ on A depending on x and y, such that $\Delta(x) = a_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = a_{x,y}(y)$ (respectively, $\Delta(x) = d_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = d_{x,y}(y)$).

The main problem concerning the above notions are to find conditions under which every 2-local automorphism or derivation automatically becomes an automorphism (respectively, a derivation). For general $\mathbb{C}^*$-algebras this problem is still open.

In the present talk we give a solution of this problem in the framework of von Neumann algebras and their abstract generalization – AW^* - algebras (i.e. Kaplansky algebras). Also, we give a survey of corresponding results of other authors for certain classes of $\mathbb{C}^*$ - algebras.

Modern Problems Of Algebra And Geometry In The Context Of Interdisciplinary Connections With Physics: Approaches To Integrating Mathematical Knowledge And Modeling In School Education

Abdalieva P.K.,[1] **Shambetova B.K.**[2]

Bishkek State University named after K. Karasaev, Bishkek, Kyrgyzstan
pabdylieva@bhu.kg [1]

Bishkek State University named after K. Karasaev, Bishkek, Kyrgyzstan
bshambetova@bhu.kg [2]

Introduction: The Relevance of the Interdisciplinary Connection Between Mathematics and Physics

Modern educational standards require the integration of knowledge and the application of interdisciplinary connections for effective student learning. One of the most important tasks is the integration of algebra, geometry, and physics. This integration facilitates a better understanding of mathematical methods necessary for solving real physical problems. In the context of continuous technological progress, the development of mathematical modeling in school education becomes a key tool in preparing students.

Mathematics and physics are integral parts of scientific knowledge, and their interaction forms the foundation for understanding the world around us. Algebra and geometry serve as the language through which physical processes are described. For example, equations are used to describe the motion of objects, while geometric figures help model physical phenomena (such as trajectory design, force analysis, and energy calculations). Understanding the interrelationship between mathematical and physical concepts allows students to develop logical and abstract thinking skills.

Methodology for Integrating Algebra and Geometry with Physics

To effectively integrate algebra, geometry, and physics, specific methodological approaches must be used:

- Incorporating problems that require the application of both mathematical and physical knowledge. For instance, using equations to calculate force, motion, or analyzing electrical circuits through algebraic formulas and geometric concepts.

- Combining theoretical material in the context of physical phenomena, such as solving kinematics problems using graphs, geometric objects, and algebraic equations.

- Applying mathematical methods to model real-world physical processes (e.g., modeling oscillations, electric fields, and heat transfer). The methodology for integrating algebra and geometry with physics includes various methods and approaches that enhance students' understanding and application of knowledge from both disciplines. The Role of Mathematical Modeling in Solving Physical Problems Mathematical modeling is a crucial tool for solving physical problems. It not only enables the resolution of theoretical problems but also helps students develop practical skills in analysis and forecasting.

- In algebra, for example, students can explore ways to solve differential equations that describe the dynamics of moving objects or the process of heat transfer.

- In geometry, analytical geometry and vector analysis can be used to model various physical phenomena.

- The use of mathematical software and computer simulations in school education, such as GeoGebra or Mathematica, helps students visualize solutions and understand the consequences of physical laws more clearly.

Modern Approaches to Education: The Use of Technologies and Innovative Methods The use of modern educational technologies contributes to a deeper understanding of physics and mathematics by students. The application of computer simulations and virtual laboratories allows them to observe physical processes in practice and model them using mathematical tools. It is essential that teaching focuses on solving practical problems, helping students develop analytical and critical thinking skills.

- Creating interactive lessons where students can work with real physical models, solve problems using mathematical methods, and observe results in real-time.

- Implementing projects in which students work with real data, analyze it, and present their findings as mathematical models. Challenges and Prospects for Integrating Mathematics and Physics.

Despite the clear need for integrating mathematics and physics, several challenges exist:

- A lack of methodological materials and textbooks that help teachers connect these disciplines.

- Difficulties in teaching abstract mathematical concepts, such as differential equations, which are challenging to explain in the context of physics.

- Students struggling to perceive interdisciplinary connections and apply their knowledge to real-world situations.

However, there are also promising opportunities:

- Enhancing teachers' qualifications and creating a unified methodological framework for subject integration.
- Developing more modern educational materials that use real examples from physics and mathematics.
- Introducing new educational technologies and methods, such as flipped classrooms, interactive whiteboards, and virtual laboratories.

The integration of algebra, geometry, and physics helps students gain deeper knowledge and develop critical thinking skills. This approach connects theory with practice, making learning more engaging and meaningful. Innovative methods and interdisciplinary projects foster the ability to solve complex problems, contributing to students' future success.

References

1. Adishev, I.G. Formation of Practical Skills in Approximate Calculations in the Context of the Interconnection of Mathematics and Physics [Text]: Dissertation Abstract ... Candidate of Pedagogical Sciences / I.G. Adishev. - M.: Nauka, 1979. - 18 p.

2. Bekboev, I.B. Geometric Problems with Practical Content / I. Bekboev. – 1962. – 112 p.

3. Mambetakunov, E., Isaeva, R.U. Teacher Competencies in Forming Physical Concepts in Schoolchildren. – Bishkek, 2015. –268 p.

A Note Some Classes Of Topological Spaces

Abdumannonov A.I., Mukhamadiev F.G.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
farhodgm@nuu.uz

A space X is *developable* [2, 3] if there exists a sequence $\{\gamma_m : m \in \mathbb{N}\}$ of open covers of X such that, for each $x \in X$, $\{st(x, \gamma_m) : m \in \mathbb{N}\}$ is a local base at x.

Such a sequence of covers is called a *development* for X. It is well known that every metrizable space is developable, and every developable space is clearly first countable.

A regular developable space is a *Moore space* [2, 3].

We received the following results.

Theorem 1. Let a mapping $f : X \to Y$ is an open, closed and continuous onto mapping. If a space X is developable space, then the space Y is also developable space.

Proof:

A topological space X is called *developable* if there exists a countable collection of open covers $\{\mathcal{U}_n\}$ such that for every point $x \in X$, the collection $\mathcal{U}_n$ forms a development, meaning that if a point is in all the elements of some sequence of open sets, then it is in the interior of their intersection.

We are given $f : X \to Y$ is: *Continuous*: The preimage of every open set in Y is open in X.

Open: The image of every open set in X is open in Y.

Closed: The image of every closed set in X is closed in Y.

Onto: Every point in Y has at least one preimage in X.

Since X is developable, there exists a countable sequence of open covers $\{\mathcal{U}_n\}$ that forms a development for X.

We define a corresponding countable collection of open covers for Y as follows:

$$\mathcal{V}_n = \{f(U) \mid U \in \mathcal{U}_n\}.$$

Since f is an open mapping, each $f(U)$ is open in Y, making $\mathcal{V}_n$ an open cover of Y. Moreover, the sequence $\{\mathcal{V}_n\}$ satisfies the development property in Y because points in Y inherit the necessary structure from their preimages in X.

Thus, Y is also developable.

Example

Let $X = \mathbb{R}$ be the real number line with the standard topology, and let $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ be the quotient space obtained by identifying points that differ by an integer, i.e., the unit circle S^1 with the quotient topology.

Define the function $f : \mathbb{R} \to S^1$ by

$$f(x) = e^{2\pi ix}.$$

This is the standard quotient map that wraps the real line onto the unit circle by identifying all points that differ by an integer.

Conclusion

Since $f : \mathbb{R} \to S^1$ is an open, closed, and continuous onto mapping, and $\mathbb{R}$ is developable, it follows that S^1 is also developable. This provides a concrete example satisfying the given conditions.

Theorem 2. Let a mapping $f : X \to Y$ is an open, closed and continuous onto mapping. If a space X is Moore space, then the space Y is also Moore space.

Proof:

A topological space X is called a *Moore space* if it is a regular, developable space, meaning there exists a countable collection of open covers $\{\mathcal{U}_n\}$ such that for every point $x \in X$, these covers approximate the topology in a way that ensures regularity.

We are given $f : X \to Y$ is: *Continuous*: The preimage of every open set in Y is open in X.

Open: The image of every open set in X is open in Y.

Closed: The image of every closed set in X is closed in Y.

Onto: Every point in Y has at least one preimage in X.

Since X is a Moore space, it is both regular and developable. From the previous result, we already know that Y inherits the developable property since f is an open, closed, and continuous surjection. Thus, we only need to show that Y is also regular.

Regularity: Let $y \in Y$ and let $C \subset Y$ be a closed set such that $y \notin C$. Since f is onto, there exists $x \in X$ such that $f(x) = y$. Also, $f^{-1}(C)$ is closed in X (since f is continuous), and since X is regular, there exist disjoint open sets U and V in X such that $x \in U$ and $f^{-1}(C) \subset V$.

Since f is an open mapping, $f(U)$ is an open neighborhood of y, and since f is closed, $f(V)$ remains a closed set containing C. Furthermore, $f(U)$ and $f(V)$ are disjoint, ensuring the regularity of Y.

Since Y is both developable and regular, it follows that Y is a Moore space.

References

1. Edited by Klaas Pieter Hart and others, *Encyclopedia of General Topology*, Elsevier Science Ltd. All rights reserved, 2004.

2. Kocinac L. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. On the Space of $G-$Permutation Degree of Some Classes of Topological Spaces, *Mathematics*, 2023, 11(22), 4624.

3. Kocinac L. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. Some classes of topological spaces and the space of $G-$permutation degree, *Georgian Mathematical Journal*, 2023.

Anti-Derivations On The Perfect Lie Algebras $\mathfrak{L}^m$

Atajanov X. O.[1], **Yusupov B. B.**[2]

Department of Physics and Mathematics, Urgench State University;
atajonovxusainboy@gmail.com
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notion of δ-derivations was introduced by V.Filippov for Lie algebras in [1], [2], [3]. The space of δ-derivations includes usual derivations ($\delta = 1$), anti-derivations ($\delta = -1$) and elements from the centroid. In [2] it was proved that prime Lie algebras, as a rule, do not have nonzero δ-derivations (provided $\delta \neq 1, -1, 0, \frac{1}{2}$), and that every primary Lie Φ-algebra $A\left(\frac{1}{6} \in \Phi\right)$ with a nonzero antiderivation satisfies the identity $[(yz)(tx)]x + [(yx)(zx)]t = 0$ and is a three-dimensional central simple algebra over a field of quotients of the center $Z_R(A)$ of its right multiplication algebra $R(A)$.

In [3], δ-derivations were investigated for prime alternative and non-Lie Malcev algebras over the ring of operators $\mathbb{F}$, and it was proved that alternative and non-Lie Malcev algebras with certain restrictions of $\mathbb{F}$ have no non-trivial δ-derivation. The

description of δ-derivations of classical Lie superalgebras was given in [6]. δ-derivations of finite-dimensional semisimple Jordan algebras over the field of characteristic $p \neq 2$ and δ-superderivations of finite-dimensional simple Lie and Jordan superalgebras were investigated in [7]. Zusmanovich in [9] described δ-(super)derivations of prime Lie superalgebras. Specifically, he proved that a prime Lie superalgebra has no non-trivial δ-(super)derivations for $\delta \neq 1, -1, 0, \frac{1}{2}$. Moreover, in [8] it is proved that any δ-derivation of a finite-dimensional simple Jordan algebra with values in a finite-dimensional unital irreducible bimodule is, in a sense, trivial.

Definition 1. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$. A linear map φ is called a δ-derivation if it satisfies

$$\varphi[x,y] = \delta\big([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\big),$$

where δ from the ground field $\mathbb{F}$.

Note that 1-derivation is a usual derivation and (-1)-derivation is called an anti-derivation. If φ_1 and φ_2 are δ_1 and δ_2-derivations, respectively, then their commutator $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1$ is a $\delta_1\delta_2$-derivation. The set of all δ-derivations, for the fixed δ, we denote by $\mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$. For the Lie algebras, the notion of anti-derivations coincides with the notion of reverse derivations, which was studied by Herstein in [4].

Definition 2. A Lie algebra is said to be perfect if it equals its own commutator ideal. In other words, a Lie algebra is said to be perfect if every element of the Lie algebra is in the ideal generated by commutators.

Now consider the Lie algebra $\mathfrak{L}^m = \mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathfrak{r}$, where $\mathfrak{sl}_2$ is a three-dimensional simple algebra and $\mathfrak{r}$ is the solvable radical of dimension $(m+1)$. Then the algebra $\mathfrak{L}^m$ has the following multiplication (see, [5]):

$$\begin{cases} [e,f] = h, \qquad [h,e] = 2e, \qquad [f,h] = 2f, \\ [x_k, h] = (2k-m)x_k, \qquad 0 \leq k \leq m, \\ [x_k, f] = x_{k+1}, \qquad 0 \leq k \leq m-1, \\ [x_k, e] = k(m+1-k)x_{k-1}, \qquad 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Note that it is clear that the algebra $\mathfrak{L}^m$ perfect Lie algebra.

Now we give the main theorem concerning anti-derivation on $\mathfrak{L}^m$ perfect Lie algebra.

Theorem 1. Any anti-derivation of $\mathfrak{L}^m (m > 2)$ is a zero.

Theorem 2. Any anti-derivation φ of $\mathfrak{L}^2$ has the following form

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 e + \alpha_4 f + \alpha_5 h, \\ \varphi(f) &= \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 - \frac{1}{2}\alpha_0 x_2 + \beta_3 e + \alpha_3 f + \beta_5 h, \\ \varphi(h) &= 2\beta_1 x_0 - 2\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 + 2\beta_5 e + 2\alpha_5 f - 2\alpha_3 h, \\ \varphi(x_0) &= \alpha_3 x_0 + \alpha_5 x_1 - \frac{1}{2}\alpha_4 x_2, \\ \varphi(x_1) &= 2\beta_5 x_0 - 2\alpha_3 x_1 - \alpha_5 x_2, \\ \varphi(x_2) &= -2\beta_3 x_0 - 2\beta_5 x_1 + \alpha_3 x_2. \end{aligned}$$

References

1. Filippov V. On δ-derivations of Lie algebras // *Siberian Mathematical Journal*, 39 (1998), 6, 1218–1230.

2. Filippov V. δ-derivations of prime Lie algebras // *Siberian Mathematical Journal*, 40 (1999), 1, 174–184.

3. Filippov V. On δ-derivations of prime alternative and Malcev algebras // *Algebra and Logic*, 39 (2000), 5, 354–358.

4. Herstein I. Jordan derivations of prime rings // *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8 (1957), 1104–1110.

5. Jacobson N. Lie algebras, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics // No. 10. *Interscience Publishers* (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962. ix+331 pp.

6. Kaygorodov I. δ-derivations of classical Lie superalgebras // *Siberian Mathematical Journal*, 50 (2009), 3, 434–449.

7. Kaygorodov I. On δ-derivations of simple finite-dimensional Jordan superalgebras // *Algebra and Logic*, 46 (2007), 5, 318–329.

8. Zohrabi A., Zusmanovich P. A δ-first Whitehead lemma for Jordan algebras // *Communications in Mathematics*, 33 (2025), 1, 2.

9. Zusmanovich P. On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras // *Journal of Algebra*, 324 (2010), 12, 3470–3486.

Modern Problems Of Algebra And Geometry Anti Rota-Baxter Operators On 4-Dimensional Filiform Lie Algebras

Azizov M.E.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
azizovmajidkhan@gmail.com

Initially, Filippov and Hopkins introduced the concept of anti-derivations in their works [1],[3]. Later, Filippov generalized the notions of derivations and anti-derivations in his work introducing the concept of a δ-derivation [2].

Definition 1. Let A be an algebra over a field $\mathbb{F}$, $D : A \to A$ is any linear operator on A, $\delta \in \mathbb{F}$. If D satisfies the following identity:

$$D(xy) = \delta(D(x)y + xD(y)), \quad \forall x, y \in A,$$

then, D is called **δ-derivation on** A.

Analogically, it can be introduced the notion of δ-Rota-Baxter operator weight 0 with the condition

$$[R(x), R(y)] = \delta R([R(x), y] + [x, R(y)]).$$

Note that, if a δ-derivation D is invertible, then D^{-1} is δ-Rota-Baxter operator of weight 0.

On the other hand, the structure for constructing anti-$\mathcal{O}$-operators was developed by Kupershmidt [4], and according to him, the following definition of the anti-Rota-Baxter operator arises:

Definition 2. An **anti-Rota-Baxter operator** (ARB-operator, for short) on an algebra A over the field $\mathbb{F}$ is a linear map $R : A \to A$ satisfying

$$[R(x), R(y)] = -R([R(x), y] + [x, R(y)]), \quad \forall x, y \in A.$$

In this work, we describe anti-Rota-Baxter operators on 4-dimensional naturally graded filiform Lie algebras.

Theorem 1.[5] Any complex naturally graded filiform Lie algebra is isomorphic to one of the following non isomorphic algebras:

$$\mathfrak{n}_{n,1}: \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$\mathrm{Q}_{2n}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} & 2 \leq i \leq 2n-2 \\ [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^n e_{2n} & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Let's find the ARB-operators on the algebra $\mathfrak{n}_{3,1}$ and $\mathfrak{n}_{4,1}$.

Let R be an anti-Rota-Baxter operator on $\mathfrak{n}_{3,1}$ and its matrix on the basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ has the form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Theorem 2. The matrix of the anti-Rota-Baxter operator on the 3-dimensional algebra $\mathfrak{n}_{3,1}$ has one of the following form:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-a_{12}a_{21}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -\sqrt{-a_{12}a_{21}} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & \frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} \end{pmatrix} (a_{11} \neq -a_{22}).$$

Let R be an anti-Rota-Baxter operator on $\mathfrak{n}_{4,1}$ and its matrix on the basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ has the form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Theorem 3. The matrix of the anti-Rota-Baxter operator on the 4-dimensional algebra $\mathfrak{n}_{4,1}$ has one of the following form:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_{23}a_{44}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} (a_{22} \neq 0),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \frac{-a_{11}a_{33}}{a_{11}+a_{33}} & -a_{34} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_{11}a_{33}}{a_{11}+a_{33}} \end{pmatrix} (a_{11} \neq -a_{33}),$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}} & \frac{a_{11}(a_{23}+a_{34})+a_{22}a_{34}}{a_{21}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (a_{21} \neq 0).$$

Literature

1. Filippov V. T. On Lie algebras satisfying the 5th-degree identity(Russian).// Algebra and logic. 1996. V. 34, №6. pp. 379–394.

2. Filippov V. T. On δ-derivations of Lie algebras. // Siberian Mathematical Journal. 1998. V. 39, №6. pp. 1218–1230.

3. Hopkins N.C. Generalized derivations of nonassociative algebras.// Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra.1996. V. 5, pp. 215–224.

4. Kupershmidt B. A. What a Classical r-Matrix Really Is.// Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 1999. V. 6, №4. pp. 448-488.

5. Vergne M. Cohomologie des algbres de Lie nilpotentes. Application Гr ltude de la vari des algubres de Lie nilpotentes// Bulletin de la Soci. Math.matique de France. 1970. V. 98. pp. 81-116.

Description Of 4-Dimensional Transposed Poisson Algebras Which Are Constructed By A Null-Filiform Algebra

Berdalova X. R.[1], **Toshtemirova F. A.**[2]

Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
xursanoy.muminova55@gmail.com
Chirchik state pedagogical university, Chirchik, Uzbekistan;
feruzaisrailova45@gmail.com

Introduction.Transposed Poisson algebras are currently attracting considerable interest. If given a Lie product, a method for obtaining an associative-commutative product by differentiating it by $1/2$ has been found. However, we approached the problem from a slightly different angle. We considered the problem of classifying all transposed Poisson algebras whose dot product is isomorphic to the given algebra with associative-commutative multiplication.

Definition 1. Let $\mathfrak{L}$ be a vector space equipped with two bilinear operations

$$\cdot,\ [-,-] : \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}.$$

The triple $(\mathfrak{L}, \cdot, [-,-])$ is called a **transposed Poisson algebra** (or **transposed Poisson structure**) if $(\mathfrak{L}, \cdot)$ is a commutative associative algebra and $(\mathfrak{L}, [-,-])$ is a Lie algebra which satisfies the following compatibility condition

$$2z \cdot [x,y] = [z \cdot x, y] + [x, z \cdot y]. \tag{1}$$

Eq. (1) is called the **transposed Leibniz rule** because the roles played by the two binary operations in the Leibniz rule in a Poisson algebra are switched. Further, the resulting operation is rescaled by introducing a factor 2 on the left-hand side.

Transposed Poisson algebras were first introduced in a paper by Bai, Bai, Guo and Wu [1]. A transposed Poisson structure $\cdot$ on $\mathfrak{L}$ is called *trivial*, if $x \cdot y = 0$ for all $x, y \in \mathfrak{L}$.

Definition 2. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$, and φ be a bilinear map. Then φ is a $\frac{1}{2}$-**derivation** if it satisfies:

$$\varphi([x,y]) = \frac{1}{2}([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]). \tag{2}$$

Observe that $\frac{1}{2}$-derivations are a particular case of δ-derivations introduced by Filippov in [2]. It is easy to see from Definition 2 that $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ and $Ann(\mathfrak{L})$ are invariant under any $\frac{1}{2}$-derivation of $\mathfrak{L}$. Definitions 1 and 2 immediately implies the following key Lemma.

Lemma 1. Let $(\mathfrak{L},[-,-])$ be a Lie algebra and $\cdot$ a new binary (bilinear) operation on $\mathfrak{L}$. Then $(\mathfrak{L},\cdot,[-,-])$ is a transposed Poisson algebra if and only if $\cdot$ is commutative and associative and for every $z\in\mathfrak{L}$ the multiplication by z in $(\mathfrak{L},\cdot)$ is a $\frac{1}{2}$-derivation of $(\mathfrak{L},[-,-])$.

Let A 4-dimensional null-filiform commutative associative algebra.

$$A:\ e_ie_j=e_{i+j},\quad 2\le i+j\le 4.$$

Now we present a classification of all Transposed Poisson algebras whose associative commutative product is isomorphic to the algebra A.

Theorem 1. Let $(A,\cdot,[-,-])$ be a transposed Poisson algebra structure defined on the associative algebra A. Then this algebra is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$L_1:\ \begin{cases} e_ie_j=e_{i+j}, & 2\le i+j\le 4,\end{cases}$$

$$L_2:\ \begin{cases} e_ie_j=e_{i+j}, & 2\le i+j\le 4,\\ [e_i,e_j]=(j-i)e_{i+j-1}, & 3\le i+j\le 5.\end{cases}$$

$$L_3(\alpha):\ \begin{cases} e_ie_j=e_{i+j}, & 2\le i+j\le 4,\\ [e_i,e_j]=(j-i)\alpha e_{i+j}, & 3\le i+j\le 4.\end{cases}$$

$$L_4:\ \begin{cases} e_ie_j=e_{i+j}, & 2\le i+j\le 4,\\ [e_1,e_2]=e_4.\end{cases}$$

Literatures

1. Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y., *Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras,//* Journal of Algebra.2023. Vol. 632 , P. 535-566.

2. Filippov V., *δ-Derivations of Lie algebras,//* Siberian Mathematical Journal. 1998. Vol. 39 , №. 6, P. 1218-1230.

On Hyperspaces Of Extremal Topological Spaces

Juraev R. M.[1], Mirkomilova N. Z.[1], Isaev S. U.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan;
rmjurayev@mail.ru

Throughout the paper all spaces are assumed to be T_1-spaces. In [1] introduced and investigated e-spaces and e-continuous functions. In this work we studied preserving of e-space under the some normal functors. We only consider the functor $\exp_n$.

Denote by $\exp X$ the set of all nonempty closed subset of the T_1-space X. The family $\mathcal{B}$ of all sets in the form of

$$O\langle U_1,U_2,\dots,U_n\rangle=\{F:\ F\in\exp X,\ F\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i,\ F\cap U_i\neq\emptyset,\ i=1,2,\dots,n\},$$

where $U_1, U_2, \ldots, U_n$ is a sequence of open subsets of X, generates the topology on $\exp X$. This topology is called the Vietoris topology. The set $\exp X$ with the Vietoris topology is called the exponential space or the hyperspace of the space X [2]. Denote by $\exp_n X$ the set of all non-empty closed subsets of X of cardinality not greater than the natural number n, i.e.

$$\exp_n X = \{F : \ F \in \exp X, \ |F| \leq n\}.$$

Put

$$\exp_\omega X = \cup\{\exp_n X : \ n = 1, 2, \ldots\}, \ \exp_c X = \{F \in \exp X : \ F \text{ is compact in } X\}.$$

It is clear that $\exp_n X \subset \exp_\omega X \subset \exp_c X \subset \exp X$ for any topological T_1-space X.

Let X be a topological space and let A be a subset of X. We denote a closer of A in X by $\mathrm{cl}_X A$. A set G in a topological space X is called extremely open (briefly e-open) if G and its clouser $\mathrm{cl}_X G$ are open subsets of X. Recall that a subset of a topological space an e-closed if its complement is an e-open [1]. Clearly every clopen set in a topological space is an e-open set, but not conversely. For example $\mathbf{R}\backslash\{a\}$ is an e-open subset of $\mathbf{R}$ (for each $a \in \mathbf{R}$) which is not a clopen set.

The following lemma showed that the intersection of every two e-open sets is an e-open set.

Lemma [1]. Suppose that V is an e-open and U is an open subset of a topological space X, then $\mathrm{cl}_X(V \cap U) = \mathrm{cl}_X V \cap \mathrm{cl}_X U$.

Since the intersection of two e-open sets in a topological space (X, θ) is an e-open set by Lemma, the set of all e-open subsets of X form a base for a topology θ_e on X. This means that θ_e is weaker topology with respect to the original topology θ. Whenever τ_e coincide with θ (i.e., $\theta = \theta_e$), we call the space X an *e-space*.

Definition [1]. Let X and Y be topological spaces and $f\colon X \to Y$ be a function. We say that f is e-continuous at a point $x \in X$ if for each open set V in Y containing $f(x)$ there exists an e-open set U in X containing x such that $f(U) \subset V$. A function $f\colon X \to Y$ is called e-continuous if it is e-continuous at each point of X.

Clearly every e-continuous function is continuous, but the converse is not necessarily true in general. In fact if the mapping $id\colon R \to R$ is an identity, then it is continuous but not e-continuous. Whenever X is an e-space, then every continuous function on X is e-continuous.

Proposition. Let $U_1, U_2, \ldots, U_n$ be e-open subsets of a topological space X. Then the subset $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ is e-open in $\exp X$.

Theorem 1. If a topological space X is an e-space, then the exponential space $\exp_\omega X$ is an e-space.

Theorem 2. Let X and Y be topological spaces and n be a natural number. If a mapping $f\colon X \to Y$ is an e-continuous, then $\exp_n f\colon \exp_n X \to \exp_n Y$ is an e-continuous mapping.

Corollary. The functor $\exp_n$ preserves e-continuity of mappings.

References

1. Afrooz S., Azarpanah F., Hasan Hajee N. On e-spaces and rings of real valued e-continuous functions //Applied General Topology. 2023, issue 24, вЊЦ 2. P. 433–448.

2. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General Topology. Basic Constructions. Moscow.: Fizmatlit, 2006.

Classification Of Symmetric Leibniz Algebras Associated With Split Quasi-Filiform Lie Algebra

Choriyeva I.B.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
irodachoriyeva1@gmail.com

In recent years, extensive research on the theory of Leibniz algebras has led to the extension of numerous results from Lie algebras to Leibniz algebras. Leibniz algebras originally introduced by Bloh as a generalization of Lie algebras. A left (or right) Leibniz algebra is a non-associative algebra where the operator of left (or right) multiplication acts as a derivation.

A symmetric Leibniz algebra is one that satisfies both left and right Leibniz identities simultaneously. In this work, we present a classification of symmetric Leibniz algebras associated with the split quasi-filiform Lie algebra.

Definition 1. An algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ over a field $\mathcal{F}$ is called Lie algebra, if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$, the following identities hold:

$$[x, y] = -[y, x], \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Definition 2. An algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$ over a field $\mathcal{F}$ is called symmetric Leibniz algebra, if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$, the following identities hold:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z + y \cdot (x \cdot z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + (x \cdot z) \cdot y.$$

For the algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$, define $[-,-]$ and $\circ$ as follows:

$$[x, y] = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x), \qquad x \circ y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x).$$

Proposition 1. [2] Let $(\mathcal{L}, \cdot)$ be an algebra. The following assertions are equivalent:

1. $(\mathcal{L}, \cdot)$ is a symmetric Leibniz algebra.
2. The following conditions hold:
   (a) $(\mathcal{L}, [-,-])$ is a Lie algebra.
   (b) For any $x, y \in \mathcal{L}$, $x \circ y$ belongs to the center of $(\mathcal{L}, [-,-])$.
   (c) For any $x, y, z \in \mathcal{L}$, $([x, y]) \circ z = 0$ and $(x \circ y) \circ z = 0$.

According to this Proposition, any symmetric Leibniz algebra is given by a Lie algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ and a bilinear symmetric form $\omega : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to Z(\mathcal{L})$, such that for any $x, y, z \in \mathcal{L}$

$$\omega([x, y], z) = \omega(\omega(x, y), z) = 0, \tag{1}$$

where $Z(\mathcal{L})$ is the center of the Lie algebra. Then $\mathcal{L}$ is a symmetric Leibniz algebra with the product $x \cdot_\omega y = [x, y] + \omega(x, y)$.

Let $\mathcal{L}$ be a symmetric Leibniz algebra, whose underlying Lie algebra is

$$\mathcal{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C} \quad : \quad [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-2.$$

Since $Z(\mathcal{L}_{n-1}\oplus\mathbb{C})=\{e_{n-1},e_n\}$, then by straightforward computations, we get that the corresponding symmetric bilinear form $\omega:(\mathcal{L}_{n-1}\oplus\mathbb{C})\times(\mathcal{L}_{n-1}\oplus\mathbb{C})\to Z(\mathcal{L}_{n-1}\oplus\mathbb{C})$ satisfying the equation (1) is

$$\begin{array}{lll}\omega(e_1,e_1)=A_1e_{n-1}, & \omega(e_1,e_2)=A_2e_{n-1}, & \omega(e_2,e_2)=A_3e_{n-1},\\ \omega(e_1,e_n)=A_4e_{n-1}, & \omega(e_2,e_n)=A_5e_{n-1}, & \omega(e_n,e_n)=A_6e_{n-1},\end{array}$$

or

$$\omega(e_1,e_1)=A_1e_{n-1}+B_1e_n,\quad \omega(e_1,e_2)=A_2e_{n-1}+B_2e_n,\quad \omega(e_2,e_2)=A_3e_{n-1}+B_3e_n.$$

where $(A_4,A_5,A_6)\neq(0,0,0)$ and $(B_1,B_2,B_3)\neq(0,0,0)$.

Thus, we obtain the following classes of symmetric Leibniz algebras:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{S}_1(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) & : & e_1\cdot e_i=-e_i\cdot e_1=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-2,\\ (A_4,A_5,A_6)\neq(0,0,0) & & e_1\cdot e_2=e_3+A_2e_{n-1}, \quad e_1\cdot e_1=A_1e_{n-1},\\ & & e_2\cdot e_1=-e_3+A_2e_{n-1}, \quad e_2\cdot e_2=A_3e_{n-1},\\ & & e_1\cdot e_n=e_n\cdot e_1=A_4e_{n-1}, \quad e_n\cdot e_n=A_6e_{n-1},\\ & & e_2\cdot e_n=e_n\cdot e_2=A_5e_{n-1}.\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\mathcal{S}_2(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) & : & e_1\cdot e_i=-e_i\cdot e_1=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-2,\\ (B_1,B_2,B_3)\neq(0,0,0) & & e_1\cdot e_1=A_1e_{n-1}+B_1e_n,\\ & & e_1\cdot e_2=e_3+A_2e_{n-1}+B_2e_n,\\ & & e_2\cdot e_1=-e_3+A_2e_{n-1}+B_2e_n,\\ & & e_2\cdot e_2=A_3e_{n-1}+B_3e_n.\end{array}$$

Theorem 1. Let $\mathcal{L}$ be a symmetric Leibniz algebra, whose underlying Lie algebra is $\mathcal{L}_{n-1}\oplus\mathbb{C}$, then $\mathcal{L}$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{array}{lll}\mathcal{L}_1=\mathcal{S}_1(1,0,1,0,0,1) & \mathcal{L}_2=\mathcal{S}_1(0,0,1,0,0,1) & \mathcal{L}_3=\mathcal{S}_1(0,1,0,0,0,1)\\ \mathcal{L}_4=\mathcal{S}_1(1,0,0,0,0,1) & \mathcal{L}_5=\mathcal{S}_1(0,0,0,0,0,1) & \mathcal{L}_6=\mathcal{S}_1(1,0,0,0,1,0)\\ \mathcal{L}_7=\mathcal{S}_1(0,0,0,0,1,0) & \mathcal{L}_8=\mathcal{S}_1(0,0,1,1,0,0) & \mathcal{L}_9=\mathcal{S}_1(0,0,0,1,0,0)\\ \mathcal{L}_{10}^{\alpha}=\mathcal{S}_2(\alpha,1,0,1,0,1) & \mathcal{L}_{11}=\mathcal{S}_2(1,0,0,1,0,1) & \mathcal{L}_{12}=\mathcal{S}_2(0,0,0,1,0,1)\\ \mathcal{L}_{13}=\mathcal{S}_2(1,1,0,0,0,1) & \mathcal{L}_{14}=\mathcal{S}_2(0,1,0,0,0,1) & \mathcal{L}_{15}=\mathcal{S}_2(0,0,0,0,0,1)\\ \mathcal{L}_{16}=\mathcal{S}_2(1,0,1,0,1,0) & \mathcal{L}_{17}=\mathcal{S}_2(0,0,1,0,1,0) & \mathcal{L}_{18}=\mathcal{S}_2(1,0,0,0,1,0)\\ \mathcal{L}_{19}=\mathcal{S}_2(0,0,0,0,1,0) & \mathcal{L}_{20}=\mathcal{S}_2(0,0,1,1,0,0) & \mathcal{L}_{21}=\mathcal{S}_2(0,1,0,1,0,0)\\ \mathcal{L}_{22}=\mathcal{S}_2(0,0,0,1,0,0). & & \end{array}$$

Literature

1. Abchir.H., Abid.F., Boucetta.M. A class of Lie racks associated to symmetric Leibniz algebras //Journal of Algebra and Its Applications. 2022. Vol.21(11), No.2250230.

2. Barreiro.E., Benayadi.S. A new approach to Leibniz bialgebras //Algebras and Representation Theory. 2016. Vol.19(1), P.71–101.

3. Gomez.J.R., Jimenez-Merchan.A. Naturally graded quasi-filiform Lie algebras //Journal of Algebra. 2002. Vol.256, P.211–228.

Analytical And Computational Study Of Geodesics On The Pseudosphere

Maxsatulloyeva Feruza Maxmud qizi

Master's student, Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
feruzamakhsatulloeva@gmail.com

Annotation.
This article provides an analytical and computational study of geodesics on the pseudosphere. The theoretical framework is supported by a Python implementation, facilitating numerical solutions and visualization of geodesic curves.

Definition: A curve lying on a surface is called a geodesic of the surface if its geodesic curvature is zero at every point.

The pseudosphere is the surface of revolution generated by the rotation of a tractrix around its asymptote. The surface is parametrized as:

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ a\left(\cos u + \ln\tan\frac{u}{2}\right)\right).$$

For a surface of revolution, the coefficients of the first and second fundamental form are as follows:

$$E = \frac{a^2\cos^2 u}{\sin^2 u}, \quad F = 0, \quad G = a^2\sin^2 u.$$

The Christoffel symbols are:

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{2}{\sin 2u}, \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{\sin^3 u}{\cos u}, \quad \Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \cot u, \quad \Gamma^2_{22} = 0.$$

The differential equation of geodesic lines on a pseudosphere is given as follows:

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{\sin^3 u}{\cos u}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 - \cot u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{1+2\cos^2 u}{\cos u\sin u}\left(\frac{dv}{du}\right).$$

We simplify by letting $y = dv/du$:

$$\frac{dy}{du} = -\frac{\sin^3 u}{\cos u}(y)^3 - \cot u\,(y)^2 - \frac{1+2\cos^2 u}{\cos u\sin u}(y).$$

The following Python implementation provides a computational approach to solving and plotting these geodesic curves:

```
>import numpy as np
>import matplotlib.pyplot as plt
>from scipy.integrate import solve ivp
>def geodesicode(u, y):
>if np.isclose(np.cos(u), 0) or
>np.isclose(np.sin(u), 0):
>return [0] * Prevent division by zero
>dydu = (-np.sin(u) ** 3 / np.cos(u)) * (y ** 3) - (1 / np.tan(u)) * (y ** 2)
- ((1 + 2 * np.cos(u) ** 2) / (np.cos(u) * np.sin(u))) * y
```

```
>return [dydu]
>* Initial conditions
>u0 = 0.1 * Initial parameter value
>y0 = 1 * Initial condition y(0) = 1
>* Calculation interval (avoiding singularities)
>u span = (u0, np.pi / 2 - 0.1)
>u vals = np.linspace(*u span, 100)
>* Numerical solution using LSODA
>sol = solve ivp(geodesicode, u span, [y0], t eval=u vals, method='LSODA')
>* Diagnostic output
>print("Solver success: sol.success)
>print("Solution shape: sol.y.shape)
>print("Computed points: sol.t)
>* Visualization of the geodesic curve
>if sol.success and sol.y.shape[0] > 0:
> plt.plot(sol.t, sol.y[0], label='Geodesic curve y(u)')
>plt.xlabel('u')
>plt.ylabel('y')
>plt.legend()
>plt.grid()
>plt.title('Numerical Solution of Geodesic Equations')
>plt.show()
```

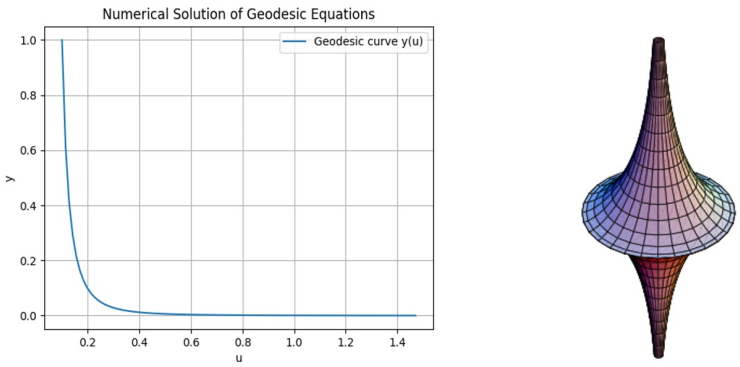


Figure 1.

Conclusion

Numerical methods play a crucial role in solving the geodesic equation, as analytical solutions are often impractical. By leveraging Python, these computations become more efficient and accessible, enabling accurate visualization of geodesics on surfaces. This approach not only facilitates a deeper understanding of geodesic behavior but also enhances the study of differential geometry through computational techniques.

References

1. A.Y. Narmanov, B.M. Saidov, S.T. Xoliqov. (2020) *Theory of Geodesic Lines* Tashkent: Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan Publishing House.

2. Manfredo P.Carmo (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces* Prentice Hall.

3. Herbert Busemann (1955) *The Geometry of Geodesics* Academic Press.

The Identity Of The Elliptic Theta Functions Of Order Five

Mizomov I. E.

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
mizomovinomjon@mail.ru

Let Λ be an integral lattice generated by 1 and $\eta \in \mathbb{C}$, where $\operatorname{Im}\eta > 0$, and let $\mathcal{E} := \mathbb{C}/\Lambda$ be the corresponding elliptic curve. We write $\Theta_n(\Lambda)$ for the set of holomorphic functions f on $\mathbb{C}$ satisfying the quasi-periodicity conditions

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z) \\ f(z+\eta) &= -e^{-2\pi i n z} f(z)\,. \end{aligned}$$

The functions in $\Theta_n(\Lambda)$ are called *theta functions of order n* with the respect to the lattice Λ. It is well-known (see e.g. [2]), Θ_n is a vector space of dimension n. Next, one can easily check that the function

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i (nz + \frac{n(n-1)}{2}\eta)}$$

forms a basis for Θ_1. For $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, we define

$$\theta_\alpha(z) := e^{2\pi i(\alpha z + [\alpha])} \prod_{m=0}^{n-1} \theta\left(z + \frac{m}{n} + \frac{\alpha}{n}\eta\right), \quad [\alpha] := \frac{\alpha(\alpha-n)}{2n}\eta + \frac{\alpha}{2n}\,. \tag{1}$$

Then $\{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{n-1}\}$ form a basis for Θ_n (see [1,Lemma 2.5] or [3, Appendix A]).

Let $n = 5$. Then we can rewrite (1) as

$$\begin{aligned}
\theta_0(z) &= \theta(z)\theta\left(z+\frac{1}{5}\right)\theta\left(z+\frac{2}{5}\right)\theta\left(z+\frac{3}{5}\right)\theta\left(z+\frac{4}{5}\right), \\
\theta_1(z) &= \theta\left(z+\frac{1}{5}\eta\right)\theta\left(z+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\eta\right)\cdots\theta\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\eta\right)e^{2\pi i\left(z+\frac{1}{10}-\frac{2}{5}\eta\right)}, \\
\theta_2(z) &= \theta\left(z+\frac{2}{5}\eta\right)\theta\left(z+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\eta\right)\cdots\theta\left(z+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\eta\right)e^{2\pi i\left(2z+\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\eta\right)}, \\
\theta_3(z) &= \theta\left(z+\frac{3}{5}\eta\right)\theta\left(z+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\eta\right)\cdots\theta\left(z+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\eta\right)e^{2\pi i\left(3z+\frac{3}{10}-\frac{3}{5}\eta\right)}, \\
\theta_4(z) &= \theta\left(z+\frac{4}{5}\eta\right)\theta\left(z+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\eta\right)\cdots\theta\left(z+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\eta\right)e^{2\pi i\left(4z+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\eta\right)}.
\end{aligned}$$

Our main result is

Theorem 1. For any $\tau \in \mathbb{C} - \frac{1}{5}\Lambda$ the above functions satisfy the following identities:

$$\theta_0^2\theta_1^3\theta_3 + \theta_0\theta_1\theta_2^2\theta_3^2 - \theta_1^3\theta_2^2\theta_4 - \theta_0\theta_3^4\theta_4 - \theta_0^2\theta_1\theta_2\theta_4^2 + \theta_2\theta_3\theta_4^4 = 0,$$

$$-\theta_0^2\theta_1^2\theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_2^3\theta_3^2 + \theta_1^2\theta_2^3\theta_4 + \theta_0^4\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_2\theta_3^2\theta_4^2 - \theta_0\theta_1\theta_4^4 = 0,$$

$$\theta_0^4\theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_2^2\theta_3^3 - \theta_0\theta_1^4\theta_4 + \theta_1^2\theta_2^2\theta_3\theta_4 - \theta_0^2\theta_2\theta_3\theta_4^2 + \theta_1\theta_3^3\theta_4^2 = 0,$$

$$\theta_0\theta_1\theta_2^4 - \theta_1^4\theta_2\theta_3 + \theta_0^2\theta_1^2\theta_3\theta_4 - \theta_0\theta_2^2\theta_3^2\theta_4 - \theta_0^2\theta_2\theta_3^3 + \theta_1\theta_3^2\theta_4^3 = 0,$$

$$\theta_0^3\theta_1^2\theta_3 - \theta_1\theta_2\theta_3^4 - \theta_0\theta_1^2\theta_2^2\theta_4 + \theta_2^4\theta_3\theta_4 - \theta_0^3\theta_2\theta_4^2 + \theta_0\theta_1\theta_3^2\theta_4^2 = 0,$$

$$\theta_0^2\theta_1\theta_2^3 - \theta_0\theta_1^4\theta_3 - \theta_0^2\theta_2\theta_3^2\theta_4 + \theta_1\theta_3^4\theta_4 + \theta_0\theta_1^2\theta_2\theta_4^2 - \theta_2^3\theta_3\theta 4^2 = 0,$$

$$\theta_0^2\theta_1\theta_2^2\theta_3 + \theta_1^2\theta_2\theta_3^3 - \theta_1\theta_2^4\theta_4 - \theta_0^2\theta_3^3\theta_4 - \theta_0\theta_1^2\theta_3\theta_4^2 + \theta_0\theta_2\theta_4^4 = 0,$$

$$\theta_0^4\theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2\theta_3^4 - \theta_0^2\theta_1\theta_2^2\theta_4 + \theta_1^2\theta_2\theta_3^2\theta_4 - \theta_0\theta_1^2\theta_4^3 + \theta_2^2\theta_3\theta 4^3 = 0,$$

$$-\theta_0^3\theta_1\theta_2^2 - \theta_0\theta_1^2\theta_2\theta_3^2 + \theta_1^4\theta_2\theta_4 + \theta_0^3\theta_3^2\theta_4 + \theta_0\theta_2^2\theta_3\theta_4^2 - \theta_1\theta_3\theta 4^4 = 0$$

$$-\theta_0\theta_2^4\theta_3 + \theta_1^3\theta_2\theta_3^2 + \theta_0^4\theta_2\theta_4 - \theta_0^2\theta_1\theta_3^2\theta_4 - \theta_0\theta_1^3\theta_4^2 + \theta_1\theta_2^2\theta_3\theta_4^2 = 0.$$

References

1. A. Chirvasitu, R. Kanda and S. P. Smith. Feigin and Odesskii's elliptic algebras//Journal of Algebra 581 (2021). pp.173–225.

2. D. Mumford. Tata lectures on theta. I. Modern Birkhauser Classics, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman, Reprint of the 1983 edition.

3. A. V. Odesskii. Elliptic algebras// Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002), №. 6(348), pp.87-122.

On Selection Principles In The n-Fold Symmetric Product Of The Space X

Mukhamadiev F. G.[1,2], **Abdumannonov A. I.**[1]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Kimyo International University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;
farhodgm@nuu.uz

In this work, we study some selection principles in the space n-fold symmetric product of the space X.

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers. Given a space X, we define its hyperspaces as the following sets:

1. $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty }\}$;
2. $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ has at most } n \text{ points }\}$, $n \in N$ [1].

$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$$\beta = \{\langle U_1, ..., U_k\rangle \mid U_1, ..., U_k \text{ are open subsets of } X,\ k \in N\},$$

where $\langle U_1, ..., U_k\rangle = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j$ and $A \cap U_j \neq \emptyset$ for each $j \in \{1, ..., k\}\}$.

Note that, by definition, $\mathcal{F}_n(X)$ is subset of $CL(X)$. Hence, it is topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. Moreover,

1. $CL(X)$ is called the *hyperspace of nonempty closed subsets of* X;

2. $\mathcal{F}_n(X)$ is called the $n-$*fold symmetric product of* X.

A space X is *almost Menger* [2] if for each sequence $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of open covers of X there is a sequence $\{\mathcal{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of finite sets such that $\mathcal{V}_m$ is a finite subset of $\mathcal{U}_m$ for each $m \in \mathbb{N}$ and $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \cup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_m\} = X$.

Theorem 1. If X is almost Menger space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

A space X is said a *set-Menger space* (weakly set-Menger, almost set-Menger) [2], if for each nonempty subset A of X and each sequence $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of collections of open sets in X such that $\overline{A} \subset \cup\mathcal{U}_m$, there exists a sequence $\{\mathcal{V}_{m\in\mathbb{N}}\}$ such that for each $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_m$ is a finite subset of $\mathcal{U}_m$ and $A \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \cup\mathcal{V}_m$ ($A \subset \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \cup\mathcal{V}_m}$, $A \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{\cup\mathcal{V}_m}$).

Theorem 2. If X is a set-Menger space, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Theorem 3. If X is a weakly set-Menger, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Theorem 4. If X is an almost set-Menger, then so is $\mathcal{F}_n(X)$.

Literature

1. Tuyen L.Q., Tuyen O.V., Kočinac Lj. D.R., The Vietoris hyperspace F(X) and certain generalized metric properties, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2024, 53(2), 356–366.

2. Kočinac Lj.D.R., Mukhamadiev F.G., Sadullaev A.K., *On Some Selection Principles in the Space of G-permutation Degree*, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar ser. A: Appl. Math. Inform. and Mech. vol. 16, 1, 2024, 91–100. https://doi.org/10.46793/SPSUNP2401.091K

On The Geodesic Flow On SO(3)

Narmanov A. Y.[1], **Ergashova Sh. R.**[2]

[1,2]National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
narmanov@yandex.com, shohida.ergashova@mail.ru

Let M be a compact smooth Rimenian manifold of dimension n, consider natural coordinates x and p on the cotangent bundle T^*M, where $x = (x^1, \dots, x^n)$ are the coordinates of a point on M and $p = (p_1, \dots, p_n)$ are the coordinates of a covector from the cotangent space T^*_xM in the basis $dx^1, \dots, dx^n$. Take the standard symplectic structure $\omega = dx \wedge dp$ on T^*M and consider the following function as a Hamiltonian:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)p_ip_j = \frac{1}{2}|p|^2. \tag{1}$$

where g_{ij} is the given tensor field on M, $g_{ij} = g_{ji}$ and $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$ for $\xi = (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n) \neq 0$. We determine g^{ij} from the condition $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. The tensor field g^{ij} determines the inner product on the cotangent bundle T^*M, for $p \in T^*M$ we have $|p|^2 = g^{ij}p_ip_j$. Since H is

the first integral of this flow, the unit cotangent sheaf $T_1^*M = \{(x,p) \in T^*M; |p| = 1\}$ is invariant with respect to the flow $sgradH$.

Definition 2.[2] The restriction of a flow $\dot{x} = sgradH$ on T_1^*M is called a *geodesic flow on the manifold M.*

The equation of geodesics can be considered as a Hamiltonian system in the cotangent bundle T^*M, and the geodesics themselves can be regarded as projections of trajectories of this Hamiltonian system on M. It is known following [1] :

Proposition 1. a) Let $\gamma(t) = (x(t); p(t))$ be an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = sgradH$ on T^*M. The curve $x(t)$ is then a geodesic, and its velocity vector $\dot{x}(t)$ is connected to $p(t)$ by the following relation:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \sum g^{ij}(x)p_j(t).$$

b) Conversely, if a curve $x(t)$ is a geodesic on M, then the curve $(x(t); p(t))$, where $p_i(t) = \sum g_{ij}(x)p_j(t)$, is an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = sgradH$.

Now we consider the special orthogonal group $SO(3)$ consists of all 3×3 orthogonal matrices with determinant 1. The group $SO(3)$ can be defined as:

$$SO(3) = \{A \in GL(3,\mathbb{R}) | A^TA = E, det(A) = 1\}.$$

The group $SO(3)$ is a smooth 3-dimensional manifold in $\mathbb{R}^9$.

Following matrix is a parametric view of $SO(3)$ on $\mathbb{R}^9$:

$$\begin{pmatrix} cosucosv & -sinucosw - cosusinvsinw & sinusinw - cosusinvcosw \\ sinucosv & cosucosw - sinusinvsinw & -cosusinw - sinusinvcosw \\ sinv & cosvsinw & cosvcosw \end{pmatrix}$$

where u, v, w are Euler angles.

We have the first quadratic form matrix and inverse matrix of first quadratic form of the manifold $SO(3)$, they are shown below respectively

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2sinv \\ 0 & 2 & 0 \\ 2sinv & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ and } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2cos^2v} & 0 & -\frac{sinv}{2cos^2v} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{sinv}{2cos^2v} & 0 & \frac{1}{2cos^2v} \end{pmatrix}$$

Hamiltonian on the cotangent bundle $T^*SO(3)$ is function

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2cos^2v}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2cos^2v}p_3^2 - \frac{sinv}{cos^2v}p_1p_3\right). \tag{2}$$

Hamiltonian system corresponding to Hamiltonian function (2) is

$$\begin{cases} p_1^{'}(t) = 0 \\ p_2^{'}(t) = -\frac{sinv}{2cos^3v}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1 + sin^2v}{2cos^3v}p_1p_3 \\ p_3^{'}(t) = 0 \\ u^{'}(t) = \frac{1}{2cos^2v}p_1 - \frac{sinv}{2cos^2v}p_3 \\ v^{'}(t) = \frac{1}{2}p_2 \\ w^{'}(t) = \frac{1}{2cos^2v}p_3 - \frac{sinv}{2cos^2v}p_1 \end{cases}. \tag{3}$$

Let us recall that Hamiltonian system is called *completely integrable in the sense of Liouville or completely integrable*, if exists set of smooth functions $F_1, ..., F_n$ as:

1) $F_1, ..., F_n$ are first integrals of $sgradH$ Hamiltonian vector field, 2) they are functionally independent on M, that is, almost everywhere on M their gradients are linearly independent, 3) $\{F_i, F_j\} = 0$ for any i and j, 4) the vector fields $sgradF_i$ are complete, that is natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole number line.

Theorem. Hamiltonian system (3) defined by (2) completely integrable in sense of Liouville.

In fact following functions are first integrals of the system

$$F_1 = H(Hamiltonian), \quad F_2 = p_1, \quad F_3 = p_3.$$

It easily to check that those functions satisfy to conditions of completely integrability. From proposition 1 we have following equations for geodesics on $SO(3)$:

$$\begin{cases} u^{'}(t) = \dfrac{1}{2cos^2v}p_1 - \dfrac{sinv}{2cos^2v}p_3 \\ v^{'}(t) = \dfrac{1}{2}p_2 \\ w^{'}(t) = -\dfrac{sinv}{2cos^2v}p_1 + \dfrac{1}{2cos^2v}p_3 \end{cases}$$

where $p_1 = const$, $p_2 = -\dfrac{p_1^2 + p_3^2}{4}\dfrac{1}{cos^2v} + \dfrac{p_1p_3}{2}\dfrac{sinv}{cos^2v} + C^2$ and $p_3 = const$.

References

1. Bolsinov A.V., and Fomenko A.T., Integrable Hamiltonian systems II. //Udmurtskiy universitet, Izhevsk. 1999.

2. Trofimov V.V., Fomenko A.T. Algebra i geometriya integriruyemix Gamiltonovix differensialnix uravneniy (russian). //Udmurt State University publisher, Izhevsk. 1995.

On Controllability By Means Of Two Killing Vector Fields On Spheres

Saitova Sayyora[1]

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
sayorass1985@gmail.com

In this paper we investigate Killing vector fields on spheres in Euc-lidian spaces. And, our vector fields on the sphere are the rotations with the center coincident with the origin (center of the sphere). All objects, manifolds, mappings and vector fields are supposed to be smooth.

Definition 1. A vector field X on the Riemannian manifold (M, g) is called a Killing vector field, if the infinitesimal transformations $\to X^t(x)$, generated by the vector field $X$are isometries.

Here $X^t(x)$ denotes the point on the integral curve of the given vector field corresponding to the parameter t.

Or, equivalently $L_Xg = 0$, where L_X - Lie derivative on (M, g).

The set of all Killing vector fields on a manifold (M, g) is known to be closed under the Lie bracket of two Killing fields, and a linear combination of Killing vector fields over the field of real numbers is also a Killing vector field. Therefore, the set of all Killing vector fields on the manifold (M, g) denoted as $K(M)$, forms a Lie algebra over the field of real numbers. Furthermore, it is known that the Lie algebra of Killing vector fields on a connected Riemannian manifold (M, g) has a dimension no greater than $\frac{1}{2}n\,(n+1)$, where n-is the dimension of (M, g).

For a Killing vector field X, and λ -real number, the vector field $Y = \lambda X$ is also a Killing vector field, as the integral curves of the vector fields coincide as sets, only differing in their traversal speed. In this case, it is easy to verify $[X, Y] = 0$ for Lie brackets of those pair of Killing vector fields.

Frequently, in mathematical physics models, the problem of finding Killing vectors for a given metric on a manifold are investigated. Each Killing vector field is associated with a one-parameter group of transfor-mations, which in this case preserves the metric.

Let us consider three dimensional sphere in the 4-dimensional Euc-lidian space $S^3 \subset R^4$ given as $x^2+y^2+z^2+w^2 = 1$; where x, y, z, w –Cartesian coordinates in R^4. On the sphere S^3, Killing vector fields X, Y are given:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w},\ Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

Lie bracket $[X, Y]$ of vector fields X, Y is:

$$[X, Y] = -w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}$$

Hence such Killing vector fields are not commuting, and more than fields X, Y, $[X, Y]$ are belongs to the minimal subalgebra $A\,(D)$, contains given vector fields.

In the point $p\,(1,\,0,\,0,\,0) \in S^3$ vectors $X\,(p)\,,\, Y\,(p)\,,\, [X,\,Y]\,(p)$ are linearly independent, i.e. the subspace $A_p\,(D) = \{\, X\,(p) :\, X \in A\,(D)\}$ has dimension three. And the orbit $L\,(p)$ has dimension three too. According to Theorem 1 ([3]) the orbit $L\,(p)$ is a closed subset. On the other hand, due to the theorems from ([4]) as the orbit has maximal dimension, $L\,(p)$ is an open subset of S^3. Though, orbit coincides with S^3.

The properties of the rotations on the sphere and the method of calculations are useful for investigation the controllability via two Killing vector fields on the Sphere . So we may constructs the following vector fields a their orbit coincides the given Sphere:

Theorem. The orbit of the family $D = \{X, Y\}$, where $X = \{-x_2, x_1, -x_4, x_3, ...\}$ and $Y = \{0, -x_3, x_2, -x_5, x_4, ...\}$ are the Killing vector fields on the Sphere is whole Sphere.

Literature

1. Lobry, Controllability of nonlinear control dynamical systems, Control Theory Topol. Funct. Anal., 1, 361–383 (1976).

2. Ya. Narmanov and O. Kosimov, On the geometry of Riemannian foliations of low-dimensional spheres, Rep. Uzbek. Acad. Sci., №. 2, 96–105 (2013).

3. Ya. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of orbits of Killing vector fields, Differ. Equ., 50, №. 12, 1582–1589 (2014).

4. Ya. Narmanov and S. Saitova, On the geometry of the reachable set of vector fields, Differ. Equ., 53, №. 3, 321–326 (2017).

5. Abdigappar, Narmanov, Saitova, Sayyora On Geometry of Vector Fields Journal of Mathematical Sciences vol 245, DO - 10.1007/s10958-020-04699, 2020/03/01

Irreducible Components Of Four-Dimensional Jordan Superalgebras

Saydaliyev A.R.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
azamatsaydaliyev6@gmail.com

We present the results obtained from the geometric classification of cpmplex four-dimensional Jordan superalgebras.

Definition 1. A superalgebra $\mathcal{A}$ is an algebra with a $\mathbb{Z}_2$-grading, i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ is a direct sum of two vector spaces and

$$\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_{i+j}, \quad \text{where} \quad i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Definition 2. A Jordan superalgebra is a superalgebra $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \mathfrak{J}_1$ satisfying the graded identities:

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx,$$

$$((xy)z)t + (-1)^{|y||z|+|y||t|+|z||t|}((xt)z)y + (-1)^{|x||y|+|x||z|+|x||t|+|z||t|}((yt)z)x =$$
$$(xy)(zt) + (-1)^{|t|(|y|+|z|)}(xt)(yz) + (-1)^{|y||z|}(xz)(yt),$$

where $|x| = i$ for $x \in \mathfrak{J}_i$.

Given an (m, n)-dimensional vector superspace $V = V_0 \oplus V_1$, the space

$$\mathrm{Hom}(V \otimes V, V) = (\mathrm{Hom}(V \otimes V, V))_0 \oplus (\mathrm{Hom}(V \otimes V, V))_1$$

is a vector superspace of dimension $m^3 + 3mn^2$. This space can be endowed with the structure of the affine variety $\mathbb{C}^{m^3+3mn^2}$.

By choosing a basis $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ of V, each element $\mu \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ is uniquely determined by $m^3 + 3mn^2$ structure constants $\alpha_{i,j}^k, \beta_{i,j}^q, \gamma_{i,j}^q, \delta_{p,q}^k \in \mathbb{C}$, where

$$\mu(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,j}^k e_k, \quad \mu(e_i \otimes f_p) = \sum_{q=1}^{n} \beta_{i,p}^q f_q,$$

$$\mu(f_p \otimes e_i) = \sum_{q=1}^{n} \gamma_{p,i}^q f_q, \quad \mu(f_p \otimes f_q) = \sum_{k=1}^{m} \delta_{p,q}^k e_k.$$

A subset $\mathbb{L}(T)$ of $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ is said to be *Zariski-closed* if it is defined by a system of polynomial equations T in the variables $\alpha_{i,j}^k, \beta_{i,p}^q, \gamma_{p,i}^q, \delta_{p,q}^k$ for $1 \le i, j, k \le m$ and $1 \le p, q \le n$.

Define $\mathcal{S}^{m,n}$ as the collection of all superalgebras of dimension (m, n) satisfying a given set of polynomial super-identities T, regarded as a subset $\mathbb{L}(T)$ of the affine variety $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$. It follows that $\mathcal{S}^{m,n}$ forms a Zariski-closed subset of $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$.

The group $G = (\mathrm{Aut}\, V)_0 \simeq \mathrm{GL}(V_0) \oplus \mathrm{GL}(V_1)$ acts on $\mathcal{S}^{m,n}$ via conjugation, given by

$$(g * \mu)(x \otimes y) = g\mu(g^{-1}x \otimes g^{-1}y)$$

for all $x, y \in V$, $\mu \in \mathbb{L}(T)$, and $g \in G$.

For $\mu \in \mathbb{L}(T)$, denote by $O(\mu)$ the orbit of μ under the action of G, and let $\overline{O(\mu)}$ be its Zariski closure. Given $J, J' \in \mathcal{S}^{m,n}$ with representatives $\lambda, \mu \in \mathbb{L}(T)$, we say that λ *degenerates* to μ and write $\lambda \to \mu$ if $\mu \in \overline{O(\lambda)}$. This implies $\overline{O(\mu)} \subset \overline{O(\lambda)}$, so the concept of degeneration does not depend on the specific choice of μ and λ. Consequently, we write $J \to J'$ instead of $\lambda \to \mu$ and use $O(J)$ in place of $O(\lambda)$. A degeneration $J \to J'$ is called *proper* if $J \ncong J'$. If J' does not belong to $\overline{O(J)}$, we write $J \not\to J'$.

A superalgebra J represented by $\lambda \in \mathbb{L}(T)$ is *rigid* in $\mathbb{L}(T)$ if $O(\lambda)$ is an open subset of $\mathbb{L}(T)$. Recall that a subset of a variety is *irreducible* if it cannot be expressed as the union of two non-trivial closed subsets. A maximal irreducible closed subset of a variety is known as an *irreducible component*. Therefore, J is rigid in $\mathcal{S}^{m,n}$ if and only if $\overline{O(\lambda)}$ is an irreducible component of $\mathbb{L}(T)$. It is a well-established fact that every affine variety can be uniquely decomposed as a finite union of its irreducible components.

Our main results from geometric classification of four-dimensional Jordan superalgebras are given in the following theorems.

Theorem 1. The variety of four-dimensional Jordan superalgebras of type $(1, 3)$ has dimension 7 and it has 11 irreducible components. In particular, all of them are rigid superalgebras.

Theorem 2. The variety of four-dimensional Jordan superalgebras of type $(2, 2)$ has dimension 6 and it has 25 irreducible components. In particular, 24 of them are rigid superalgebras.

Theorem 3. The variety of four-dimensional Jordan superalgebras of type $(3, 1)$ has dimension 9 and it has 21 irreducible components. In particular, all of them are rigid superalgebras.

References

1. Martin M.E., Shestakov I., Classification of three-dimensional Jordan superalgebras, arXiv:1708.01963v1.

2. Gorshkov I., Kaygorodov I., Popov, Yu.: Degenerations of Jordan algebras and "Marginal"algebras. Algebra Colloquium, 28 (2021), 2, 281–294.

On A Set Of The Fixed Points Of A Non-Stochastic Operator

Shamshiddinova M. I., Usmonov J. B.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
bohodirovicha@gmail.com
javohir0107@mail.ru

In [1], the notion of non-stochastic operator was defined.

Let a quadratic non-stochastic operator be given in the following form on a two-dimensional simplex:

$$V:\begin{cases} x^{'}=\frac{1}{2}z^2-yz+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}xz \\ y^{'}=\frac{1}{3}x^2-xz+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{2}xy+\frac{3}{2}yz \\ z^{'}=\frac{1}{2}y^2-xy+\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}xz+\frac{3}{2}yz \end{cases}$$

Lemma 1. *The set of fixed points of this operator V is* $\mathrm{Fix(V)} = \{\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}\}$, *where* $x_1 = (0, 0.5, 0.5)$, $x_2 = (a, \varphi(a), 1-a-\varphi(a)) \approx (0.44, 0.09, 0.47)$, $x_3 = (b, \varphi(b), 1-b-\varphi(b)) \approx (0.34, 0.29, 0.37)$ *and* a, b *are real roots of the quartic algebraic equation*

$$968x^4 - 1296x^3 + 567x^2 - 81x = 0,$$

in $[0, 1]$ *and*

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{136x^2 - 72x + 9}}{12}$$

Using the obtained results, we determine the characteristics of the fixed points.

Lemma 2. *For the characteristics of fixed points of the operator V the following assertions hold:*

- *The fixed points x_1 and x_2 are saddle;*
- *The fixed point x_3 is attractive.*

Reference

1. Rozikov, U.A., Xudayarov, S.S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos. Ann. Funct. Anal. 13, 17 (2022).

One-Dimensional Abelian Extension Of Five-Dimensional Solvable Leibniz Algebras

Sheraliyeva S. A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
abdiqodirovna@mail.ru

The notion of Leibniz algebras was first introduced by Loday in [4], and since then, numerous researchers have contributed to the classification of various classes of finite-dimensional Leibniz algebras. A complete classification of all Leibniz algebras up to dimension five has been provided in [1-3].

Among the most effective techniques for classifying algebras is the extension method. The central extensions play a crucial role in the classification of nilpotent algebras. Since, central extensions derive only algebras with nontrivial center, not all solvable algebras can be obtained through this approach. To overcome this limitation, Sund, in [6], extended the central extension method to the classification of solvable Lie algebras.

In the present work, using the result of [5] regarding non-abelian extensions of Leibniz algebras, we explore the abelian extensions of five-dimensional solvable Leibniz algebras. Specifically, we classify all one-dimensional abelian extensions of five-dimensional solvable Leibniz algebras whose nilradical is a three-dimensional Heisenberg algebra.

Definition. A vector space with bilinear map $(L, [\cdot,\cdot])$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ to the so-called Leibniz identity

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]],$$

holds.

A representation of a Leibniz algebra $(L, [\cdot,\cdot])$ is a triple (V, l, r), where V is vector space equipped with two linear maps $l : L \to gl(V)$ and $r : L \to gl(V)$, such that the following equalities hold:

$$r_{[x,y]} = [r_x, r_y], \quad l_{[x,y]} = [r_x, l_y], \quad l_y \circ l_x = -l_y \circ r_x, \quad \forall x, y \in L.$$

Now let L be Leibniz algebra and A be an abelian algebra. Let $l, r : L \to gl(A)$ be representation, $\omega : L \times L \to A$ a bilinear map satisfying the condition

$$\omega([x, y], z) - \omega(x, [y, z]) - \omega([x, z], y) - l_x\omega(y, z) - r_y\omega(x, z) + r_z\omega(x, y) = 0.$$

i.e. ω is a 2-cocycle on L with respect to (l, r). The set of all such 2-cocycles is denoted by $Z^2(L, l, r, \omega)$. The 2-coboundaries on L with respect to (l, r) are defined as

$$df(x, y) = f([x, y]) - l_{\alpha(y)}(f(x)) - r_{\alpha(x)}(f(y))$$

for some linear map $f : L \to A$ and $\alpha \in \mathrm{Aut}(L)$. The set of all such 2-coboundaries is denoted by $B^2(L, l, r)$ and its a subset of $Z^2(L, l, r)$. For the given $\omega \in Z^2(L, l, r)$, we can construct a Leibniz algebra $\widehat{L} = L(\omega, l, r)$ which is an extension of L by A as follows: $\widehat{L} = L \oplus A$ as vector space, and the Leibniz product is given by

$$[x + a, y + b]_{(\omega,l,r)} = [x, y]_L + \omega(x, y) + l_x b + r_y a, \quad x, y \in L, a, b \in A.$$

Consider following 5-dimensional solvable Leibniz algebra whose nilradical is a three-dimensional Heisenberg algebra [3].

$$H: \begin{array}{llllll} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, x_1] = e_1, & [x_1, e_1] = -e_1, & [e_3, x_1] = e_3, \\ [x_1, e_3] = -e_3, & [e_2, x_2] = e_2, & [x_2, e_2] - e_2, & [e_3, x_2] = e_3, & [x_2, e_3] = -e_3. \end{array}$$

Denote by N the nilradical of H, and $Z(N)$ the center of the nilradical. Let

$$G_{\omega^0} = \{X \in N : \omega^0(N, X) = (0)\}.$$

Proposition. Let $\widehat{H}$ be an extension of the solvable Leibniz algebra H, then $\dim(\widehat{H}) = \dim(H) + 1$ and $\widehat{H}$ is isomorphic to one of the following algebras:

if $G_{\omega^0} \cap Z(N) = (0)$, then

$$\widehat{H}_1: \begin{array}{llll} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, e_3] = e_4, & [e_3, e_1] = -e_4, \\ [e_1, x_1] = e_1, & [x_1, e_1] = -e_1, & [e_3, x_1] = e_3, & [x_1, e_3] = -e_3, \\ [e_4, x_1] = 2e_4, & [x_1, e_4] = -2e_4, & [e_2, x_2] = e_2, & [x_2, e_2] = -e_2, \\ [e_3, x_2] = e_3, & [x_2, e_3] = -e_3, & [e_4, x_2] = e_4, & [x_2, e_4] = -e_4, \end{array}$$

if $G_{\omega^0} \cap Z(N) \neq (0)$, then

$$\widehat{H}_2: \begin{array}{lllll} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, x_1] = e_1, & [x_1, e_1] = -e_1, & [x_2, e_1] = e_4, \\ [x_1, e_2] = e_4, & [e_3, x_1] = e_3, & [x_1, e_3] = -e_3, & [e_4, x_1] = e_4, & \\ [e_2, x_2] = e_2, & [x_2, e_2] = -e_2, & [e_3, x_2] = e_3, & [x_2, e_3] = -e_3, & \end{array}$$

$$\widehat{H}_3: \begin{array}{lllll} [e_1,e_1]=e_4, & [e_1,e_2]=e_3, & [e_2,e_1]=-e_3, & [e_1,x_1]=e_1, & [x_1,e_1]=-e_1, \\ [x_1,e_2]=e_4, & [e_3,x_1]=e_3, & [x_1,e_3]=-e_3, & [e_4,x_1]=2e_4, & \\ [e_2,x_2]=e_2, & [x_2,e_2]=-e_2, & [e_3,x_2]=e_3, & [x_2,e_3]=-e_3, & \end{array}$$

$$\widehat{H}_4: \begin{array}{llllll} [e_1,e_2]=e_3, & [e_2,e_1]=-e_3+e_4, & [e_1,x_1]=e_1, & [x_1,e_1]=-e_1, & & \\ [x_1,e_2]=e_4, & [e_3,x_1]=e_3, & [x_1,e_3]=-e_3, & [e_4,x_1]=e_4, & & \\ [e_2,x_2]=e_2, & [x_2,e_2]=-e_2, & [e_3,x_2]=e_3, & [x_2,e_3]=-e_3+e_4, & [e_4,x_2]=e_4. & \end{array}$$

Literature

1. Ayupov Sh.A., Omirov B.A. On 3-dimensional Leibniz algebras.// Uzbek Math. Jour. 1999., №.1. P. 9–14.

2. Cañete E.M., Khudoyberdiyev A.Kh. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 439. P. 273–288.

3. Khudoyberdiyev A.Kh., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K. On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras.// Linear Algebra Appl. 2014. Vol. 457. P.428Ц454.

4. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. // Enseign. Math. 1993. Vol. 2. №. 39(3-4). P. 269–293.

5. Liu J., Sheng Y., Wang Q. On non-abelian extension of Leibniz algebras. // Communications in Algebra. 2018. Vol. 46 (2). P.574–587.

6. Sund T. On the structure of solvable Lie algebras.// Mathematica Scandinavica journal.1979. Vol. 44, P. 235–242.

Three-Magnon System In The Hiesenberg Model

Tashpulatov S.M.[1]

Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

In the work [1] considered the three-magnon system in a two-dimensional isotropic and anisotropic bounded ferromagnetic lattice, and the spectrum and bound states of the system were investigated using numerical methods.

In the work S. Tashpulatov [2], was considered the three-magnon system in an isotropic non-Heisenberg ferromagnet model with spin values $s = 1$ with the nearest neighbors interactions. The structure of the essential spectrum of the system was investigated and the upper and lower estimate of the number of three-magnon bound states of the system was obtained.

We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system. Hamiltonian of the system has the form

$$H = J\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m\overrightarrow{S}_{m+\tau}), \tag{1}$$

where $J < 0$ is the parameter of the bilinear exchange interaction between atoms, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the operator of the atomic spin $\frac{1}{2}$ at the site m, and summation over τ ranges the nearest neighbors.

Hamiltonian H acts in a symmetric complex Fock space $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$. We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$ and $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, where $||\varphi_0|| = 1$. We set $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the magnon creation and annihilation operators at the site m. The vector $S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0$ describes the state of the system of three magnons at the sites p, q and r with the spin $s = \frac{1}{2}$. The vectors $\psi = \sum_{p,q,r} f(p,q,r)S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0$ constitute an orthonormal system. We let $\mathcal{H}_3$ denote the closure of this space of three-magnon states of the operator H.

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_3$ is invariant with respect to the operator H. The operator H_3 is a bounded self-adjoint operator. It generates bounded self-adjoint operator $\overline{H}_3$, acting in the space $l_2((Z^\nu)^3)$ according to the formula*

$$(\overline{H}_3 f)(p,q,r) = J\sum_{\tau}[\{\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} + \delta_{p,r+\tau} + \delta_{p+\tau,r} + \delta_{q,r+\tau} + \delta_{q+\tau,r} -$$

$$-3\}f(p,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p-\tau,r}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q-\tau,r}\times$$

$$\times f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r-\tau}f(p,q,r-\tau) - \frac{1}{2}\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{p,r-\tau}\times$$

$$\times f(p,q,r-\tau) + \frac{1}{2}f(p-\tau,q,r) + \frac{1}{2}f(p,q-\tau,r) + \frac{1}{2}f(p,q,r-\tau) - \frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}\times$$

$$\times f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p+\tau,r}f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q+\tau,r}f(p,q+\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r+\tau}\times$$

$$\times f(p,q,r+\tau) - \frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{p,r+\tau}f(p,q,r+\tau) + \frac{1}{2}f(p+\tau,q,r) +$$

$$+\frac{1}{2}f(p,q+\tau,r) + \frac{1}{2}f(p,q,r+\tau)], \tag{2}$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_3 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_3$ according to the formula

$$H_3\psi = \sum_{p,q,r}(\overline{H}_3 f)(p,q,r)S_p^-S_q^-S_r^-\varphi_0. \tag{3}$$

We let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform: $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^3) \to L_2((T^\nu)^3) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_3$, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus with the normalized Lebesgue measure $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$. We set $\widetilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transformation transforms the operator $\overline{H}_3$ into the bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_3$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_3$.*

We let $\mathcal{H}_2$ denote the space of two-magnon states of the operator H. We let H_2 denote the restriction of operator H to the space $\mathcal{H}_2$.

Theorem 3. *The space $\mathcal{H}_2$ is invariant with respect of the operator H. The operator H_2 is a bounded self-adjoint operator. It generates the bounded self-adjoint operator $\overline{H}_2$, acting in the space $l_2((Z^\nu)^2)$ according to the formula*

$$(\overline{H}_2 f)(p,q) = J\sum_{\tau}\{[\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} - 2]f(p,q) - \delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q) -$$

$$-\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau) + f(p-\tau,q) + f(p,q-\tau) - \delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q) -$$

$$-\delta_{p,q+\tau} f(p, q+\tau) + f(p+\tau, q) + f(p, q+\tau)\}. \quad (4)$$

The operator H_2 *acts on the vector* $\psi \in \mathcal{H}_2$ *according to the formula*

$$H_2\psi = \sum_{p,q} (\overline{H}_2 f)(p,q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (5)$$

Next, using the results of the study of the spectrum of operator H_2 and the tensor products of Hilbert spaces and the tensor products of operators in the Hilbert spaces, we describe the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the operator H_3.

Литература

1. Van Himbergen J. E., and Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976. vol. 82. PP. 389–416. https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. vol 7, № 4. PP. 874–899.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7

Reconstruction Of A Singly Connected Surface Based On Its Extrinsic Curvature

Tillayev D. R.

Tashkent State Transport University, Uzbekistan, Tashkent;
drtillaev@mail.ru

It is known that a convex surface has three types of points: regular points, ribbed points, and a vertex. A convex surface with regular points and having a vertex at a single point is called a convex surface with a single vertex. The existence and uniqueness of a convex surface with a single vertex are proven when the external curvature function is given as a function of Borel sets, and the value of the external curvature at the given point, which is the projection of the vertex of the surface, is provided.

This thesis is devoted to solving the problem of the existence of a surface defined by a given external curvature function in a convex domain with a singularity at a single point.

Definition 1. Surfaces with vertices are convex surfaces that do not have ribbed points.

Let D be some simply connected domain in the Oxy plane in the Cartesian coordinate system $Oxyz$, and let a point A_0 be a strictly interior point of the domain D, and ∂D being the boundary of the domain D. Then, $z = f(x, y)$ is the equation of the surface F with edge L, and we will assume that the edge L is one-valued projected onto the boundary ∂D of domain D. The function $f(x, y)$ is continuous at all points of the domain$D$ and has continuous derivatives at all points except at point A_0. The graph of such a function will describe a surface with a single vertex. Moreover, the vertex of the surface is projected along a line parallel to the Oz axis onto point $A_0 \in D$.

Definition 2. The external curvature of a set $M' \subset F$ is defined as the area of its spherical mapping M^* (where M^* is the spherical mapping of the set M' onto the unit sphere):

$$\omega(M') = S(M^*).$$

The problem of recovering a convex surface from its external curvature in the class of convex surfaces is formulated as follows:

If a function $\mu(M)$ is given on Borel sets $M \subset D$, and the number ω_0 is specified, is there a convex surface for which the external curvature transferred to the field D satisfies

$$\omega_F(M) = \mu(M)$$

and at point A_0

$$\omega(A_0) = \omega_0,$$

with an edge L and a single-valued projection onto the field D.

The following theorem is valid.

Theorem: For a given function $\omega(M)$ of a Borel set on a convex field D to be transferred to D as the external curvature of the convex surface with an edge L, the one-valued projection onto the field D, and a vertex projecting onto the point A_0, it is necessary and sufficient that:

1. $\mu(M)$ is a non-negative and completely additive function that having the properties of external curvature of a surface with a vertex.
2. For M, consisting of a single point, $\omega(M) < 2\pi$.
3. For the whole field, $\mu(D) = \Omega < 2\pi$, but greater than ω_0.
4. For M containing more than one point A_0,

$$\mu(M) > \omega_0.$$

The problem of reconstructing a surface with a given external curvature was previously solved in the class of convex polyhedra [1] and in the class of regular surfaces. The results of this thesis prove the existence of a surface based on a given external curvature for surfaces with a singularity at a single point.

Literature

1. Aleksandrov A.D. Intrinsic geometry of convex surfaces. Taylor and Francis Group. 2006. pp. 235-269.

Restoration Of The Polyhedra By Conditional External Curvature

Sharipov A. S.[1,2], **Topvoldiyev F. F.**[2]
Department of Geometry and Topology, Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Uzbekistan;
asharipov@inbox.ru
Branch of National Research Nuclear University MEPhI in Tashkent, 1, Khuroson str., 100214, Tashkent, Uzbekistan;
Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Fergana State University, 150100, Fergana, Uzbekistan;
ftopvoldiev87@mail.ru

Abstract. This paper estimates the value of the conditional full angle of a polyhedral angle with an edge perpendicular to a given direction, and presents a formula for calculating this value. It is shown that this value satisfies Pogorelov's definition of a "monotonic function of angle". The problem of reconstructing a polyhedron using this function is also considered.

Introduction. One of the main direction of differential geometry, called global geometry, is the study of geometric objects throughout their entire length. Some problems of this geometry are connected to the restoration of surfaces by given geometric characteristics. Geometric characteristics can be internal curvature, external or Gaussian curvature, and other functions connected with surfaces.

A.D. Alexandrov [1] first solved the problem of reconstructing a surface, in particular a convex polyhedron, from external curvature in 1942.

A. V. Pogorelov [2] solved this problem in 1956 using a method based on the extremal property of external curvature. This method was later called Pogorelov's extremal method. They defined the external curvature of a polyhedron as the sum of the areas of the spherical images of the polyhedron at all vertices.

In the works of A. S. Sharipov [3], the properties of surfaces isometric on sections were investigated. And also for convex polyhedrons that do not have support planes and edges perpendicular to a given direction, the problem of reconstruction by conditional curvature was solved. He defined the conditional external curvature of a polyhedron as the sum of the conditional full angles of the polyhedron at all vertices.

Let us consider an n-hedral angle whose vertex at the origin, uniquely projected onto the plane Oxy, with edges $a_1, a_2, ..., a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_n$, has not supporting plane is perpendicular to the vector $\overrightarrow{e}$. Let the edges a_1 and a_{m+1} of the n -hedral angle be perpendicular to the vector $\overrightarrow{e}$. Denote such an n-hedral angle by S_n^2.

Let the edges $a_{m+2}, a_{m+3}, ..., a_n$ intersect the plane $x = 1$ and denote the intersection points by $A_{m+2}, A_{m+3}, ..., A_n$, accordingly. The edges $a_2, a_3, ..., a_m$ continue the side $x > 0$ and denote the intersection points with the plane $x = 1$ by $A_2, A_3, ..., A_m$, accordingly.

Definition. A convex n - hedral angle with with two edges perpendicular to the vector $\vec{e}$, but without a supporting plane perpendicular to the vector $\vec{e}$, will be called a polyhedral angle with with two singularities. Then these edges are parallel to the plane $x = 1$ and they intersect with the plane $x = 1$ at infinitely distant points. We connect the points A_2 and A_n, as well as the points A_m and A_{m+2}. We have segments A_2A_n and A_mA_{m+2}, accordingly. We denote the intersection point of these segments by O'.

We connect the points $A_2, A_3, ..., A_m$, as well as the points $A_{m+2}, A_{m+3}, ..., A_n$, successively and have a non-convex polygon $A_2A_3...A_mA_{m+2}A_{m+3}...A_n$.

Conditional full angle of S_n^2 determined by the formula

$$\omega\left(S_n^2\right) = A_mA_{m+2} \cdot \cos\varphi_1 + A_2A_n \cdot \cos\varphi_2 - P_{A_2A_3\ldots A_m} - P_{A_{m+2}A_{m+3}\ldots A_n}, \tag{1}$$

where $P_{A_2,A_3,\ldots,A_m}$ and $P_{A_{m+2},A_{m+3},\ldots,A_n}$ are the perimeters of the brokens $A_2, A_3, ..., A_m$ and $A_{m+2}, A_{m+3}, ..., A_n$, accordingly. φ_1 is the angle between the edge a_1 and the segment A_2A_n, φ_2 is the angle between the edge a_{m+1} and the segment A_mA_{m+2}.

Theorem 1. The value of $\omega(S_n^2)$ is invariant with respect to the following transformations:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = \alpha x' + y'\cos\varphi + z'\sin\varphi \\ z = \beta x' - y'\sin\varphi + z'\cos\varphi \end{cases} \tag{2}$$

Let us consider in three-dimensional Euclidean space a convex polyhedron P, which is uniquely projected onto the plane Oxy, and with vertices $A_1, A_2, ..., A_m$ and does not have a supporting plane, perpendicular to the vector $\vec{e}$. Let $\omega_1 = \omega(A_1), \omega_2 = \omega(A_2), ..., \omega_m = \omega(A_m)$.

The conditional external curvature of a convex polyhedra P is equal to the sum of the conditional curvatures at all its vertices and we denote it by $\omega(P)$, that is,

$$\omega(P) = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_m = \sum_{i=1}^{m} \omega_i. \tag{3}$$

Let D - convex domain lying on the plane Oxy, bounded by a closed broken L'. Consider a spatial closed broken L, which is uniquely projected onto L', where the vertices of L are projected onto the vertices of L'. Let $B_1, B_2, ..., B_m$ fixed points of the domain $B_1, B_2, ..., B_m$. $g_1, g_2, ..., g_m$ are the lines passing through the points $B_1, B_2, ..., B_m$, accordingly, and parallel to the axis Oz. Denote by W the set of convex polyhedra with boundary L, the vertices of which lie on the points $A_i \in g_i, i = 1, 2, ..., m$. $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ - finite real numbers.

Theorem 2. If $\omega_i > 0$, then there exists a convex polyhedron $P \in W$ with conditional curvatures at the vertex $A_i \in g_i$ equal to $\omega(A_i) = \omega_i$ and it is unique with respect to the transformations

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = \alpha x' + y'\cos\varphi + z'\sin\varphi \\ z = \beta x' - y'\sin\varphi + z'\cos\varphi \end{cases} \tag{4}$$

Literature

1. A. D. Alexandrov, Convex polyhedral. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

2. A. V. Pogorelov. External Geometry of Convex Surfaces. –Moscow: Nauka, 1969.

3. Anvarjon Sharipov, Mukhamedali Keunimjaev. Existence and uniqueness of polyhedra with given values of the conditional curvature. International electronic journal of geometry. 2023. Vol.16, pp. 160–170.

Invariants Of Anti-Commuting Pairs Of Matrices

Turdibaev R. M.
New Uzbekistan University, Tashkent, Uzbekistan
r.turdibaev@newuu.uz

The study of matrix invariants under simultaneous conjugation plays a crucial role in the classification of representations of algebras. While the Jordan normal form provides a complete classification for single matrices, the problem for tuples of matrices is "wild" in general, making a full classification impractical. Instead, the geometric invariant theory (GIT) quotient $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d//\mathrm{GL}_n$ provides a meaningful algebraic description, whose coordinate ring $C_{nd} = \mathbb{C}[\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d]^{\mathrm{GL}_n}$ is generated by traces of products of at most n^2 generic matrices. However, explicit presentations of C_{nd} remain challenging, even for small cases.

In this work, we consider the *invariant anti-commuting variety*, the GIT quotient of the anti-commuting variety $\mathcal{Z}_n$, where pairs of matrices satisfy the relation $XY = -YX$. The coordinate ring $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_n//\mathrm{GL}_n]$ inherits structure from C_{n2} via a natural surjection

$$C_{n2} = \mathbb{C}[\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})]^{\mathrm{GL}_n} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{Z}_n//\mathrm{GL}_n].$$

Due to anti-commutativity, many generators of C_{n2} vanish, allowing us to determine a generating set for $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_n//\mathrm{GL}_n]$, which appears to be minimal for all $n \leq 5$.

Theorem: A generating set of $\mathbb{C}[\mathcal{Z}_n//\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]$ consists of

$$Tr(X), Tr(X^2), \ldots, Tr(X^n),\ Tr(Y), Tr(Y^2), \ldots, Tr(Y^n)$$

and $Tr(X^{2i}Y^{2j})$, where $i, j \geq 1$ and $2i + 2j \leq n$.

For $n \leq 4$, we establish defining relations independently, refining known techniques used for the invariant commuting variety and Calogero-Moser space [2, 3]. For $n = 5$, we develop an algorithmic approach to systematically derive relations, which extends to $n \geq 6$.

Our computations, verified using software system `Macaulay2`, confirm that the obtained ideals are radical and that the number of irreducible components matches the known results of Chen and Wang [1]. This work provides a refined description of the Procesi-Razmyslov theory for the invariant anti-commuting variety and offers a computational framework for further exploration.

References

1. X. Chen and W. Wang, Anti-commuting varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), №. 3, 1597–1617.

2. Z. Normatov and R. Turdibaev, Calogero-Moser spaces and the invariants of two matrices of degree 3, Transform. Groups, 2022, doi:10.1007/s00031-022-09776-y.

3. F. Eshmatov, X. GarcГңa-MartГңnez, and R. Turdibaev, Noncommutative poisson structure and invariants of matrices, arXiv:2402.06909 (2024), 1–17.

Local Derivations On The n-th Schrödinger Algebra

Alauadinov A. K.[1], **Jumaniyozov D. E.**[2], **Yusupov B. B.**[3]

V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
amir_t85@mail.ru
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 4, Tashkent, Uzbekistan;
dostondzhuma@gmail.com
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

Local derivations and automorphisms have been objects of many research works in recent years. Even many results have been addressed in this direction, there are still lots of related unsolved problems. R.V.Kadison, D.R.Larson and A.R.Sourour first introduced the notion of local derivations on algebras in their remarkable papers [3], [4]. After that many research papers have been published regarding local derivations of non-associative algebras. For instance, it is proved that every local derivation on a finite-dimensional semisimple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation (see [2]). Moreover, local derivations of solvable Lie algebras are investigated in [1], and it is shown that there exist solvable Lie algebras which admit local derivations which are not ordinary derivation. However, it is also proved that there are solvable Lie algebras for which every local derivation is a derivation (see [1]). Recently, it has been proved that every local derivation on solvable Lie algebras whose nilradical has maximal rank is a derivation.

In this paper, we study local derivations on n-th Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}_n$. The n-th Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}_n$ is a Lie algebra with a $\mathbb{C}$-basis $\{e, f, h, z, u_k, v_k, \mid k = 1, ..., n\}$ equipped with the following non-trivial commutation relations

$$\begin{aligned} [h, e] &= 2e, & [h, f] &= -2f, & [e, f] &= h, \\ [u_i, v_j] &= \delta_{ij} z, & [h, u_k] &= u_k, & [h, v_k] &= -v_k, \\ [e, v_k] &= u_k, & [f, u_k] &= v_k, & [z, \mathfrak{sch}_n] &= 0, \end{aligned}$$

where δ_{kj} is the Kronecker Delta defined as 1 for $k = j$ and as 0 otherwise.

From the definition one can notice that the n-th Schrödinger algebra $\mathfrak{sch}_n$ is a finite-dimensional, non-semisimple and non-solvable Lie algebra, and it is the semidirect product of $\mathfrak{sl}_2$ and $(2n + 1)$-dimensional Heisenberg algebra, that is

$$\mathfrak{sch}_n = (\mathfrak{sl}_2 \ltimes \mathfrak{h}_n)$$

where $\mathfrak{h}_n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{z, u_k, v_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

A derivation on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz rule:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \quad \text{for any} \quad x, y \in \mathcal{L}. \tag{1}$$

The set of all derivations of $\mathcal{L}$ is denoted by $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ and with respect to the commutation operation is a Lie algebra. For any element $x \in \mathcal{L}$ the left multiplication operator $\mathrm{ad}_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, defined as $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ is a derivation, and derivations of this form are called

inner derivations. The set of all inner derivations of $\mathcal{L}$, denoted by $\mathrm{Inn}(\mathcal{L})$, is an ideal in $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$.

Definition 1. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$. The set of all local derivations on $\mathcal{L}$ we denote by $\mathrm{LocDer}(\mathcal{L})$.

Let $n \geq 2$. For any $1 \leq l < k \leq n$, one can easily verify that the linear map $\sigma_{lk} : \mathfrak{sch}_n \to \mathfrak{sch}_n$ defined below is a derivation:

$$\begin{aligned} &\sigma_{lk}(h) = \sigma_{lk}(e) = \sigma_{lk}(f) = \sigma_{lk}(z) = 0, \\ &\sigma_{lk}(u_j) = \delta_{lj}u_k - \delta_{lj}u_l, \quad \sigma_{lk}(v_j) = \delta_{lj}v_k - \delta_{kj}v_l. \end{aligned} \tag{2}$$

Clearly, $\sigma_{lk}(1 \leq l < k \leq n)$ are outer derivations. We define another outer derivation σ as follows

$$\sigma(h) = \sigma(e) = \sigma(f) = 0,\ \sigma(u_l) = \frac{1}{2}u_l,\ \sigma(v_l) = \frac{1}{2}v_l,\ \sigma(z) = z,\ 1 \leq l \leq n. \tag{3}$$

The following theorem is proved in [5].

Theorem 1. $\mathrm{Der}(\mathfrak{sch}_n) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{sch}_n) \oplus \bigoplus\limits_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{C}\sigma_{ij} \bigoplus \mathbb{C}\sigma$.

It should be noted that, if $n = 1$, then $\mathrm{Der}(\mathfrak{sch}_n) = \mathrm{Inn}(\mathfrak{sch}_n) \bigoplus \mathbb{C}\sigma$, where σ is defined as (3).

Theorem 2. Every local derivation on $\mathfrak{sch}_n$ $(n \geq 2)$ is a derivation.

References

1. Ayupov Sh., Khudoyberdiyev A. Local derivations on solvable Lie algebras // *Linear and Multilinear Algebra*, 69 (2021), 7, 1286–1301.

2. Ayupov A.Sh., Kudaybergenov K.K. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras // *Linear Algebra Appl.*, **493**, (2016) 381-398.

3. Kadison R.V. Local derivations // *J. Algebra*, **130** (1990) 494–509.

4. Larson D.R., Sourour A.R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ // *Proc. Sympos. Pure Math.*, **51** (1990) 187-194.

5. Lei B., Yang H. The derivation algebra and automorphism group of the n-th Schrödinger algebra // *Communications in Algebra*, 52:1 (2024), 283-294.

Modern Problems Of Algebra And Geometry: A More Detailed Look

Zhanakunova Meerim Orozobekovna[1], Askarbek Kyzy Lira [2]

Bishkek State University named after K. Karasaev Kyrgyz Republic city Bishkek;[1]
mzhanakunova1206@gmail.com [1]
Bishkek State University named after K. Karasaev Kyrgyz Republic city Bishkek;[2]
lira.askarbekkyzy.ch@gmail.com [2]

Annotation

This paper reviews current problems in algebra, geometry , and physics that face modern mathematics. The focus is on the Langlands program, invariants of algebraic varieties, the Poincar conjecture in higher dimensions of the Langlands program, and the

geometric Langlands program. These problems are not only of theoretical interest, but also have implications for fields such as cryptography, data analysis, and theoretical physics. We address these issues by considering their implications and interdisciplinary impact. The purpose of this article is to provide a deep understanding of contemporary issues in algebra and mathematics. We come not only to highlight current challenges and unsolved questions, but also to show how these theoretical problems affect other scientific and technological areas. By analyzing and discussing this complex topic, we hope to inspire further research and innovation in mathematics and related disciplines.

Algebra and geometry, despite their ancient roots, are among the most important areas of mathematical research. While these mathematics are poorly understood in the disciplines, they are less likely to face challenges that not only push the boundaries of mathematical knowledge but also impact technology and science. In this article, we examine some of the contemporary challenges facing algebra and geometry, and consider their complexity and potential solutions.

The fields of algebra and geometry, although ancient in origin, continue to be fertile ground for exploration and discovery. As mathematicians delve deeper into these areas, they encounter challenges that not only push the boundaries of mathematical understanding, but also have profound implications for technology and science. In this article, we delve into some of the modern challenges facing algebra and geometry, exploring their complexities and potential solutions.

The interaction of algebra and geometry often leads to breakthroughs in other scientific fields. For example, advances in algebraic geometry have spurred progress in cryptography, improving security protocols in digital communications. Likewise, geometric methods play a key role in data analysis, where understanding the shape of data can lead to more effective algorithms in machine learning and artificial intelligence.

The connection between algebra and geometry often leads to breakthroughs in other scientific fields. For example, advances in algebraic power have contributed to advances in cryptography, improving the security of protocols in digital communications. Geometric methods play a key role in data analysis, where understanding the shape of data can lead to more efficient algorithms in machine learning and artificial intelligence.

Modern problems in algebra and geometry highlight the dynamic and interconnected nature of mathematical research. Solving these problems not only advances theoretical knowledge, but also stimulates innovation in technology and science. Finding solutions to these problems is a testament to the enduring power and mystery of mathematics, inspiring future generations to tackle the unknown frontiers of algebra and geometry. As mathematicians continue to solve these problems, they not only advance theoretical knowledge, but also stimulate innovation in technology and science.

Finding solutions to these problems is a testament to the enduring power and mystery of mathematics, inspiring future generations to explore the unknown frontiers of algebra and geometry. Contemporary problems in algebra and mathematics define the dynamic and general nature of mathematical research. These achievements develop the complexity and beauty of modern mathematics and we will add examples to each of the provisions to make it more visual and understandable.

Literature

1. Aleksandrov, P.S. Introduction to set theory and general topology. - M.: Nauka, 1977.

2. Bourbaki, N. Elements of Mathematics. General Topology. Part I. - M.: Nauka, 1966.

3. Antonov, V.I. Linear algebra and analytic geometry. Reference notes: Textbook / V.I. Antonov. - M.: Prospect, 2011. - 144 p.

4. Vestyak , A.V. Algebra and analytical geometry. In 2 parts / A.V. Vestyak. - Magadan: Magadan, 2012. - 1004 p.

5. Ilyin, V.A. Linear algebra and analytic geometry : Textbook / V.A. Ilyin, G.D. Kim. - M.: Prospect, 2012. - 400 p.

6. Shafarevich, I.R. Linear algebra and geometry / I.R. Shafarevich, A.O. Remizov. - M.: Fizmatlit , 2009. - 512 p.

7. Yaglom, I.M. Finite algebra, finite geometry and codes / I.M. Yaglom. - M.: Lenand, 2016. - 72 p.

О Количестве Представлении Натурального Числа Суммой Степеней Простого Числа

Абраев Б. Х.[1], Ишкобилова А. Б.[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
babrayev@mail.ru
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;

Рассмотрим уравнение

$$n = a_1p_1 + a_2p_2^2 + a_3p_3^3 \tag{1}$$

где p_i $(i = 1, 2, 3)$ простые неизвестные, a_i целые ненулевые коэффициенты, $n-$ целые числа.

Если в равенство (1) $|a_1| = 1, |a_2| = 1, |a_3| = 0$ или $|a_1| = 1, |a_2| = 0, |a_3| = 1$ то имеем известние проблему Хуа-Ло-Кена (см.[1]). Необходимым условием разрешимости (1) является

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv n(\mathrm{mod}2) \tag{2}$$

Предполагаем, что $(a_i, a_j) = 1, \quad (a_i, n) = 1$ для $1 \leq i < j \leq 3$ и

$$D = \max\{3, |a_1|, |a_2|, |a_3|\} \tag{3}$$

Известно, что для произволных целых m справедливо равенство

$$\delta(m) = \int_0^1 e(m\alpha)d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{m=0,} \\ 0, & \text{m} \neq 0. \end{cases}$$

Если мы определим в равенство (1) $m = a_1p_1 + a_2p_2^2 + a_3p_3^3 - n$, то имеем

$$\delta(a_1p_1 + a_2p_2^2 + a_3p_3^3 - n) = \int_0^1 e((a_1p_1 + a_2p_2^2 + a_3p_3^3 - n)\alpha)d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если уравнение (1) имеет решения,} \\ 0, & \text{если уравнение (1) не имеет решения.} \end{cases}$$

Пусть $r(n)-$ количество простых решений уравнений (1) с условием $p < \sqrt[6]{\frac{n}{D}} = P$, то есть

$$r(n) := \sum_{\substack{n=a_1p_1+a_2p_2^2+a_3p_3^3 \\ p_j<P}} \log p_1 \log p_2 \log p_3.$$

Таким образом, $r(n)$ представляет собой взвешенное число представлений n в виде суммы вида (1), но в ограниченном диапазоне.

Обозначим

$$S_1(\alpha) = \sum_{0<p_1\le P} \log p_1\, e((a_1p_1)\alpha), \quad S_2(\alpha) = \sum_{0<p_2\le P} \log p_2\, e((a_2p_2^2)\alpha),$$

$$S_3(\alpha) = \sum_{0<p_3\le P} \log p_3\, e((a_3p_3^3)\alpha).$$

Поскольку $S_1(\alpha),\ S_2(\alpha),\ S_3(\alpha)$ является тригонометрическим полиномом, мы можем вычислить $r(n)$ по формуле коэффициента Фурье,

$$\int_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)S_3(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha =$$

$$= \int_0^1 e(-n\alpha) \sum_{p_1\le P} \log p_1 e(a_1p_1\alpha) \sum_{p_2\le P} \log p_2 e(a_2p_2^2\alpha) \sum_{p_3\le P} \log p_3 e(a_3p_3^3\alpha)d\alpha =$$

$$= \sum_{p_j\le P} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \int_0^1 e\left((a_1p_1 + a_2p_2^2 + a_3p_3^3 - n)\alpha\right) d\alpha =$$

$$= \sum_{\substack{a_1p_1+a_2p_2^2+a_3p_3^3=n \\ p_j\le P}} (\log p_1)\,(\log p_2)\,(\log p_3)$$

и так(см.[2])

$$r(n) = \int_0^1 S_1(\alpha)S_2(\alpha)S_3(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha.$$

Основные результаты настоящей работы является теорема. Предположим, что справедливо (2) и (3).

Теорема. *Если a_1, a_2, a_3 ненулевые действительные числа, не все одного знака, то (1) имеет бесконечно много решений в простых числах*

$$p_j \ll \sqrt[3]{n} + D^{2+\varepsilon}\ (j = 1, 2, 3).$$

Литература

1. Vaughan R.C. Mean value theorems in prime number theory // J. London Math. Soc. - 1975. №2 (10). -pp.153-162.

2. Аллаков, И.А. По одной оценке Вейля и Виноградова. Сибирский математический журнал, 43(1), с.1–4, 369765 2001.

Асимптотическая Формула Для Количества Представления Натурального Числа В Виде Суммы Квадратов Четырёх Простых Чисел

Аллаков И.[1], **Имамов О. Ш.**[2]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
iallakov@mail.ru
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
oybekimamov000@gmail.com

Известно, что Хуа-Ло-Кена (см. стр.110, [1]) доказал, что каждое достаточно большое целое число $n \equiv 5(mod24)$ представимо в виде суммы пяти квадратов простых чисел. Информацию о результатах, полученных в этом направлении за последние годы можно найти в работах Wang Y. H. [2], Аллаков И., Музропова Н.С. [3]. Учитывая результат Хуа-Ло-Кена и утверждение Ж. Л. Лагранжа о сумме четырех квадратов разумно, предполагать, что каждое достаточно большое число $n \equiv 4(mod24)$ можно представить в виде суммы четырёх квадратов простых чисел, то есть в виде

$$n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2, \tag{1}$$

где p_1, p_2, p_3, p_4- простые числа.

Несмотря на то, что в направлении решений этой задачи имеется достаточно много работ (см. [4]) эта задача остается нерешенной. В 2000 году J. Y. Liu и M. C. Liu [5] доказал, что если $N \geq 2$ и $U(N)-$множество положительных целых чисел $n \equiv 4(mod24)$, $n \leq N$ которые нельзя представить в виде (1), тогда справедлива оценка

$$E(N) = cardU(N) \ll N^{\theta}, \text{где } \theta > 13/15. \tag{2}$$

Ранее Хуа [1] и W. Schwarz [6] доказали, что $E(N) \ll N\log^{-A}N$ для любого $A > 0$. Отметим, также P.Shieds [7], V.A.Plaksin [8] и E.B.Kovalchik [9] получили асимптотическую формулу в этой задаче, которая справедлива для всех $n \equiv 4(mod24)$, $n \leq N$ за исключением не более чем $E(N) < N\exp\left(-c_1\sqrt{\log N}\right)$ значения из них, где c_1- абсолютная постоянная.

Пусть, далее, $L = \log N$, $C(N) = \frac{c_2}{\log\log N}$, $c_1, c_2, \ \ldots -$абсолютные постоянные, $e(n\alpha) = e^{2\pi in\alpha}$, $\alpha-$ действительное число. Положим

$$r(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\ldots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N,\, i=\overline{1,4}}} (\log p_1)\cdots(\log p_4), \tag{3}$$

$$R(n) = \sum_{\substack{n=p_1^2+\ldots+p_4^2 \\ p_i^2 \leq N,\, i=\overline{1,4}}} 1. \tag{4}$$

Тогда в силу (3) и (4) имеем

$$r(n) \leq \frac{1}{16} R(n) \log^4 N. \tag{5}$$

Поэтому

$$R(n) \geq \frac{16}{\log^4 N} r(n). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что если $r(n) > 0$, тогда для n существует представление в виде (1).

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Если $N-$достаточно большое число тогда,*

$$E(N) \ll N^{13/15+4C(N)},$$

и для $n \notin U(n)$

$$r(n) = \frac{\pi^2}{16} \mathfrak{S}(n) n + O\left(NL^{-1}\right),$$

где $\mathfrak{S}(n) \gg 1-$сингулярный ряд задачи.

Следствие. *Для $R(n)-$ числа представлений заданного $N/2 < n \leq N$, $n \equiv 4(mod 24)$, в виде (1) справедлива оценка*

$$R(n) > c_2 \frac{n}{\log^4 n} \left(1 - c_3 \frac{1}{\log n}\right).$$

Полученный результат является улучшением ранее полученных результатов [5-9].

Отметим, также что после известной работы H.L.Montgomery and R.C.Vaughan [10] идея о возможности получение оценки снизу для количества представления чисел в указанном виде впервые была предложена Б.М.Бредихином (см. [11]).

Литература

1. Хуа-Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел. // Труды МИ РАН им. В. А. Стеклова, 1947, Т.22, С. 3–179.

2. Wang Y. H. Numbers representable by five prime squares with primes in an arifmetic progression // Acta Arithmetica XC. 3 1999. pp. 217–244.

3. Аллаков И., Музропова Н.С. О решении одного уравнения в простых числах // Чебышевский сборник. 2024, Т.25(4), С. 5–26.

4. Meng (Jinan) X.-M. On sums of a prime and four prime Squares in short intervals // Acta Math. Hungar. 105 (4) (2004), pp.261–283.

5. Liu J. Y. and Liu M. C. The exceptional set in the four prime squares problem // Illinois J. Math. 44 (2000), pp. 272–293.

6. Schwarz W. Zur Darstellung yon Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen // J. Riene Angew. Math. 206(1961), pp. 78–112.

7. Shields P. Some applications of sieve methods in number theory, Thesis, University of Wales, 1979.

8. Plaksin V. A. An asymptotic formula for the number of solutions of a nonlinear equation for prime numbers,// Math. USSR Izv. 18(1982), pp. 275–348.

9. Kovalchik E. B. Some analogies of the Hardy-Littlewood equation // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov 116(1982), pp. 86–95.

10. Montgomery H.L., Vaughan R.C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. 1975. V. 27. pp. 353–370.

11 Аллаков И. Некоторые оценки снизу для числа представлений гольдбаховых чисел // Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. Ташкент, ИК АН Узбекистана, 1985. вып. 77. С. 37–42.

Абелевы W*-Алгебры

Бердимуратова Ш. К.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
shaxrizadaberdimuratova@gmail.com

Пусть E – Банахово *-алгебра. Если выполняется следующее условие $\|a^*a\| = \|a\|^2$, то E называется C^*-*алгеброй*. Если, при этом, существует предсопряженное пространство, т.е. нормированное пространство N с $N^* = E$, то E называется W^*-*алгеброй*.

Пусть Ω – локально-компактное Хаусдорфово пространство и ν – нормальная регулярная Борелевская мера на Ω. Напомним, что функционал f на Ω называется локально существенно ограниченным (л.с.о.), если $\exists C > 0$, $f(t) \leq C$ и $\nu(\{t : |f(t)| > C\}) = 0$ локально почти всюду. Пространство всех локально существенно ограниченных измеримых комплексных функций на Ω обозначим через $L^\infty(\Omega, \nu)$. Легко показать, что это пространство является нормированным относительно нормы $\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \ |f(t)| \leq C\}$. Положим

$$L^1(\Omega, \nu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \int\limits_\Omega |f(t)| d\nu < \infty\}$$

Непосредственно показывается, что $(L^\infty(\Omega, \nu), \|\cdot\|_\infty)$ – абелева C^*-алгебра и $L^1(\Omega, \nu)^* = L^\infty(\Omega, \nu)$, следовательно L^∞ является W^*-алгеброй.

Определение. Говорят, что Хаусдорфово пространство *экстремально несвязно*, если замыкание каждого открытого подмножества также открыто. Компактное экстремально несвязное пространство называется *Стоуновским пространством*. X называется *гиперстоуновским* пространством, если оно является стоуновским пространством и для любого $f \in C(X)$ и $f > 0$ существует нормальная регулярная Борелевская мера μ на X такая, что $\mu(f) > 0$.

Пусть теперь Z – абелева W^*-алгебра. Положим:

$$\Omega = \{\chi : Z \to \mathbb{C} : \chi(ab) = \chi(a)\chi(b), \chi - \text{ линейный функционал}\}.$$

Множество Ω называется *спектром* алгебры Z, а функционал χ называется *характером*.

Теорема. Пусть Z – абелева W^*-алгебра и Ω ее спектральное пространство. Тогда Ω – гиперстоуновское пространство и существуют локально компактное Хаусдорфово пространство X и регулярная Борелевская мера ν на X с $\sup \nu = X$ такие, что Z^*-изоморфно $L^\infty(X, \nu)$, т.е. $C(\Omega)^*$-изоморфно $L^\infty(X, \nu)$.

Литература

1. Li Bing-Ren Introduction to operator algebras. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. 1992

О Некоторых Свойствах Пространства τ-Замкнутых Подмножеств Пространства X

Бешимов Р. Б.[1], **Манасыпова Р. З.**[2]

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;

[2]Ташкентский государственный педагогический университет Узбекистана имени Низами, Ташкент, Узбекистан

[1]rbeshimov@mail.ru, [2]rezidabadrutdinova@gmail.com

В данной работе мы изучаем некоторые свойства пространства τ-замкнутых подмножеств пространства X.

Все приведчнные пространства подразумеваем T_1-пространствами. Через τ будем обозначать некоторое бесконечное кардинальное число.

Пусть X - топологическое T_1-пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число.

Определение 1. [1] Пусть X - топологическое T_1-пространство. Множество $F \subset X$называется τ-замкнутым в X, если для каждого $B \subset F$ такого, что $|B| \leq \tau$, замыкание множества B в X лежит в F.

Дополнение τ-замкнутого подмножества будем называть τ-открытым.

Через $\exp^{\tau} X$ обозначим семейство всех τ-замкнутых подмножеств пространства X.

Пусть $U_1, ..., U_n$ есть τ-открытые подмножества пространства X.

Теорема 1. Семейство множеств вида $O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \{F : F \in \exp^{\tau} X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i \neq \varnothing,\ \text{для всякого } i = 1, 2, ..., n\}$ образуют базу некоторой топологии на множестве $\exp^{\tau} X$.

Через $\exp X$ обозначим семейство всех замкнутых подмножеств пространства X, снабжчнное топологией Виеториса [2].

Предложение 1. Пространство $\exp(X)$ есть всюду плотное подпространство пространства $\exp^{\tau}(X)$.

Литература

1. Okunev O. The minitightness of products, Topology and its Applications 208 (2016), 10-16.

2. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. The basic constructions. Moscow, 2006.

О Решении Системы Линейных Диофантовых Уравнений В Простых Числах

Эрдонов Б. Х.

Термезский государственный педагогический институт, Термез, Узбекистан;
bekmurod.erdonov@mail.ru

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_s$−натуральные числа, $a_{i1}, \ldots, a_{im}$−целые числа, $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m$− простые числа. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \ldots,\ s;\ m > s)\,. \tag{1}$$

Обозначим через $U_{s,m}(X)$−множество наборов $(\,b_1, b_2, \ldots, b_s),\ 1 \le b_1, \ldots, b_s \le X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах и пусть $E_{s,m}(X) = card\ U_{s,m}(X)$.

При $m \ge 2s + 1$ Wu Fang [1], исследуя систему (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

Известно, что разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями (см. [2]):

a) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \ldots, l_m$ с условиями $1 \le l_1, \ldots, l_m \le p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:
$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \ldots + a_{im}l_m \equiv b_i\,(mod p)\,,\ \ (i = 1, \ldots, s)$;

b) существуют действительные положительные числа $y_1, \ldots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{im}y_m = b_i,\ (i = 1, ..., s)$.

Пусть $W_{s,m}(X)$−множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s),\ 1 \le b_1, b_2, \ldots, b_s \le X$, которые удовлетворяют условиям a), b) и $R(\vec{b})$−число решений системы (1) в простых числах.

Исследованию функций $E_{s,m}(X)$, $W_{s,m}(X)$ и $R(\vec{b})$, при различных значениях s и m посвящены работы M.C.Liu и K.M.Tsang [2,3], И.Аллакова [4-6], Хуа Ло-Кен (см. стр. 163, [7]), Б.Х.Абраева [8,9], Б.Х.Эрдонова [10-12] и других. Не смотря на это в случае $s < m \le 2s,\ \ (s > 3)$ до сих пор не только не получена асимптотическая формула для $R(\vec{b})$, но в общем случае даже не установлено существование решений системы (1).

В настоящей работе рассмотрим именно этот общий случай. Положим $s = n,\ \ m = n + k,\ (1 < k \le n)$ и рассмотрим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{i,n+k}p_{n+k}, \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{2}$$

Как выше было подчеркнуто, разрешимость системы (2) зависит от условий a) и b). Легко увидеть, что $cardW_{n,n+1}\,(X) \le cardW_{n,n+k}\,(X)$. Отсюда и из теоремы 3.1.1 работы [4] следует, что множество $W_{n,n+k}\,(X)$ содержит достаточно много элементов. Обозначим:

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} = det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & ... & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & ... & a_{2i_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{ni_n} & a_{ni_2} & ... & a_{ni_n} \end{pmatrix},\ 1 \le i_1, i_2, ..., i_n \le n + k,\ i_1 \ne i_2 \ne ... \ne i_n.$$

Кроме того, для удобства используем обозначения $\Delta_{12\ldots n} = \Delta$, $\Delta_{k+1,\ldots,k+n} = \bar{\Delta}$ и $\Delta_{i,j}$ определитель, полученный из Δ, заменой элементов i−столбца с элементами j−ого столбца.

Чтобы избежать тривиальности и вырожденности наложим на коэффициенты следующие условия:

$$\Delta_{i_1 \dots i_n} \neq 0, \text{ для всех } (1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n+k) \text{ и взаимно простые.}$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема. *Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:*
a) существует достаточно большое число A, такое, что при $X \geq B^A$ справедлива оценка $E_{n,n+k}(X) \leq X^{n-\varepsilon}$;
b) если $R\left(\vec{b}\right)$ −количество решений системы (2) в простых числах $p_j \leq N$, тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, справедлива оценка

$$R\left(\vec{b}\right) \gg \mathcal{K}^{k-\varepsilon} (\ln \mathcal{K})^{-n-k},$$

для всех $(b_1, \dots, b_n)$, $1 \leq b_1, \dots, b_n \leq X$ за исключением не более чем $X^{n-\varepsilon}$ из них, где $N = 3(n!)^2 B^{2n-1} X$, $\mathcal{K} = 3(n!)^2 B^{2n-1} |\vec{b}| (\sqrt{n})^{-1}$.

Литература

1. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables // Acta Math.Sinica. 1957. №7. pp. 102–121.

2. Liu M. C., Tsang K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to GoldbachЎs problem // J. reine angew. Math. 1989. vol. 399. pp. 109–136.

3. Liu M. C., Tsang K. M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York. 1989. pp. 595–624.

4. Аллаков И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. Термез.: Сурхон нашр. 2021.

5. Аллаков И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах // Изв. вузов. Матем., 2006, №9. С. 10–16.

6. Аллаков И., Исраилов М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах // Докл. АН РУз. Ташкент, 1992. №10-11. С. 12–15.

7. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, С. 3–179.

8. Abrayev B.Kh., Allakov I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers // Uzbek Mathematical journal. Tashkent. 2020. №3. pp. 16–24.

9. Аллаков И., Абраев Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами // Чебышевский сборник т.24 №2. 2023. С. 15–37.

10. Аллаков И., Эрдонов Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел // Чебышевский сборник т.25 №3. 2024. С. 11–36.

11. Эрдонов Б.Х. Об условиях разрешимости системы линейных уравнений состоящей из трҷх уравнений с пятью неизвестными в простых числах // Научный вестник НамГУ, 2024. №4. С. 116–121.

12. Эрдонов Б.Х. О сходимости сингулярного ряда в задаче о представлении натуральных чисел в виде суммы простых чисел // Научный вестник СамГУ, 2024. №5. С. 11–20.

О Подгруппах Симплектических Групп

Жузбаев Н.О.

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан;
njuzbaev@inbox.ru

В настоящее время теории линейных групп является одним из основных направлений в современной алгебре, интенсивно развивающимся и имеющим многочисленные точки соприкосновения с различными разделами как особенно математики, так и естествознания в целом. Фактическую сердцевину этой теории составляет изучение подгруппового строения линейных групп. Возникнув как частная задача о конечных матричных группах, исходящая из потребностей теории Галуа, проблема описания и классификации подгрупп в заданных линейных подгруппах, пройдя через многие этапы своего становления и развития, превратилась в обширную ветвь математического знания, обладающую своим собственным языком и проблематикой.

Строка матрицы над кольцом R, элементы которой порождают как идеал всҷ кольцо R, называется унимодулярной. Пусть $m \geq 1$ и $n \geq 2$ - целые числа. Коммутативное кольцо R называется (m, n) - польным, если для каждой $(m \times n)$ - матрицы A над R с унимодулярными строками существует такой элемент $\epsilon \in R$(зависящий от A) и обратимые элементы $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, ..., \epsilon_n \in R$ так, что

$$A\left[1, \epsilon, \epsilon^2, ..., \epsilon^{n-1}\right]^t = [\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_m]^t$$

где t означает транспонирование. Ясно, что (m, n) - польное кольцо является и (s, t) - польным при $s \leq m$ и $t \leq n$. Таким образом, любое (m, n) - польное кольцо является $(1, 2)$ - польным кольцом, т.е. кольцом стабильного ранга 1. Известно, что если каждое поле вычетов полулокального кольца и кольцо размерности O, в том числе кольца регулярного по Нейману, содержит более $m(n-1)$ элементов, то оно является (m, n) - польным кольцом.

Пусть R - $(2, 3)$ - полное кольцо с обратимым элементом 2 и $V = V(R)$ - симплектическое пространство над R размерности $r = 2m$, $m \geq 2$, т.е. свободный R - модуль с r свободными порождающими и заданной на нчм невырожденной кососимметрической билинейной формой $\beta(x, y)$. Группа автоморфизмов ρ пространства V, оставляющих форму $\beta(x, y)$ инвариантной, т.е. удовлетворяющих соотношению $\beta(x\rho, y\rho) = \beta(x, y)$ при всех $x, y \in V$, называется симплектрической группой над V и обозначается $Sp(V)$.

Пусть I-идеаль кольца R. Гомоморфизм колец $R \to R \setminus I$ индуцирует сюръективный гомоморфизм симплектических пространств $\lambda_I : V(R) \to V(R \setminus I)$ который, в свою очередь, индуцирует сюръективный гомоморфизм симплектических групп $\pi_I : Sp(V(R)) \to Sp(V(R \setminus I))$. Общая и специальная конгруэнтные подгруппы $GSp(V, I)$ и $SSp(V, I)$ определяются следующим образом:

$$GSp(V, I) = (center\ Sp(V(R \setminus I))); SSp(V, I) = Ker\pi_I$$

Для $\rho \in Sp(V)$ определим вес $J(\rho)$ как наименьший идеал J со свойством $\rho \in GSp(V, J)$. Если H-подгруппа, то по определению положим $J(H) = \sum_{\rho \in H} J(\rho)$.

Теорема 1. Если подгруппа H группы $Sp(V)$ нормализуется подгруппой $SSp(V, I)$ то $H \geq SSp(V, J(H)I^{12})$.

Напомним, что если существует ряд

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_{d-1} \trianglelefteq H_d = G$$

подгрупп группы G, где $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ означает, что H_{i-1} является нормальной подгруппой группы H_i, то H называется субнормальной подгруппой группы G. В том случае пишут $H \lhd^d Sp(V)$.

Наименьшее такое d называется субнормальной глубиной H в G.

Теорема 2. Если $H \trianglelefteq^d Sp(V)$, то

$$SSp(V, J^{f(d)}) \leq H \leq GSp(V, J),$$

где $J = J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{11}(12^d - 1)$.

Эти теоремы улучают соответствующие теоремы из [1].

Литература

1. Ishibashi H. Multiplicative and transitive symplectic groups //Journal of algebra. 1983. V. 84. №. 1. pp. 115–127.

2. Тажетдинов С. Субнормальное строение симплектических групп над (2,3)-полными кольцами //Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34. №. 6. С. 165–169.

Эквивалентность Путей Относителью Действия Группы $SO(2l+1, K)$

Муминов К. К.[1]

[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан; m.muminov@rambler.ru

Пусть $X = K^n$ - n- мерное линейное пространство над полем K, где K есть поле действительных чисел R, либо поле комплексных чисел . Через $GL(n, K)$ обозначим группу всех обратимых линейных преобразований пространства .

Действие $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ в K^n есть обычное умножение $n \times n$ - матрицы g на вектор-столбец (обозначение: gx). Ниже через I обозначается интервал (a, b) из R (возможны случаи, когда $a = -\infty$ или $b = +\infty$).

Путем в X называется вектор-функция $x : I \to K^n$, $\{x_j(t)\}_{j=1}^n$ у которой все координатные отображения $x_j : I \to K$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Производной r-го порядка от пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ называют вектор-столбец $x^{(r)}(t) = \left\{x_j^{(r)}(t)\right\}_{j=1}^n$ где $x_j^{(r)}(t)$ есть r-ая производная координатной функции $x_j(t)$, $j = 1, ..., n$, $r = 1, 2, ...$. Ясно, что $x^{(r)}(t)$ также является путем для всех r.

Для каждого пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ через $M(x(t))$ обозначим $n \times n$-матрицу $(x_j^{(i-1)}(t)\}_{i,j=1}^n$ где i-ый столбец имеет координаты $x_j^{(i-1)}(t)$, $x_j^{(0)}(t) = x_j(t)$, i, $j = 1, ..., n$. Путь $x(t)$ называется регуляным, если определитель $\det M(x(t))$ не равен нулю при всех $t \in I$.

Пусть G - подгруппа группы $GL(n, K)$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются G - эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$ что $y(t) = gx(t)$ для всех

$t \in I$. В этом случае, $y^{(r)}(t) = gx^{(r)}(t)$, $r = 1, 2, ...$ и поэтому верно равенство $M(y(t)) = gM(x(t))$.

Рассмотрим специальная ортогональная группа ([1], гл II, §7), т.е. $G = SO(2l + 1, K) = g \in GL(n, K) : g^T sg = s$, где $n = 2l + 1$,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J \\ 0 & J & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно см. ([1], гл II, §7), что специальная ортогональная группа возникает геометрически как группа линейных преобразование сохраняющих некоторую симметрическую форму, $< x, y >= x^T sy$, т.е. верно ривенство $SO(2l + 1, K) = g \in GL(n, K) :< x, y >=< gx, gy >$ для всех $x, y \in K^n$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для $SO(2l + 1, K)$ - эквивалентности двух путей.

Теорема 1. Два пути $x(t)$, $y(t) \in K^n$ являются $SO(2l + 1, K)$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства

1) $M^{-1}(x(t))M'(x(t)) = M^{-1}(y(t))M'(y(t))$;

2) $M^T(x(t))sM(x(t)) = M^T(y(t))sM(y(t))$;

3) $\det M(x(t)) = \det M(y(t))$,

для всех $t \in I$.

Приведем теперь критерий $SO(2l + 1, K)$ - эквивалентности двух путей на языке билинейных форм.

Теорема 2. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $SO(2l + 1, K)$ - эквивалентными в том и только в том случае, когда $< x^{(m)}(t)x^{(m)}(t) >=< y^{(m)}(t)y^{(m)}(t) >$, $\det M(x(t)) = \det M(y(t))$ для всех $t \in I$, $m = 0, 1, ..., n - 2$.

Литература

1. Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.Наука, 1980.

Алгебраическая И Геометрическая Раскрытости Множества Мнимого Пространства

Нарманов А. Я.[1], **Шарафиддинов Р. С.**[2]

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
narmanov@yandex.com1

Институт Ядерной Физики Академии Наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
rasulkhozha@yahoo.com2

Мы обсудим теорию, в которой проявиться мнимая числовая ось, строго определенная на уровне мнимого пространства, позволяющего сформулировать и доказать теорему на основе ее внутренней раскрытости.

Лемма 1 (Теорема об алгебраической логике внутренней раскрытости). У множества нет алгебраической раскрытости без строго определенной симметрии элементов.

Лемма 2 (Теорема о геометрической логике внутренней раскрытости). У множества нет геометрической раскрытости без определенно симметричной линии элементов.

Определение 1. Непустое пространство называется мнимым тогда и только тогда, когда оно состоит из верхних и нижних точек бесконечно много избранных систем мнимых осей с общим центром симметрии.

Определение 2. Числовая ось называется мнимой, если она имеет верхние и нижние мнимые точки относительно ее центра симметрии.

Теорема 1. Каждой паре верхней и нижней мнимых точек соответствует одна пара объектов такая, что вместе они образуют систему двух множеств из двух элементов мнимо определенной симметрии.

Доказательство Теоремы 1. У мнимой числовой оси

$$..., -(n+1)i, \quad -ni, ..., -3i, \quad -2i, \quad -i, \quad 0, \quad i, \quad 2i, \quad 3i, ..., ni, \quad (n+1)i, ... \tag{1}$$

нет ни единой точки, для которой, согласно Теореме 1, не существовало бы своего рода мнимого объекта. Она характеризует при этом любую верхную точку из

$$i, \quad 2i, \quad 3i, ..., ni, \quad (n+1)i, ... \tag{2}$$

одним своим мнимом объектом из

$$c_{1\Delta}, \quad c_{2\Lambda}, \quad c_{3\Pi}, ..., c_{n\Upsilon}, \quad c_{(n+1)\Phi}, ... \tag{3}$$

Каждый из индексов отличия $P = \Delta, \Lambda, \Pi, ..., \Upsilon, \Phi, ...$ соответствует в мнимом пространстве одной из существующих типов симметрий.

Точно также можно описать любую нижную точку из

$$-i, \quad -2i, \quad -3i, ..., -ni, \quad -(n+1)i, ... \tag{4}$$

ее собственным мнимом бъектом из

$$d_{1\Delta}, \quad d_{2\Lambda}, \quad d_{3\Pi}, ..., d_{n\Upsilon}, \quad d_{(n+1)\Phi}, ... \tag{5}$$

таким, что каждый индекс P ответствен за отличие одной пары мнимых объектов из (3) и (5) среди всех других.

Если теперь группировать (2) и (4), то последовательность

$$i, \quad -i, \quad 2i, \quad -2i, \quad 3i, \quad -3i, ..., ni, \quad -ni, \quad (n+1)i, \quad -(n+1)i, ... \tag{6}$$

требует группировать (3), (5) и образовать такую последовательность как

$$c_{1\Delta}, \quad d_{1\Delta}, \quad c_{2\Lambda}, \quad d_{2\Lambda}, \quad c_{3\Pi}, \quad d_{3\Pi}, ..., c_{n\Upsilon}, \quad d_{n\Upsilon}, \quad c_{(n+1)\Phi}, \quad d_{(n+1)\Phi}, ... \tag{7}$$

Таким образом, каждому из множеств мнимых точек

$$\{i, \quad -i\}, \quad \{2i, \quad -2i\}, \quad \{3i, \quad -3i\}, ..., \{ni, \quad -ni\}, \quad \{(n+1)i, \quad -(n+1)i\}, ..., \tag{8}$$

как утверждено в Теореме 1, соответствует одно из множеств мнимых объектов

$$\{c_{1\Delta}, \quad d_{1\Delta}\}, \quad \{c_{2\Lambda}, \quad d_{2\Lambda}\}, \quad \{c_{3\Pi}, \quad d_{3\Pi}\}, ..., \{c_{n\Upsilon}, \quad d_{n\Upsilon}\}, \quad \{c_{(n+1)\Phi}, \quad d_{(n+1)\Phi}\}, ... \tag{9}$$

Более того, если взаимно однозначное соответствие между рядами (**??**) и

$$\{i, \quad -i\}, \quad \{i, \quad -i\}, \quad \{i, \quad -i\}, ..., \{i, \quad -i\}, \quad \{i, \quad -i\}, ... \tag{10}$$

из фундаментальных математических принципов, то i и $-i$ относятся несомненно только к индивидуальным числам каждой сохраняющейся величины $\mathcal{P} = \Delta, \Lambda, \Pi, ..., \Upsilon, \Phi, ...$ существующих типов симметрий P самого мнимого пространства.

На этой основе (9) и (10) образуют объединенные системы множеств

$$\begin{cases} F = \{c_{1\Delta}, \quad d_{1\Delta}\}, \\ \Delta = \{i, \quad -i\}, \end{cases} \qquad \begin{cases} V = \{c_{n\Upsilon}, \quad d_{n\Upsilon}\}, \\ \Upsilon = \{i, \quad -i\}, \end{cases} \qquad \begin{cases} W = \{c_{(n+1)\Phi}, \quad d_{(n+1)\Phi}\}, \\ \Phi = \{i, \quad -i\}. \end{cases}$$

Второе множество в каждой из этих систем не что иное, как клвсс, элементы которого удовлетворяют бдному из $\sum \Delta = const, ..., \sum \Upsilon = const, \quad \sum \Phi = const, ...$

Мы установили в мнимом пространстве общую систему множеств

$$\begin{cases} I = \{F, \quad O, \quad Q, ..., V, \quad W, ...\}, \\ \mathcal{P} = \{\Delta, \quad \Lambda, \quad \Pi, ..., \Upsilon, \quad \Phi, ...\}, \end{cases} \tag{11}$$

имеющих внутреннюю раскрытость

$$\sum \mathcal{P} = const. \tag{12}$$

Как видно, само единство всех типов законов симметрий мнимого пространства выступает в системе (11) как одна и та же определенная симметрия P с одной и той же сохраняющейся величиной $\mathcal{P}$, подтверждая таким образом справедливость Теоремы 1 и всех из ее выводов. □

Поэтому если окажется, что закон постоянства суммы (12) подтверждает одновременно справедливость Леммы 1, то законность Леммы 2 следует из того факта, что само мнимое пространство характеризует каждую коммутативную пару каждой мнимой числовой оси как образной кривой, так и образной прямой линиями.

Определение 3. Линия называется образной кривой, если она объединяет все точки с образами одного и только одного из объектов каждой коммутативной пары.

Определение 4. Линия называется образной прямой, если она объединяет избранные точки с образами каждого из объектов каждой коммутативной пары.

Galiley Fazosida Parallel Sirtlar Va Ularning Geometriyasi

Sultanov B.M.[1], **Mahmudova N.O.**[2], **Bektemirova X.D.**[3]
Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston;
sultanov.b@urdu.uz
Urganch davlat pedagogika instituti, Urganch, O‘zbekiston;
nazokatmahmudova7@gmail.com
Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston;
xolidabektemirova7@gmail.com

Ushbu tezis uch o‘lchovli Galiley fazosida parallel sirtlarning differensial xossalari va ularning geometrik xarakteristikalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bu ishda parallel sirtlar asosiy sirtga bog‘liq holda o‘rganilgan bo‘lib, dastlab parallel sirt tushunchasi kiritilgan. Shuningdek, parallel sirtlarning asosiy xususiyatlari, jumladan, birinchi va ikkinchi kvadratik formalari haqida teoremalar berilgan. Bundan tashqari, parallel sirtlar orasidagi masofa va ularning o‘zaro joylashuvi tahlil qilingan.

Geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan sirtlar nazariyasi turli sohalarda, jumladan, differensial geometriya, fizika, muhandislik va matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Sirtlarning xossalari va ularning o‘zaro bog‘lanishlarini o‘rganish, ayniqsa, maxsus geometrik fazolarda, masalan, Galiley fazosida, alohida ahamiyatga ega. Galiley fazosi – bu nisbiylik nazariyasi va klassik mexanikada muhim rol o‘ynaydigan geometrik struktura bo‘lib, unda vaqt va makonning o‘ziga xos bog‘lanishlari o‘rganiladi.

Uch o‘lchovli affin fazo A_3, koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo‘lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – bu fazoning bazis vektorlari bo‘lsin. Berilgan $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2,\ agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2,\ agar\ x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1-ta’rif: $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki G_3 bilan belgilanadi [2].

(1) skalyar ko‘paytma maxruj skalyar ko‘paytma deyiladi.

Galiley fazosida sirt

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = u\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + z(u,v)\,\overrightarrow{k} \tag{2}$$

ko’rinishda berilgan bo‘lsin. Endi bu sirtni asosiy sirt sifatida qarab, parallel sirt uchun quyidagi ta’rifni keltiramiz.

Galiley fazosi G_3 da M va M^λ ikkita sirt berilgan bo’lsin.

2-ta’rif: Quyidagi funksiya

$$\begin{aligned} f:\ \ r(u,v) &\to\ r^\lambda(u,v) \\ p\ \ &\to\ f(p) = [p_1;\ \ p_2 + \lambda a_2(p);\ \ p_2 + \lambda a_3(p)\ ] \end{aligned}$$

M va M^λ sirtlar orasidagi parallellashtirish funksiyasi deyiladi.

Bu yerda, $p = (p_1,p_2,p_3)$ va $n = (0,a_2,a_3)$. n ga M asosiy sirtdagi birlik normal, M^λ ga G_3 fazoda M asosiy sirtga parallel sirt deyiladi, λ esa berilgan haqiqiy musbat son.

Ma’lumki, umumiy normalga ega sirtlarga parallel sirtlar deyiladi. Bundan quyidagi ta’rifni berishimiz mumkin.

3-ta'rif: Quyidagi

$$r^{\lambda}(u,v) = r(u,v) + \lambda n \tag{3}$$

funksiyaga λ masofada M sirtga parallel bo'lgan M^{λ} sirt tenglamasi deyiladi.

Yuqorida berilgan ta'riflardan ravshanki, biz M^{λ} parallel sirtni bevosita asosiy sirt M ga bog'liq holda o'rganamiz.

M va M^{λ} Galiley fazosidagi parallel sirtlar bo'lsin.

1-teorema: Parallel sirt uchun birinchi kvadratik forma I^{λ} quyidagicha:

$$ds^2 = I_1^{\lambda} = du^2,$$

agar $I_1^{\lambda} = 0$ bo'lsa, u holda

$$ds^2 = I_2^{\lambda} = \left(\frac{(G - \lambda N)^2}{G} + \left(\Gamma_{22}^2\right)^2 \lambda^2 \right) dv^2 = G^{\lambda} dv^2$$

bo'ladi.

2-teorema: Parallel sirt uchun ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari quyidagicha:

$$\begin{aligned} L^{\lambda} &= \tfrac{L(G-\lambda N)}{G} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \lambda \\ M^{\lambda} &= \tfrac{M(G-\lambda N)}{G} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 \lambda \\ N^{\lambda} &= \tfrac{N(G-\lambda N)}{G} + \left(\Gamma_{22}^2\right)^2 \lambda \end{aligned}$$

bo'ladi.

Bunda, G va L, M, N- mos ravishda asosiy sirtdagi birinchi va ikkinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari, Γ_{11}^2, Γ_{22}^2 - Galiley fazosi uchun Kristoffel simvollari analogi [2] va λ- berilgan haqiqiy musbat son.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Артикбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, 1991.

2. Артикбаев А., Султанов Б., Исмоилов Ш. Геометрия полуевклидова пространства: изотропная и галилеева. Ташкент, 2024.

3. Панкина Н.Е. К теории поверхностей трехмерного галилеева пространства. Геометрия погруженных многообразий. М., 1980. стр. 71-77

4. M.Dede, C.Ekici, A.Ceylan. On the parallel surfaces in Galilean space, Hacettepe Journal of Math and Statistics, 42(6), 605-615, 2013.

5. Mamadaliev B., Sultanov B., Ismoilov S. On geometry on a two-dimensional plane in a five-dimensional pseudo-Euclidean space of index two. E3S Web of Conferences, 2024, 587, 01025. doi.org/10.1051/e3sconf/202458701025

6. Sh. Ismoilov, B. Sultanov, B. Mamadaliyev, A. Kurudirek. Translation surfaces with non-zero constant total curvature in multidimensional isotropic space. Journal of Applied Mathematics and Informatics, (Vol.43), №.1. 2025, pp. 191-203. doi.org/10.14317/jami.2025.191

СЕКЦИЯ 5. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
SECTION 5. FUNCTION THEORY

On The Behavior Of Algebraic Polynomials In Unbounded Regions

Abdullayev F. G.
Mersin University, Mersin, Turkiye;
fabdul@mersin.edu.tr

Let $\mathbb{C}$ be a complex plane and $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; $G \subset \mathbb{C}$ be a bounded Jordan region; $L := \partial G$; $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Let $w = \Phi(z)$ be the univalent conformal mapping of Ω onto $\{w : |w| > 1\}$ normalised by $\Phi(\infty) = \infty$ and $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$. $d(z, L) := \inf \{|\zeta - z| : \ \zeta \in L\}$.

Let $p > 0$ and σ be the two-dimensional Lebesgue measure. For the Jordan region G and some weight unction $h(z)$, we introduce:

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{A_p(h,G)} &:= \left(\iint_G h(z) \, |P_n(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty, \\ \|P_n\|_{A_\infty(1,G)} &:= \max_{z\in\overline{G}} |P_n(z)|, \ p = \infty. \end{aligned}$$

The well-known Bernstein-Walsh lemma [2] states that for $z \in \Omega$ the following holds:

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^n \, \|P_n\|_{C(\overline{G})} . \tag{4}$$

N. Stylianopoulos in [1] replaced the norm $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ with norm $\|P_n\|_{A_2(G)}$ on the right-hand side of (1) and found a new version of the Bernstein-Walsh lemma for the some regions as follows:

$$|P_n(z)| \le c \frac{\sqrt{n}}{d(z, L)} \, \|P_n\|_{A_2(1,G)} \, |\Phi(z)|^{n+1}, \quad z \in \Omega.$$

In this paper we study pointwise estimation in an unbounded domain Ω for $\left|P_n^{(m)}(z)\right|$, $m = 0, 1, 2, ...$, more general regions of the complex plane, in the following form:

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \le \eta_n(G, h, p, m, z) \, \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \ z \in \Omega,$$

where $\eta_n(.) \to \infty$, as $n \to \infty$, depending on the properties of the G, h.

References

1. Stylianopoulos N., Strong asymptotics for Bergman polynomials over domains with corners and applications // Constructive Approximation. 2012. Vol.38, №.1, pp.59–100.

2. Walsh JL. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Providence, RI: AMS 1960.

An Abstract Characterization Of Schatten's Ideal $\mathcal{C}_p$

Alimkulova M. Kh.[1], **Azizov A. N.**[2]
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
manzuraalimqulova9422@gmail.com
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
azizov.07@mail.ru

Now, let $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ be an infinite-dimensional Hilbert space over $\mathbb{C}$, and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^\star$–algebra of all bounded linear operators in $\mathcal{H}$. Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is well known that, for any proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, we have $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$, and if $\mathcal{H}$ is separable, then $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (see, for example, [2]).

Denote $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ be the *canonical trace* on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is,

$$\tau(x) = \sum_{j\in J}(x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

where $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ is an orthonormal basis in $\mathcal{H}$ (see, for example, [3]).

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda\geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of x, that is, $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. If $t > 0$, then the *t-th generalized singular number* of x, or the *non-increasing rearrangement* of x, is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}.$$

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called *symmetric* (*fully symmetric*) if the conditions

$$x \in X, \ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ \mu_t(y) \leq \mu_t(x) \quad \text{for all} \ \ t > 0$$

(respectively,

$$x \in X, \ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ \int_0^s \mu_t(y)dt \leq \int_0^s \mu_t(x)dt \quad \text{for all} \ \ s > 0 \ \ (\text{writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \ \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \ 1 \leq p < \infty,$$

are examples of fully symmetric spaces.

It should be noted that for every symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and all $x \in X$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|x\|_X = \| \, |x| \, \|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \quad \text{and} \quad \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Let $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a symmetric space. Fix an orthonormal basis $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ in $\mathcal{H}$ and choose a countable subset $\{\varphi_{j_n}\}_{n=1}^\infty$. Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C}\cdot\varphi_{j_n} \subset \mathcal{H}$. It is clear that the set

$$E(X) = \left\{\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 : \ x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X\right\}$$

(the series converges uniformly), is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric subspace $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ uniquely generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ uniquely generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [1]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

In addition,

$$E(\mathcal{C}_E) = E, \ \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E, \ \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \ \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}.$$

We will call the pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ a *Banach ideal of compact operators*. It is known that $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}})$ for all $1 \le p < \infty$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is *fully symmetric* if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

Examples of fully symmetric ideals include $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the Schatten's Banach ideals $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p)$ for all $1 \le p < \infty$. It is clear that $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ for every symmetric sequence space $E \subset c_0$ with $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \le \|x\|_1$ and $\|y\|_\infty \le \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ for all $x \in \mathcal{C}_1$ and $y \in \mathcal{C}_E$.

Now we give an abstract characterization of ideal $\mathcal{C}_p$.

Theorem. Let E a Banach ideal of compact operators with following property

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

for all $x, y \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$, $x \cdot y = 0$. Then $E = \mathcal{C}_p$.

References

1. Lord S., Sukochev F., Zanin D., Singular Traces, Walter de Gruyter GmbH, 2013.

2. Simon B. Trace Ideals and Their Applications, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 2005.

3. Stratila S., Zsido L. Lectures on von Neumann algebras, Editura Academiei, Bucharest, 1979.

On The Conservation Of Classical Hardy Inequality's Constant

Kuliev K.D.[1], Eshimova M.K.[2]

Samarkand state university named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan;
kulievkomil@gmail.com
eshimova_math@mail.ru

The classical Hardy inequality reads

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 f^p(x)dx, \tag{1}$$

where $p > 1$ and $f \ge 0$ is arbitrary, the constant $C = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ is the best possible. The first modification of (1)

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha dx \le \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,x^\alpha dx \tag{2}$$

was also proved by G.H.Hardy [1] with the sharp constant $C = \left(\frac{p}{p-1-\alpha}\right)^p,\ p > 1,\ \ \alpha < p-1$.

For different parameters p and q G.A.Bliss [2] extended (1) as

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^q x^r dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \ r = \frac{q-p}{p}$$

with the best constant

$$C = \left(\frac{1}{q-r-1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{r\Gamma\left(\frac{q}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{q-1}{r}\right)}\right)^{\frac{r}{q}}$$

for the case $1 < p < q < \infty$.

In this work we concentrated to generalize inequalities (1) and (2) with the same constants as previous.

We consider the Hardy inequality as

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p u(x)dx \le C\int_0^1 f^p(x)dx. \tag{3}$$

The problem is to show the satisfaction of the inequality and finding the best constant of the inequality for the one class of weight functions u.

Our result reads

Theorem 1. Let $p > 1,\ v(x) -$ continuous nonnegative function on $[0,1)$ with $v(0) = 0$ and

$$u(x) = \frac{1}{x^p(1+v(x))}.$$

Then inequality (3) holds for all measurable functions $f \ge 0$. Moreover, the best possible constant in (3) is

$$C = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

Corollary 1. Let $u(x) = \frac{1}{P_n^p(x)},$ where $P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k,\ a_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n.$ Then the following inequality holds

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{P_n(x)}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \le \left(\frac{p'}{a_1}\right)^p \int_0^1 f^p(x)dx$$

for all $f \ge 0$ and $p > 1$. Moreover, $\left(\frac{p'}{a_1}\right)^p$is the best constant of the inequality.

Let's consider the inequality

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p u(x)x^\varepsilon dx \le C\int_0^1 f^p(x)x^\varepsilon dx. \tag{4}$$

Corollary 2. Let $p > 1,\ \varepsilon < p-1,\ v(x) -$ continuously increasing function on $(0,1)$ with $v(0) = 0$ and

$$u(x) = \frac{1}{x^p(1+v(x))}.$$

Then Hardy inequality (4) holds for all measurable functions $f \ge 0$. Moreover, the best possible constant in (4) is $C = \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p$.

References

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., Inequalities. London: Cambridge University Press, 1934.

2. Bliss G.A., An integral inequality // J. London Math. Soc. 1930, 5, P. 40-46.

3. Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E., The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen: 2007.

4. Kuliev K., Eshimova M., Turaqulov T., A new method for norm of a Hardy-Volterra operator // Scientific journal of SamSU. 2023, 3/2(139), P. 44-50.

On Quadratic b-Bistochastic Operators

Eshmetova S. D.[1], Xolturaev I. M.[2]

Namangan Engineering and Technology Institute, Namangan, Uzbekistan;
sabohateshmetova898@gmail.com
University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
ilhomxolturayev4@gmail.com

This research significantly builds upon and extends the foundational work established in references [1] and [2]. In [1], the authors introduced the concept of b-order on finite-dimensional simplices and defined a new class of quadratic stochastic operators. We expand the notion of b-order to infinite-dimensional simplices and provide criteria for b-bistochasticity of quadratic stochastic operators.

In what follows, as usual, ℓ^1 denotes the space of all absolutely summable sequences with the norm $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$. We denote the subset of ℓ^1 consisting of sequences with non-negative terms as ℓ^1_+. Then we set

$$S = \{\mathbf{x} \in \ell^1_+ : \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}.$$

Let V be a quadratic stochastic operator on S, i.e.

$$(V(\mathbf{x}))_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} P_{ij,k} x_i x_j, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

where

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^{\infty} P_{ij,l} = 1, \quad \forall (i,j,k) \in \mathbb{N}^3.$$

Let us recall the b-order on the set S. An element $\mathbf{x} \in S$ is said to be b-ordered by an element $\mathbf{y} \in S$ if

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

and denoted as $\mathbf{x} \preceq^b \mathbf{y}$. One can see that b-order is a partial order.

A quadratic stochastic operator V on S is called to be b-bistochastic if

$$V(\mathbf{x}) \preceq^b \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Theorem 1. Let V be a quadratic stochastic operator on S. Then V is b-bistochastic iff the following statements hold:

1) $P_{ij,k} = 0$ for every triple $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ with $\min\{i, j\} > k$;

2) $\sum_{l=i}^{k} P_{ij,l} \leq \frac{1}{2}$ for every triple $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ with $j > i$.

References

1. Mukhamedov F.M., Embong A. On b-bistochastic quadratic stochastic operators. // Journal of Inequalities and Applications (2015) 2015:226.

2. Mukhamedov F.M., Embong A. b-bistochastic quadratic stochastic operators and their properties. // Journal of Physics: Conference series, **697** 012010 (2016).

Riesz's Theorem For $A(z)$-Analytic Functions

Husenov B. E.[1], **Oripova S. Q.**[2]

Bukhara State university, Bukhara, Uzbekistan;
b.e.husenov@buxdu.uz
Bukhara State university, Bukhara, Uzbekistan;
oripovasadafbonu@mail.ru

Let $A(z)$ be an antianalytic function in the convex domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \leq c$ for all $z \in D$, where $c < 1$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$–*analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D.

According to, the function

$$\psi(a, z) = z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau}$$

is an $A(z)$–analytic function.

The following set is an open subset of arbitrary convex domain D :

$$L(a, r) = \{|\psi(a, z)| < r\}.$$

For sufficiently small $r > 0$, this set compactly lies in D (we denote this fact by $L(a, r) \subset\subset D$) and contains the point a. This set $L(a, r)$ is called the $A(z)$–lemniscate centered at the point a. The lemniscate $L(a, r)$ is a simply - connected set (see [2]).

At first, we introduce the Hardy class for $A(z)$-analytic functions:

Definition 1 (see [3]). *The Hardy class $H^p, p > 0$, for $A(z)$-analytic functions is the set of all functions $f(z)$ such that its averages*

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left|dz + A(z)d\bar{z}\right| \tag{2}$$

are uniformly bounded for $\rho < r$, *i.e.* $\sup\limits_{\rho<r}\left\{\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}|f(z)|^p\big|dz+A(z)d\bar{z}\big|\right\}<\infty$.

The Hardy class for $A(z)$-analytic functions in the domain $L(a,r)$ is denoted as $H_A^p(L(a,r))$.

Now, we define the concepts of angular and radial limits of $A(z)$–analytic functions in lemniscate $L(a,r)\subset\subset D$. The radial limits of the function $f(z)$ at some point $\zeta\in\partial L(a,r)$ is denoted as $f^*(\zeta)$, and the angular limits is denoted as $f^*_\sphericalangle(\zeta)$.

In the classical case of the disk $U=\{|w|<1\}\subset\mathbb{C}_w$, the limit by the radius $\tau_\zeta=\{w=t\zeta\}, 0\le t\le 1, \zeta\in\partial U$ of the function $\varphi(w)$,

$$\varphi^*(\zeta)=\lim_{w\to\zeta, w\in\tau_\zeta}\varphi(w)$$

is called the *radial limit*, and the limit by the angle $\sphericalangle\subset U$, leaving the point $\zeta\in\sphericalangle$, is called the *angular limit*,

$$\varphi^*_\sphericalangle(\zeta)=\lim_{w\to\zeta, w\in\sphericalangle_\zeta}\varphi(w).$$

Since lemniscate $L(a,r)$ is a simply connected domain with a real analytic boundary, then according to Riemann's theorem there exists a conformal map $\chi(z): U\to L(a,r)$, which is also conformal in some neighborhood of closure $\bar{U}$. Let χ maps the boundary point $\lambda\in\partial U$ to the boundary point $\zeta\in\partial L(a,r)$. Then the curve γ_ζ has the property that it connects points a,ζ and is perpendicular to all lines of level $\partial L(a,\rho)=\{|\psi(a,z)|=\rho\}, 0<\rho\le r$. In the theory of $A(z)$–analytic functions, the curve $\gamma_\zeta=\chi(\tau_\lambda)$ plays the role of the radial direction, and the image of the angle $\chi(\sphericalangle)$ plays the role of the angular set at the point $\zeta\in\partial L(a,r)$. We will denote this angle by $\sphericalangle=\sphericalangle_\zeta$. The limit $f^*(\zeta)=\lim\limits_{z\to\zeta, z\in\gamma_\zeta}f(z)$ is called the radial limit, and $f^*_\sphericalangle(\zeta)=\lim\limits_{z\to\zeta, z\in\sphericalangle_\zeta}f(z)$ is the angular limit of the function $f(z)$ at the point $\zeta\in\partial L(a,r)$ (see [3]).

Next we will consider the Fatou's theorem for this class:

Theorem 1 (see [3], the Fatou's theorem for the class of functions H_A^1). *If* $f(z)\in H_A^1(L(a,r))$, *then the angular limit*

$$f^*_\sphericalangle(\zeta)=\lim_{z\to\zeta, z\in\sphericalangle_\zeta}f(z)$$

exists and is finite for almost all $\zeta\in\partial L(a,r)$, *except, perhaps, the points of some set* E *of measure zero.*

The following statements follow from Theorem 4:

Theorem 2 (see [3]). *If* $f(z)\in H_A^1(L(a,r))$, *then* $f^*_\sphericalangle(\zeta)\in L_A^1(\partial L(a,r))$. *As* $\rho\to r$

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}f(z)\big|dz+A(z)d\bar{z}\big|\longrightarrow\int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r}f^*_\sphericalangle(\zeta)\big|d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}\big| \tag{3}$$

and

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}|f(z)-f^*_\sphericalangle(\zeta)|\big|dz+A(z)d\bar{z}\big|\longrightarrow 0. \tag{4}$$

Theorem 3 (Riesz's theorem for $A(z)$-analytic functions). *If $f(z) \in H^p(L(a,r))$, then*

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z) - f^*_{\sphericalangle}(\zeta)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \longrightarrow 0$$

at $\rho \to r$, where $f^*_{\sphericalangle}(\zeta)$ - there is almost everywhere an angular value of the function $f(z)$.

Литература

1. Koosis P. Introduction to H^p Spaces. Moscow.: Mir, 1984 (in Russian).

2. Sadullaev A., Zhabborov N. M. On a class of A-analytic functions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics-Physics. 2016, V.9, №.3, p.374–383.

3. Zhabborov N. M., Khursanov Sh. Y., Husenov B. E. Existence of boundary values of Hardy class functions H^1_A. Bulleten of NUUz. 2022, V.5., №.2, p. 374–383.

On The Sharp Estimates For Convolution Operators Related To Some Non-Convex Hypersurfaces

Ikromov I. A.[1], **Sugimoto M.** [2]

[1] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Samarkand, Uzbekistan;
ikromov1@rambler.ru

[2]Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, Japan;
sugimoto@math.nagoya-u.ac.jp

0.1 Introduction

It is well known that solution operator of the Cauchy problem for homogeneous constant coefficient strictly hyperbolic equation, up to a regularizing operator and after scaling of time variable can be written as a sum of convolution operators of the type (see [6], [7]):

$$M_k = F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)}a_k]F, \tag{1}$$

where F is the Fourier transform operator, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu \backslash \{0\})$ is homogeneous of order one function, $a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^\nu_\xi)$ is a homogeneous function of order $-k$ for large ξ.

We demonstrate motivation of the main problem in a simple example. Consider the example of strictly hyperbolic equation of order 4 in the space $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, for which the corresponding surface Σ can be written as the graph of a function having A_∞ type singularities (see [2] for definition of A type singularities):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 2\frac{\partial^2(\Delta + \partial_3^2)u}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\Delta^2 u + \partial_3^4 u\right) = 0, \tag{2}$$

where Δ is the standard Laplace operator in $\mathbb{R}^2$. It is the axisymmetric partial differential equation.

Consider one of the roots of the characteristic equation

$$p(\tau,\xi) := \tau^4 - 2\tau^2|\xi|^2 + \frac{1}{2}\left((\xi_1^2+\xi_2^2)^2 + \xi_3^4\right) = 0$$

given by

$$\varphi(\xi) := \sqrt{|\xi|^2 - \sqrt{|\xi|^4 - \frac{1}{2}((\xi_1^2+\xi_2^2)^2+\xi_3^4)}}.$$

Then the corresponding hypersurface Σ, which is defined as:

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \varphi(\xi) = 1\},$$

can be obtained from the following plane curve:

$$C = \{(\xi_1,\xi_3) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1^2+\xi_3^2 > 1, (\xi_1-2)^2+(\xi_3-2)^2 = 4\}$$

by rotating around the $O\xi_3$-axis. It is easy to see that at least one of the principal curvatures of the surface Σ does not vanish at any point. Moreover, exactly one of the principal curvatures does not vanish at the points of the curve γ:

$$\gamma := \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi = (\sqrt{2}\cos\varsigma, \sqrt{2}\sin\varsigma, \sqrt{2+\sqrt{6}})\right\} \subset \Sigma, \tag{3}$$

with $0 \le \varsigma \le 2\pi$, and the directions of the normals to the surface Σ at these points coincide with the direction of the $O\xi_3$ axis. Thus, the corresponding phase function ϕ defined in a sufficiently small neighborhood of the curve γ has A_∞ type singularities at those points.

More precisely, Σ can be written as the graph of the function

$$x_3 = \phi(x_1,x_2) = b(x_1,x_2)(x_2 - x_1^2\omega(x_1))^2 + \sqrt{2+\sqrt{6}}$$

with smooth functions b,ω satisfying $b(0,0) \neq 0$, $\omega(0) \neq 0$ at the points (3).

Actually, one can consider the analogical axisymmetric equation in the space $\mathbb{R}^n (n \ge 4)$. Then more complicated non-isolated singular points appear. In this case we can not get analogical estimates for the corresponding convolution operators. Moreover, one can construct examples of hypersurfaces in three dimensional space, for which both principal curvatures vanish at some point and our methods can not be applied.

Let $1 \le p \le 2$ be a fixed number: We consider the problem: *find the minimal number* $k(p)$ *such that the operator* $M_k : L^p(\mathbb{R}^\nu) \to L^{p'}(\mathbb{R}^\nu)$ *is bounded for any* $k > k(p)$.

Analogical problems have been considered by many authors including Strichartz, in the case when the characteristic hypersurface is the unit sphere, by Brenner [3], in the case when the characteristic hypersurface has non-vanishing Gaussian curvature. These results were extended by the second author (see [6], [7]), in the case when the characteristic hypersurface is convex (but, not necessarily strictly convex) and also for some non-convex hypersurfaces (see also [5] and [7]).

Nevertheless, the problem remains in general wide open. Also, the issue is related to many other open problems of harmonic analysis related to oscillatory integrals.

0.2 The main results

Note that a smooth hypersurface S after possible linear change of variables in a neighborhood of the point $(0,0,0)$ can be written as the graph of a smooth function, so

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \phi(x_1, x_2) \text{ with } (x_1, x_2) \in V\},$$

where V is a neighborhood of the origin and $\phi \in C^\infty(V)$ is a smooth function satisfying the conditions $\phi(0,0) = 0$, $\nabla\phi(0,0) = (0,0)$. Then for the Gaussian curvature K we have

$$K(x_1, x_2) = \frac{\partial_1^2\phi(x_1,x_2)\partial_2^2\phi(x_1,x_2) - (\partial_1\partial_2\phi(x_1,x_2))^2}{(1 + (\partial_1\phi(x_1,x_2))^2 + (\partial_2\phi(x_1,x_2))^2)^2}.$$

Thus, the condition can be written as $K(0,0) = 0$ and $\nabla K(0,0) := (\partial_1 K(0,0), \partial_2 K(0,0)) \neq (0,0)$.

Note that any smooth hypersurface $S \subset \mathbb{R}^3$ containing the origin and satisfying the condition $K(0,0) = 0$ and $\nabla K(0,0) \neq 0$, (where K is the Gauss curvature) has exactly one non-vanishing principal curvature at the origin (see [1]). Moreover the surface S having at least one non-vanishing principal curvature at the origin after possible linear transformation in a sufficiently small neighborhood of the origin can be written as the graph of a function of the form:

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - \psi(x_1))^2 + b_0(x_1), \tag{4}$$

where b, ω, b_0 are smooth functions such that $b(0,0) \neq 0$, and also ψ (respectively b_0) can be written as $\psi(x_1) = x_1^m\omega(x_1)$ with $m \geq 2$ and smooth function ω satisfying $\omega(0) \neq 0$ (respectively $b_0(x_1) = x_1^n\beta(x_1)$ with $n \geq 2$ with smooth function β satisfying the condition $\beta(0) \neq 0$ unless ψ (respectively b_0) is a flat function (see [4]).

The conditions $K(0,0) = 0$ and $\nabla K(0,0) \neq 0$ imply that either $n = 3$ and $\beta(0) \neq 0$, or $m = 2$ and $\omega(0) \neq 0$ (see [1]).

So, the hypersurface Σ, after possible linear transformation, is given in the neighborhood of the point $v = (0,0,1)$ as the graph of the function $1 + \phi(x_1, x_2)$:

$$\Sigma \cap \Gamma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 + \phi(x_1, x_2)\}, \tag{5}$$

with $\phi(0) = 0$ and $\nabla\phi(0) = 0$.

The main result of the paper is the following

Theorem. Suppose Σ is a hypersurface defined by equation (5), with the function ϕ given by equation (4), where $b(0,0) \neq 0$ and $m = 2$ with $\omega(0) \neq 0$ and $b_0 \equiv 0$. Then the following relation

$$k_p(v) = \max\left\{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), 6\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right\} \tag{6}$$

holds true.

References

1. Akramova D. I. and Ikromov I. A., Randol Maximal Functions and the Integrability of the Fourier Transform of Measures, Mathematical Notes, 2021, Vol. 109, №. 5, pp. 661-678.

2. Arnol'd V. I., Gusein-zade S. M., and Varchenko A. N., "Singularities of differentiable mappings,"in Classification of Critical Points of Caustics and Wavefronts 1985, Vol. 1, 1985, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgard.

3. Brenner P. , On $L^p - L^{p'}$ estimates for the wave-equation, Math. Z. 145 (1975), 251-254.

4. Ikromov, I. A., Müller, D., Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra; *Annals of Mathematics Studies 194*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2016; 260 pp.

5. Ikromov A. I. and Ikromova D. I., On the Sharp Estimates for Convolution Operators with Oscillatory Kernel, ournal of Fourier Analysis and Applications (2024) 30:29, pp. 28-51. https://doi.org/10.1007/s00041-024-10085-z

6. Sugimoto M., L^p-boundedness of Pseudo-differential operators satisfying Besov estimates I, J. Math. Soc. Japan Vol. 40, №. 1, 1988

7. Sugimoto M., Estimates for Hyperbolic Equations of Space Dimension 3, Iournal of Functional Analysi, 160, 382-407 (1998).

Continuation Of m - Analitic Functions Of Several Complex Varables

Ishankulov T.[1], Mannonov M.[2]

[1] Samarkand state university after named Sharof Rashidov , Samarkand, Uzbekistan; tolibi@mail.ru

[2] Denov Institute of Entrepreneurship and Pedagogy, Denov, Uzbekistan; maxmudmannonov3@gmail.com

Let D be a polycylinder in a complex n-dimensional space $\mathbb{C}^n$ of variable $z = (z_1, ..., z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$. That is $D = D_1 \times ... \times D_n$, where D_k is a planar simply connected domain with a piecewise smooth boundary ∂D_k; E_k is a set of positive measure on ∂D_k. We denote the distinguished boundary of D by $\Gamma = \partial D_1 \times ... \times \partial D_n$. It's clear that $E \subset \Gamma$. A multi-index with nonnegative integer components α_k will be denoted by $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ - height of α.

Following P.Burgatti [1], we present the definition of m-analytic function of several variables.

Definition. *A function of several complex variables $W(z) = W(z_1, ..., z_n) \in C^m(D)$ is called m-analytic in the domain D, if it satisfies the following C^m_{m+n-1} number of m -th order partial differential equations*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} W(z)}{\partial \overline{z}^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|} W(z)}{\partial \overline{z}_1^{\alpha_1} ... \partial \overline{z}_n^{\alpha_n}} = 0, \quad |\alpha| = m, z \in D. \tag{1}$$

The class of m - analytic functions in polycylinder D is denoted by $P_m(D)$. The continuation problem can be formulated as follows: it is required to define a function $W \in P_m(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$ in polycylinder D from its values and the values of derivatives up to the $(m-1)$-th order inclusively on the set E:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} W(z)}{\partial \overline{z}^{\alpha}} = f_{\alpha}(z), \quad z \in E, \quad |\alpha| \leq m - 1, \tag{2}$$

where f_α are given functions on the set E.

The solution to problem (1), (2) is unique but unstable to small changes in data.

We present en estimate of the conditional stability of the problem (1), (2). Denote by M the set of functions $W \in P_m(D) \cup C^{m-1}(\overline{D})$ satisfying to the inequalities

$$|\frac{\partial^{|\alpha|}W(z)}{\partial \overline{z}^\alpha}| \leq C, \quad |\alpha| \leq m-1, z \in D,$$

where C is a constant number independent of the function $W(z)$.

Theorem 1. *For the function $W \in M$, satisfying to the conditions*

$$|\frac{\partial^{|\alpha|}W(z)}{\partial \overline{z}^\alpha}| \leq \varepsilon, \quad |\alpha| \leq m-1, z \in E,$$

the inequality holds

$$|W(z)| \leq [\sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \sum_{|l|=|\alpha|}^{m-1} \frac{d^l}{\alpha!(l-\alpha)!}]\varepsilon^{\omega_1(z_1)...\omega_n(z_n)} C^{1-\omega_1(z_1)...\omega_n(z_n)},$$

where $d=(d_1,...,d_n)$, $l=(l_1,...,l_n)$, $d^l = d_1^{l_1}...d_n^{l_n}$, $d_k = \max\limits_{\overline{D}_k} |z_k|, \omega_k(z_k)$ is harmonic measure of E_k with respect to domain D_k.

In the theory of functions of complex variables, the Cauchy integral formula plays a fundamental role. We present an analog Cauchy integral formula for the m -analytic functions of several complex variables in polycylinder.

Theorem 2. *For a function $W \in P_m(D) \cup C^{m-1}(\overline{D})$ holds the formula*

$$W(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \frac{(\overline{z}-\overline{t})^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}W(t)}{\partial \overline{t}^\alpha} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in D.$$

The Cauchy integral formula for polyanalytic function of one complex variable was fist obtained by N. Teodoresko [1].

For analytic function of one variable the solution to the boundary value continuation problem is given by Carleman's formula ([2 ,pp.61-62]). An analog of the Carleman's formula for analytic functions in polysilinder was obtained in [3]. For m- analytic functions of one variable the Carleman's formula was obtained in [4], for bianalytic functions in a polycylinder in [5].

We give the Carleman's formula for m- analytic functions of several variables in a polycylinder. By $\widetilde{\omega}_k(z_k)$ we denote the harmonic function in domain D_k, which is conjugate to the harmonic measure $\omega_k(z_k)$, $q(z) = (1, q_2, ..., q_n)$ is a vector- function with positive components. Moreover, $q_k \quad (k = 2, ..., n)$, depends only of $z_1, ..., z_k$. Let

$$G_\sigma^k(\zeta_k, z_k) = \frac{1}{\zeta_k - z_k} exp\{\sigma[\omega_k(\zeta_k) - \omega_k(z_k) + i(\widetilde{\omega}_k(\zeta_k) - \widetilde{\omega}_k(z_k))]\}$$

be one-dimensional Carleman's function of the set E_k with respect to the domain D_k, and let σ be a positive real parameter.

Theorem 3. *Let the vector - function $q(z)$ satisfies the inequalitis*

$$\sum_{j=0}^{k} q_j(1-\omega_j(z_j)) - q_{k+1}\omega_{k+1}(z_{k+1}) < 0, \quad q_0 = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Then for the function $W \in P_m(D) \cup C^{m-1}(\overline{D})$ satisfying conditions (2) the following formula holds:

$$W(z) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_E \prod_{k=1}^{n} G^k_{\sigma q_k}(\zeta_k, z_k) \sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \frac{(\overline{z}-\overline{\zeta})^\alpha}{\alpha!} f_\alpha(\zeta) d\zeta, \quad z \in D.$$

References

1. Balk M.B. Polianalytic function and their generalizations, //Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. problem math. Fundam. Naprav. Vol. 85, 187-246 (1991) [in Russian].

2. Lavrentyev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Moscow.: Nauka, 1980 [in Russion].

3. Ishankulov T.On two problems of analytic continuation for functions of several variables. //Sib. math. journal. 1984. V.23, 3. P. 89-94. [in Russian].

4. Ishankulov T., Fozilov D.Sh. Continuation of polyanalytic functions //Russian Mathematics. 2021. 8. P. 37-45.

5. Ishankulov T., Mannonov M. Continuation of bianalytic functions of several complex variables //AIP Conf. Proc. 3244,020067(2024)http: //doi.org/10.1063/5.0242315.

The Ground States For The Mixed Type Spin-1 And Spin-2 Ising Model On The Binary Tree

Egamov D.O.[1], Karshiboev O.Sh.[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, Uzbekistan.
dilshodbekegamov87@gmail.com
Namangan State University, 161, Bobursho x str, 160107, Namangan, Uzbekistan
okarshiboevsher@mail.ru

In the work, we consider the mixed type spin-1 and spin-2 Ising model on the Cayley tree of order two. Let $\Gamma^2 = (V, L)$ be the Cayley tree of order two, here V is the set of vertices and L is the set of edges. The vertices x and y are called *nearest neighbors* and they are denoted by $l = \langle x, y\rangle$ is there exists an edge connecting them. A collection of the pairs $\langle x, x_1\rangle, ..., \langle x_{d-1}, y\rangle$ is called a *path* from the point x to the point y. The distance $d(x, y), x, y \in V$ on the Cayley tree, is the number of edges in the shortest path from x to y. Let x^0 be a any vertex and we call it the root of tree. Denote

$$W_n = \{x \in V \quad | \quad d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \le n\},$$

$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \quad | \quad x, y \in V_n\},$$

$$\Gamma^2_+ = \{x \in V : d(x^0, x) - \text{even}\}, \quad \Gamma^2_- = \{x \in V : d(x^0, x) - \text{odd}\}.$$

To define the model properly, let us consider spin state spaces as follows: $\Phi = \{-1; 0; 1\}$ and $\Psi = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. The corresponding configuration spaces are defined by $\Omega_+ = \Phi^{\Gamma^2_+}$ and $\Omega_- = \Psi^{\Gamma^2_-}$.

For the configuration $\xi \in \Xi = \Omega_+ \times \Omega_-$, the associated sites belong to successive generations of the tree. At odd-numbered levels of the tree, spins with Ψ elements are placed in the vertices at even-numbered levels, i.e.

$$\xi(x) = \begin{cases} \sigma(x) \text{ if } x \in \Gamma^2_+ \\ s(x) \text{ if } x \in \Gamma^2_-, \end{cases}$$

where $\sigma \in \Phi = \{-1; 0; 1\}$ and $s \in \Psi = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Let $S_1(x) = \{y \in G_2 : \langle x, y\rangle\}$, $x \in G_2$. Consider the quotient group $G_2/G_2^* = \{H_1, ..., H_r\}$, where G_2^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$.

Definition 1. A configuration $\xi(x)$ is called to be $G_2^* - periodic$ if $\xi(x) = \xi_i$ for all $x \in G_2$ with $x \in H_i$. A G_2-periodic configuration is called to be *translation-invariant.*

The (formal) Hamiltonian of the mixed type spin-1 va spin-2 Ising model is defined by

$$H(\xi) = -J \sum_{\langle x,y\rangle} \xi(x)\xi(y),$$

where $J \in \mathbb{R}$ are coupling constants and $\xi \in \Xi$.

For a pair of configurations ξ and φ that coincide almost everywhere, i.e., everywhere except for a finite number of positions, we consider a relative Hamiltonian $H(\xi, \varphi)$, the difference between the energies of the configurations ξ and φ has the form

$$H(\xi, \varphi) = -J \sum_{\langle x,y\rangle} (\xi(x)\xi(y) - \varphi(x)\varphi(y)). \tag{1}$$

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We call the restriction of a configuration ξ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* ξ_b.

Define the energy of a ball b for configuration ξ by

$$U(\xi_b) \equiv U(\xi_b, J) = -\frac{1}{2} J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle \in L: \\ x,y \in b}} \xi(x)\xi(y). \tag{2}$$

Let $G_2^{(2)} = \{x \in G_2 :| x | -\text{even}\}$, $G_2 \setminus G_2^{(2)} = \{x \in G_2 :| x | -\text{odd}\}$.

In the considered setting, one easily finds that $U(\xi_b) \in \{U_1, ..., U_{13}\}$ for every ξ_b, where

$$U_1 = 3J,\ U_2 = \frac{5}{2}J,\ U_3 = 2J,\ U_4 = \frac{3}{2}J,\ U_5 = J,\ U_6 = \frac{1}{2}J,\ U_7 = 0,\ U_8 = -\frac{1}{2}J,\ U_9 = -J,$$

$$U_{10} = -\frac{3}{2}J,\ U_{11} = -2J,\ U_{12} = -\frac{5}{2}J,\ U_{13} = -3J.$$

Definition 2. A configuration φ is called a *ground state* of the relative Hamiltonian H if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_1, ..., U_{13}\} \text{ for any } b \in M.$$

For any $i = 1, ..., 13$ we put

$$A_i = \{J \in \mathbb{R} : U_i = \min\{U_1, ..., U_{13}\}\}. \tag{3}$$

It is easy to see

$$A_1 = \{J : J \leq 0\}, A_{13} = \{J : J \geq 0\}, A_2 = A_3 = A_4 = ... = A_{12} = 0.$$

Let us consider the quotient group $G_2/G_2^* = \{H_1, \ldots, H_r\}$, where G_2^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$.

A configuration $\xi(x)$ is said to be $G_k^{(2)}$-*periodic* if

$$\xi(x) = \begin{cases} \sigma(x) \text{ if } x \in \Gamma_+^2 \\ s(x) \text{ if } x \in \Gamma_-^2 \end{cases}$$

$\forall x \in G_2, x \in H_i \; i = \overline{1, r}$.

Theorem 1. Let $k = 2$.

1. If $J \in A_1$, then for the mixed spin-1 and spin-2 Ising model the configurations $\xi_1(x) = (-1; -2)$, $\xi_2(x) = (1; 2)$ are $G_2^{(2)}$-periodic ground states.
2. If $J \in A_{13}$, then for the mixed spins Ising model the configurations $\xi_3(x) = (-1; 2)$, $\xi_4(x) = (1; -2)$ are $G_2^{(2)}$-periodic ground states.

Literature

1. Rozikov U.A., Gibbs measures on Cayley trees. Singapore.: World Sci. Publ., 2013.

2. F. M. Mukhamedov, M. M. Rahmatullaev and D. O. Egamov: Periodic ground states for the mixed spin Ising model with competing interactions on a Cayley tree, *Reports on mathematical physics*, **91** (3) (2023).

On Weakly Periodic Gibbs Measures For The HC Model With A Countable Set Of Spin Values

Khakimov R.M.[1], **Bozorqulov A.A.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,Tashkent, Uzbekistan.; rustam-7102@rambler.ru 1

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; adhamjonbozorqulov@gmail.com 2

Let $\Im^k = (V, L)$ is Cayley tree of order $k \geq 1$. Let $= \{..., -1, 0, 1, ...\}$ and $\sigma \in \Omega$ be a configuration. We consider the set $\mathbb{Z}$ as the set of vertices of a graph G. A configuration σ is called a *G-admissible configuration* on the Cayley tree (in a subset $A \subset V$), if $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ edge of the graph G for any $\langle x, y\rangle$ in V (in A). Denote by Ω^G (resp. Ω_A^G) the set of G-admissible configurations σ (resp. σ_A).

The activity set [1] for the graph G is the bounded function $\lambda : G \to \mathbb{R}_+$. The value λ_i of the function λ at vertex $i \in \mathbb{Z}$ is called its "activity".

For given G and λ we define the Hamiltonian of the $G-$HC model as

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{if} \quad \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{if} \quad \sigma \notin \Omega^G. \end{cases} \tag{1}$$

The reader can find the definition of the Gibbs measure and of other subjects related to Gibbs measure theory, for example, in [2],[3].

Let $\mathbf{B}$ be the σ-algebra generated by cylindrical subsets of Ω^G. The concept of Gibbs measure for the HC model is defined in a standard way (see Chapter 12 [4], [5], [6]).

Denote $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. It is known that (see [7] or [2, Chapter 12]) each Gibbs measure on $(\Omega^G, \mathbf{B})$ corresponds to a collection of vectors $z_x = \{z_{i,x}, i \in \mathbb{Z}_0\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}_0}$ such that $\forall x \in V$ the following equalities hold,

$$z'_{i,x} = \lambda'_i \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{im} z'_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{0m} z'_{m,y}}, \quad i, m \in \mathbb{Z}_0, \tag{2}$$

where $z'_{i,x} = \lambda'_i \frac{z_{i,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$. Thus, in order to obtain a complete description of all Gibbs measures for a given Hamiltonian (1), it is necessary to find all solutions to the system of equations (2). We consider a specific graph G with $a_{i0} = 1$ for all $i \in \mathbb{Z}$ and $a_{im} = 0$ for all $i, m \in \mathbb{Z}_0$.

In [8], a normal subgroup of index four was studied, and the following invariant sets were considered with respect to the operator $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,:

$$I_1 = \left\{(Q,B,V,T) \in \mathbb{R}^4 : \ Q = B = V = T\right\}, \quad I_2 = \left\{(Q,B,V,T) \in \mathbb{R}^4 : Q = V, \ B = T\right\},$$

$$I_3 = \left\{(Q,B,V,T) \in \mathbb{R}^4 : Q = B, \ V = T\right\}, \quad I_4 = \left\{(Q,B,V,T) \in \mathbb{R}^4 : Q = T, \ B = V\right\}.$$

Let $k \geq 2$ and the series $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \lambda_j$ converges. Then for a HC model with a countable number of states, in the case of a normal index divisor of four, the following statements are true:

- For $k \geq 1, i \leq k$ on the invariant sets I_1 and I_3, the number of weakly periodic Gibbs measure is one. Moreover, this measure coincides with the unique translation-invariant Gibbs measure.
- Let $k = 2, i = 1, \lambda_{cr} = 4$. Then on I_2 for $\lambda \leq \lambda_{cr}$ there is exactly one weakly periodic Gibbs measure, which is translation-invariant and for $\lambda > \lambda_{cr}$, there are exactly three weakly periodic Gibbs measures, one of which is translation-invariant, and the other two are weakly periodic (not periodic).
- Let $k = 3, i = 1, \lambda_{cr} = \frac{27}{16}$. Then on I_2 for $\lambda \leq \lambda_{cr}$ there is exactly one weakly periodic measure Gibbs measure, which is translation-invariant and for $\lambda > \lambda_{cr}$ there are exactly three weakly periodic Gibbs measures, one of which is translation-invariant, and the other two are weakly periodic (not periodic).

The following theorem is a new result and is different from the previous ones.

Theorem 1. Let $k \geq 2$ and the series $\sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \lambda_j$ converges. Then for a HC model with a countable number of states , in the case of a normal index divisor of four, the following statements are true: For

$$1)\ k = i; \quad 2)\ k = 4, \ i = 1; \quad 3)\ k = 4, \ i = 2; \quad 4)\ k = 4, \ i = 3; \quad 5)\ k = 5, \ i = 1;$$

on the invariant set I_4, the number of weakly periodic Gibbs measure is one. At the same time, this measure coincides with the unique translation-invariant Gibbs measure.

Literature

1. Brightwell G.R., Winkler P., Graph homomorphisms and phase transitions, J.Combin. Theory Ser.B., Vol.77, 1999, Page. 221–262.

2. Georgii H.-O., Gibbs Measures and Phase Transitions. De Gruyter Stud. Math., Vol. 9, Walter de Gruyter, Berlin (1988).

3. Rozikov U.A., Gibbs measures on Cayley trees. Singapore.: World Sci. Publ., 2013.

4. H. -O. Georgii: *Gibbs Measures and Phase Transitions*, (De Gruyter Stud. Math., Vol. **9**) Walter de Gruyter, Berlin 2011.

5. F. Henning, C. Külske, A. Le Ny and U. A. Rozikov: Gradient gibbs measures for the SOS-model with countable values on a Cayley tree, *Electron. J. Probab.* **24** (2019).

6. N. N. Ganikhodjaev: Limiting Gibbs measures of Potts model with countable set of spin values, *J. Math. Anal. Appl.* **336** (2007), 693–703.

7. R. M. Khakimov, M. T. Makhammadaliev and U. A. Rozikov: Gibbs measures for HC-Model with a countable set of spin values on a Cayley tree, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **26** (9) (2023), 22 p.

8. M. Makhammadaliyev : Weakly periodic Gibbs measures for the HC model with a countable set of spin values, Report. Math. Phys. Vol. **94**, (2024) 83-103.

Translation Invariant Gibbs Measures For One Model

Khakimov R.M.[1], **Mutalliyev N.N.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
rustam_7102@rambler.ru [1]
Namangan Institute of Engineering-Technology, Namangan, Uzbekistan;
nodirbekmutalliyev95@gmail.com [2]

Let $\Im^k = (V, L)$ is the Cayley tree. For fixed $x^0 \in V$ we set

$$W_n = \{x \in V \,|\, d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m,$$

where $d(x, y)$ is the distance between vertices x and y on the Cayley tree. Let $\Phi = \{0, 1, 2\}$ and $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ be the configuration, i.e., $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. The set of all configurations on V (V_n) is denoted by Ω (Ω_{V_n}).

Consider the set Φ as the set of vertices of some graph G. The σ configuration is called *G-admissible configuration* on the Cayley tree (in V_n) if $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ is edge of the graph G for any the nearest pair of neighbors x, y from V (from V_n). Let us denote the set of G-admissible configurations via $\Omega^{a,G}$ ($\Omega^{a,G}_{V_n}$).

The activity set [2] for the graph G is the function $\lambda : G \to R^3_+$. Value λ_i of function λ at vertex $i \in \{0, 1, 2\}$ is called its "activity".

For given G and λ, we define the Hamiltonian of the $G-HC$-model as

$$H^{\lambda}_G(\sigma) = \begin{cases} -\sum\limits_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{if } \sigma \in \Omega^{a,G}, \\ +\infty, & \text{if } \sigma \notin \Omega^{a,G}. \end{cases}$$

Let $z : x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R^3_+$ vector-valued function on V. For $n \geq 1$ and $\lambda > 0$ consider the probability measure $\mu^{(n)}$ on $\Omega^{a,G}_{V_n}$, defined as

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{x \in V_n} \lambda_{\sigma_n(x)} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x),x}. \tag{1}$$

The sequence of probability measures $\mu^{(n)}$ is said to be consistent if for any $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega^{a,G}_{V_{n-1}}$ the equality holds

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^{a,G}_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{2}$$

In this case, by the theorem Kolmogorov (see [3]) there is a unique measure μ on $(\Omega^{a,G}, B)$ such that

$$\mu(\sigma : \sigma|_{V_n} = \sigma_n) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

for all n and any $\sigma_n \in \Omega^{a,G}_{V_n}$.

Theorem 1. [1] *Probability measures $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, given by the formula (1), are consistent if and only if for any $x \in V$ the following equation holds:*

$$\begin{cases} z'_{1,x} = \lambda'_1 \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10}+a_{11}z'_{1,y}+a_{12}z'_{2,y}}{a_{00}+a_{01}z'_{1,y}+a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} = \lambda'_2 \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20}+a_{21}z'_{1,y}+a_{22}z'_{2,y}}{a_{00}+a_{01}z'_{1,y}+a_{02}z'_{2,y}}, \end{cases} \tag{3}$$

where $z'_{i,x} = \lambda'_i \frac{z_{i,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$, $i = 1, 2$.

In the case fertile graph $G = wrench$, we study the case $\lambda_1 \neq \lambda_2$ and TISGMs, i.e., $z_x \equiv z$:

$$wrench: \quad \{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}.$$

From (3) we obtain

$$\begin{cases} z_1 = \lambda_1 \left(\frac{1+z_1}{1+z_1+z_2}\right)^k, \\ z_2 = \lambda_2 \left(\frac{1}{1+z_1+z_2}\right)^k. \end{cases} \tag{4}$$

From (4) we find

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \frac{\sqrt[k]{\lambda_2} - y\left(1+y^k\right)}{y\left(\sqrt[k]{\lambda_2} - y^{k+1}\right)^k}, \\ \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\left(\sqrt[k]{\lambda_1} - x\right)\left(1+x^k\right)^{k+1}}{x^{k+1}}. \end{cases} \tag{5}$$

In the case $k = 2$, analyzing the system of the equations (5), we get following theorem:

Theorem 2. Let $k = 2$. Then for the three state Hard-Core model in the case $G = wrench$, the number of TISGMs is

$$N = \begin{cases} 1, \ if \ 0 < \lambda_1 < \lambda^{(1)}_{1_{cr}} \ or \ \lambda_1 > \lambda^{(2)}_{1_{cr}} \\ 2, \ if \ \lambda_1 = \lambda^{(1)}_{1_{cr}} \ or \ \lambda_1 = \lambda^{(2)}_{1_{cr}} \\ 3, \ if \ \lambda^{(1)}_{1_{cr}} < \lambda_1 < \lambda^{(2)}_{1_{cr}}, \end{cases}$$

where $\lambda^{(1)}_{1_{cr}} = \lambda_1(y_1(\lambda_2), \lambda_2)$, $\lambda^{(2)}_{1_{cr}} = \lambda_1(y_2(\lambda_2), \lambda_2)$. And $y_1(\lambda_2)$ and $y_2(\lambda_2)$ are the positive roots of the equation:

$$-4y^6 - 6y^4 + 5\sqrt{\lambda_2}y^3 - \lambda_2 = 0.$$

Literature

1. Rozikov U.A., Shoyusupov Sh.A.: Alternative Gibbs measure for fertile three-state Hard-Core models on a Cayley tree. Theor. Math. Phys. – 2008. – 156, № 3. – P. 1319–1330.

2. Brightwell G., Winkler P.: Graph homomorphisms and phase transitions. J.Combin. Theory Ser.B., – 1999. – 77, – P. 221-262.

3. F. Haydarov, *Kolmogorov extension theorem for non-probability measures on Cayley trees*, Reviews in Mathematical Physics, Vol. 36, №. 6, 2450010 (2024), 12 pages.

Translation-Invariant Gibbs Measures for the Blume-Capel Model

Khatamov N.M.[1], **Kodirova M.A.**[2]

Namangan state university, Namangan, Uzbekistan; nxatamov@mail.ru
Andijan state university, Andijan, Uzbekistan; malika.kodirova24@gmail.com

A Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles such that each vertex has precisely $k+1$ edges, where V is the set of vertices of the graph Γ^k, L is the set of its edges. Let i be an incidence function associating each edge $l \in L$ to its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called the nearest neighbors of a vertex and can be written as $\langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y), x, y \in V$ on the Cayley tree is defined as

$$d(x, y) = \min\{d|\exists x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y \in V; \langle x_0, x_1\rangle, ..., \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

We consider a model in which spin variables take values from the set $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. We then define a configuration σ on V as a function $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with $\Omega = \Phi^V$. Let $A \subset V$. We denote the space of configurations defined on a set A by Ω_A.

The Hamiltonian of the Blume-Capel model is given by the formula (see [3],[4])

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y>} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

where $J > 0$.

For a fixed $x^0 \in V$, we denote $W_n = \{x \in V|d(x^0, x) = n\}, V_n = \{x \in V|d(x^0, x) \leq n\}$.

The set of the direct successors of x is denoted by $S(x)$, i.e.,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1}|d(x, y) = 1\}, x \in W_n.$$

Let $h : x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{1,x})$ be a vector-valued function on $x \in V \setminus \{x^0\}$. We consider the probability measure $\mu^{(n)}$ on Ω_A,

$$\mu^n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\}. \tag{2}$$

Here $\sigma \in \Omega_{V_n}$, and Z_n is a normalization factor, $Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}} \exp\left\{-\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\bar{\sigma}(x),x}\right\}$, where $h_{\bar{\sigma},x} \in R$.

The probability measure $\mu^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and any $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}\left(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}\right) = \mu^{(n-1)}\left(\sigma_{n-1}\right). \tag{3}$$

In this case, there is a unique measure μ on Ω_V such that $\mu(\{\sigma|V_n = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ for all $n \geq 1$ and any $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

A condition for $h_{i,x}$ ensuring the consistency of the measures $\mu^{(n)}$ is formulated in the next theorem.

Teorema 1. *Let $k \geq 2$. The sequence of probabilistic measures $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, ...$, defined* (3) *is consisted if and only if the equalities*

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta^4 z_{-1,y} + \theta + z_{1,y}}{\theta z_{-1,y} + 1 + \theta z_{1,y}}, \\ z_{-1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{z_{-1,y} + \theta + \theta^4 z_{1,y}}{\theta z_{-1,y} + 1 + \theta z_{1,y}}, \end{cases} \tag{4}$$

where $\theta = \exp\{J\beta\}$, $\beta = 1/T$, $z_{i,x} = \exp(h_{i,x} - h_{0,x})$, $i = -1, 1$ hold for any $x \in V$.

Translation-invariant Gibbs measures (TIGM) correspond to solutions (4) with $z_{i,x} = z_i > 0$ for all $x \in V$ and $i = -1, 1$. We introduce the notation $z_1 = z_1, z_{-1} = z_2$. Then (4) has the form

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta^4 z_2 + \theta + z_1}{\theta z_1 + \theta z_2 + 1}\right)^k, \\ z_2 = \left(\frac{\theta^4 z_1 + \theta + z_2}{\theta z_1 + \theta z_2 + 1}\right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

We consider the case $z_1 = z_2 = z$. Here, from (5), we obtain

$$z = \left(\frac{(1+\theta^4)z + \theta}{2\theta z + 1}\right)^k. \tag{6}$$

The following theorem holds for the solutions of the last equation ([1],[2]).

Teorema 2. *Equation (6) with $\theta > 0$, $k \geq 1$ has a unique solution if either $k = 1$ or $\frac{1+\theta^4}{2\theta^2} < \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$. If $k > 1$ and $\frac{1+\theta^4}{2\theta^2} > \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$ then there exist $\eta_1(\theta, k)$, $\eta_2(\theta, k)$, with $0 < \eta_1(\theta, k) < \eta_2(\theta, k)$, such that the equation has three solutions if $\eta_1(\theta, k) < 1 < \eta_2(\theta, k)$ and has two if either $\eta_1(\theta, k) = 1$ or $\eta_2(\theta, k) = 1$. In fact:*

$$\eta_i(\theta, k) = \frac{1}{x_i}\left(\frac{(1+\theta^4)x_i + \theta}{2\theta x_i + 1}\right)^k,$$

where x_1 and x_2 are the solutions of

$$2\theta(1+\theta^4)x^2 - \left[(k-1)\left(1+\theta^4\right) - 2\theta^2(k+1)\right]x + \theta = 0.$$

From this theorem, it follows that according to Theorem 1, there are one, two, and three TIGMs in a given set of values of the parameter θ, respectively.

References

1. Preston C. J. Gibbs States on Countable Sets. Cambridge Tracts Math., 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

2. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore. World Scientific, 2013.

3. Khatamov N.M. Translation-invariant extreme Gibbs measures for the Blume-Capel model with a wand on a Cayley tree //Ukrainian Mathematical Journal, 2020, Vol. 72, №. 4, P.540–556.

4. Khatamov N.M. Periodic Gibbs Measures and Their Extremes for the HC-Blume-Capel Model in the Case of a "Wand" on the Cayley Tree //Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №. 9, P. 2515–2524.

Discrete-Time Dynamics Of A Svir Model

Jamilov U. U., Kholikova F. Q.
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
jamilovu@yandex.ru, xoliqovafayoza8@gmail.com

The epidemic SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) model was introduced first in [1]. It is known that a strong control of spread of illness can only be achieved through vaccination programs [2]. In [3] modified the vaccine SIR model from [2] (SVIR) to account for the weak/loss immune vaccination impacts. In this model, the total population of N individuals exposed to an epidemic disease at each time instant t is divided into four groups: the susceptible group fraction denoted by $S(t)$, the vaccinated group fraction denoted by $V(t)$ the infected group fraction denoted by $I(t)$, and the recovered group fraction denoted by $R(t)$. So the system is closed and we have $S(t)+V(t)+I(t)+R(t) = 1$. According to the model in [2] (without birth and death rates), an adaptive immunity to the hosts can be given by vaccine adminstration into the body reducing the number of susceptible and also preventing later infection and transmission. But the SVIR model in [2] requires modification in the case of weak/loss of immune so that some part of the vaccinated should be transferred back into infected class I. So new version SVIR has form

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) - \nu S(t),\\
\frac{dV(t)}{dt} &= \nu S(t) - \alpha V(t)I(t),\\
\frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) + \alpha V(t)I(t) - \gamma I(t),\\
\frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)),
\end{aligned} \tag{1}$$

whereas β is the infectious rate, ν is the vaccine rate, γ is the recovery rate, α is the infectious rate of vaccinateds.

The discrete version of (1) for a non-negative integer number n has the following form

$$\begin{cases}
S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n - \nu S_n,\\
V_{n+1} = V_n + \nu S_n - \alpha V_n I_n,\\
I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n + \alpha V_n I_n - \gamma I_n,\\
R_{n+1} = R_n + \gamma I_n,
\end{cases} \tag{2}$$

Consider a map $V : \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^4_+$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \mathbf{x}' = V(\mathbf{x}) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ defined by

$$V : \begin{cases}
x'_1 = x_1 - \beta x_1 x_3 - \nu x_1,\\
x'_2 = x_2 + \nu x_1 - \alpha x_2 x_3,\\
x'_3 = x_3 + \beta x_1 x_3 + \alpha x_2 x_3 - \gamma x_3,\\
x'_4 = x_4 + \gamma x_3,
\end{cases} \tag{3}$$

where $x'_1 = S_1$, $x'_2 = V_1$, $x'_3 = I_1$, $x'_4 = R_1$, $x_1 = S_0$, $x_2 = V_0$, $x_3 = I_0$, $x_4 = R_0$.

Then the dynamical system can be written as $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$, $n \geq 0$. We are interested in studying the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)}$, for any initial condition $\mathbf{x}^{(0)} \in R^4_+$. A

point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3_+$ is called a *fixed* point of V if $V(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ and we denote by $\mathrm{Fix}(V)$ the set of all fixed points. Let $S^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4_+ : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ be the 3-dimensional simplex.

Proposition. The operator (3) maps S^3 to itself iff

$$0 \le \gamma \le 1, \quad 0 \le \nu \le 1, \quad \gamma - 1 \le \alpha \le 1, \quad -1 + \gamma \le \beta \le 1 - \nu.$$

Theorem. For any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^3 \setminus \mathrm{Fix}(V)$ the following assertions hold:

$$\lim_{n\to\infty} V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} \left\{\left(0, 1 - x_3^{(0)} - x_4^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \beta = \gamma = 0, \nu \neq 0, \\ \left\{\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, 0, 1 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \beta = \nu = 0, \gamma \neq 0, \\ \left\{\left(0, x_2^{(0)}, 1 - x_2^{(0)} - x_4^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \gamma = \nu = 0, \beta > 0, \\ \left\{\left(1 - x_2^{(0)} - x_4^{(0)}, x_2^{(0)}, 0, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \gamma = \nu = 0, \beta < 0, \\ \left\{\left(x_1^{(0)}, 0, 1 - x_1^{(0)} - x_4^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha > 0, \beta = \gamma = \nu = 0, \\ \left\{\left(x_1^{(0)}, 1 - x_1^{(0)} - x_4^{(0)}, 0, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha < 0, \beta = \gamma = \nu = 0, \\ \left\{\left(0, x_1^{(0)} + x_2^{(0)}, 0, x_3^{(0)} + x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \beta = 0, \gamma\nu \neq 0, \\ \left\{\left(0, x_2^*, 1 - x_2^* - x_4^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\} & \text{if } \alpha = \gamma = 0, \nu \neq 0, \beta > 0, \\ \left\{\left(0, 1 - x_4^{(0)}, 0, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \gamma = 0, \nu \neq 0, \beta < 0, \\ \left\{\left(0, 0, 1 - x_4^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha > 0, \beta = \gamma = 0, \nu \neq 0, \\ \left\{\left(0, 1 - x_4^{(0)}, 0, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha < 0, \beta = \gamma = 0, \nu \neq 0, \\ \left\{\left(x_1^*, x_2^{(0)}, 1 - x_1^* - x_2^{(0)} - x_4^*, x_4^*\right)\right\}, & \text{if } \alpha = \nu = 0, \beta\gamma \neq 0, \\ \left\{\left(x_1^{(0)}, x_2^*, 1 - x_1^{(0)} - x_2^* - x_4^*, x_4^*\right)\right\}, & \text{if } \alpha\gamma \neq 0, \beta = \nu = 0, \\ \left\{\left(x_1^*, x_2^*, 1 - x_1^* - x_2^* - x_4^{(0)}, x_4^{(0)}\right)\right\}, & \text{if } \alpha\beta \neq 0, \gamma = \nu = 0, \\ \left\{(x_1^*, x_2^*, 1 - x_1^* - x_2^* - x_4^*, x_4^*)\right\}, & \text{if } \alpha = 0, \beta > 0, \gamma\nu \neq 0, \\ \left\{(0, x_2^*, 0, 1 - x_2^*)\right\}, & \text{if } \alpha = 0, \beta < 0, \gamma\nu \neq 0, \\ \left\{(0, x_2^*, 1 - x_2^* - x_4^*, x_4^*)\right\}, & \text{if } \beta = 0, \alpha\gamma\nu \neq 0, \\ \left\{(x_1^*, x_2^*, 1 - x_1^* - x_2^* - x_4^*, x_4^*)\right\}, & \text{if } \alpha\beta\gamma \neq 0, \nu = 0, \\ \left\{(1 - x_2^* - x_4^*, x_2^*, 0, x_4^*)\right\}, & \text{if } \alpha\beta\gamma\nu \neq 0. \end{cases}$$

References

1. Kermack W.O., Mckendrick A.G., A contribution to the mathematical theory of epidemics// Proc.R.Soc.Lond.Ser.A Math. Phys. Eng. Sci. 1927, Vol. 115, №. 772, P. 700-721.

2. Schlickkeiser R., Kroger M., Analytical modeling of the temporal evolution of epidemics outbreaks accounting for vaccinations // Physics Vol. 3(2). 2021, P. 386-426.

3. Turkyilmazoglu M., An extended epidemic model with vaccination: Weak-immune SIRVI // Physica A. 2022, Vol.598(4), №. 127429, P. 1-11.

Weighted $(m,\psi)-$Capacity $C_m(K,D,\psi)$ Of A Condenser (K,D)

Kuldoshev K. K.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail: qobiljonmath@gmail.com

In this work, we introduce the concept of the capacity of a condenser (K,D), with a weighted function $\psi(z)\in C(K)$for a compact set $K\subset D$, where $D\subset\mathbb{C}^n$ is a domain, in the class of $m-$ subharmonic functions.

Capacity of condensers is one of the important concepts of the potential theory and it has been extensively studied by many researchers. In the works of A. Sadullaev and B. Abdullaev [1], Z. Blocki [2], S. Dinev, S. Kolodziej [3] the concept of condenser capacity were introduced, in the class of $m-$subharmonic functions, where extensive research was conducted, leading to significant results.

Definition 1. Let K be a compact subset of a strongly $m-$regular domain $D\subset\mathbb{C}^n$. Then the following quantity

$$C_m(K,D,\psi)=$$

$$=\inf\left\{\int\limits_D(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\bigcap C(D),\ u|_K\le\psi|_K,\ \varliminf_{z\to\partial D}u(z)\ge 0\right\}$$

is called $(m,\psi)-$capacity of the condenser (K,D).

Note that, if $\psi\equiv-1$, then the weighted $(m,\psi)-$capacity $C_m(K,D,\psi)$ coincides with $C_m(K,D)$, $C_m(K,D,-1)=C_m(K,D)$.

The $(m,\psi)-$capacity $C_m(K,D,\psi)$ has the following properties.

1. a) if $K_1\subset K_2\subset D$, then $C_m(K_1,D,\psi)\le C_m(K_2,D,\psi)$. b) if $\psi_1\le\psi_2$, then $C_m(K,D,\psi_1)\ge C_m(K,D,\psi_2)$.

2. If $K\subset D$ is a $(m,\psi)-$regular compact (see [4]), then

$$C_m(K,D,\psi)=\int\limits_K(dd^c\omega^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1},$$

where, $\omega^*(z,K,D,\psi)$is weighted $m-$subharmonic measure (see [4]).

3. For any compact $K\subset D$, $C_m(K,D,\psi)=\inf\left\{C_m\left(E,D,\tilde{\psi}\right):\ E\supset K\right\}$, where $\tilde{\psi}\in C(E)$, $\tilde{\psi}\Big|_K=\psi|_K$and E is $\left(m,\tilde{\psi}\right)-$ regular compact in the domain D.

4. If $K$is a $(m,\psi)-$regular compact, then

$$C_m(K,D,\psi)=$$

$$\sup\left\{\int\limits_K(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\bigcap C(D),\ \psi|_K\le u|_K,\ u|_D<0\right\}.$$

Definition 2. Let U be an open subset of D. The $(m,\psi)-$capacity of the open set U is $C_m(U,D,\psi)=\sup\{C_m(K,D,\psi):\ K\subset U\}$, where K is a compact.

It follows from the definition of the $(m,\psi)-$ capacity of the open set U and from property 3 that $C_m(U,D,\psi)=\sup\{C_m(K,D,\psi):\ K\subset U\}$, where K is a $(m,\psi)-$regular compact. The monotonicity properties mentioned above for the compact $K\subset D$ also hold for an open set U.

5. If $U\subset D$ is an open set, then

$$C_m(U,D,\psi)=$$

$$=\sup\left\{\int\limits_U(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\bigcap C(D),\ \psi|_U\le u|_U,\ u|_D<0\right\}=$$

$$=\sup\left\{\int\limits_U(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\bigcap C^\infty(D),\ \psi|_U\le u|_U,\ u|_D<0\right\}.$$

6. For any increasing sequence of open sets $U_j\subset U_{j+1}\subset D$, $j\in\mathbb{N}$, we have

$$C_m\left(\bigcup_j U_j,D,\psi\right)=\lim_{j\to\infty}C_m(U_j,D,\psi).$$

Now, we will define the $(m,\psi)-$external capacity of an arbitrary set $E\subset D$ by using the capacity of open sets.

Definition 3. The quantity $C_m^*(E,D,\psi)=\inf\{C_m(U,D,\psi):\ U\supset E\}$ is called the $(m,\psi)-$external capacity of the set $E\subset D$, where $U\subset D$ is an open set in D.

7. $(m,\psi)-$external capacity is countably subadditive, i.e.

$$C_m^*\left(\bigcup_j E_j,D,\psi\right)=\sum_j C_m^*(E_j,D,\psi),\ \ E_j\subset D,\ \forall j\in\mathbb{N}.$$

Theorem 1. The following inequality holds:

$$\left(-\inf_{z\in E}\psi(z)\right)^{n-m+1}C_m^*(E,D)\ge C_m^*(E,D,\psi)\ge\left(-\sup_{z\in E}\psi(z)\right)^{n-m+1}C_m^*(E,D),\forall E\subset D.$$

Corollary 1. $C_m^*(E,D,\psi)=0$ if and only if E is $m-$polar.

References

1. Sadullaev A., Abdullaev B. Potential theory in the class of $m-$ subharmonic functions // Trudy Mat. Inst. Steklova, 2012. Vol. 279, p. 166-192 (in Russian).

2. Blocki Z. Weak solutions to the complex Hessian equation // Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 2005. Vol. 5, №. 55, p.1735-1756.

3. Dinew S., Kolodziej S. A priori estimates for the complex Hessian equation // Analysis and PDE, 2014. Vol. 7, №. 5, p. 227-244.

4. Kuldoshev K. K., Narzullayev N. Kh. $(m,\psi,\delta)-$ regularity of compacts in // Acta NUUz, 2024. Vol. 2, №. 2.2.1, p. 65-76.

The Hard-Core Model On The Closed Cayley Tree With Branching Ratio Two: An Exactly Solvable Case

Makhammadaliev T. M.[1], **Karshiboev Sh. O.**[2]

Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
e-mail: mmtmuxtor93@mail.ru
Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
e-mail: okarshiboevsher@mail.ru

In 1979 Jelitto [1] introduced the zero-field Ising model on the closed Cayley tree of branching ratio two and proceeded to solve it exactly. In the work, we consider the two-state Hard-Core model on the closed Cayley tree of branching ratio two. We exactly solve the model, i.e., we find the critical value of the parameter such that below this value there are three limiting Gibbs measures.

To define a random field, it is useful to consider the construction of the closed Cayley tree of branching ratio two. We begin with a single vertical edge connecting a pair of sites. Next, replicate this structure to the right and connect the two top sites through an additional site with two edges. Similarly, connect the two bottom sites in the same manner, thereby forming the elemental hexagon. In the next step, replicate this structure to the right and link the two top sites and two bottom sites as before. This process generates a closed tree with two upper levels and two lower levels. Denote the finite closed tree constructed at the nth stage by $T^{(n)}$. The infinite closed Cayley tree is then defined as $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{(n)}$. The infinite closed Cayley tree T can be naturally decomposed into two distinct parts: $T = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, where $\Gamma^1 = \{V_1, L_1\}$ represents the upper tree, and $\Gamma^2 = \{V_2, L_2\}$ represents the lower tree.

We study binary random fields on T, which can be viewed as the limiting measures of a spin system defined on a sequence of finite closed Cayley trees. Let $V = V_1 \cup V_2$ and $L = L_1 \cup L_2$. If $l \in L$ an edge with endpoints $x, y \in V$ then we write $l = \langle x, y\rangle$ and the endpoints are called nearest neighbors.

We assume that $\Phi = \{0, 1\}$, and $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ is a configuration, i.e., $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, where $\sigma(x) = 1$ means that the vertex x on the closed tree $T^{(n)} = \{V^{(n)}, L^{(n)}\}$ is *occupied*, and $\sigma(x) = 0$ means it is *vacant*. The configuration σ is said to be an *admissible* if $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ for any neighboring $\langle x, y\rangle$ from V ($V^{(n)}$ respectively) and we denote the set of such configurations by Ω^a ($\Omega^a_{V^{(n)}}$). Obviously, $\Omega^a \subset \Phi^V$. If $\sigma(x)\sigma(y) = 1$ for nearest-neighbor vertices $x \in V_1$ and $y \in V_2$, then the edge $\langle x, y\rangle$ is called an *occupied edge*.

We represent the random field on $T^{(n)}$ in terms of the potential function

$$H(\sigma) = -J_0 \sum_{\langle x,y\rangle : x\in V_1, y\in V_2} \sigma(x)\sigma(y) - J_1 \sum_{i\in V_1} \sigma(i) - J_2 \sum_{j\in V_2} \sigma(j),$$

the first summation is carried out over all spins on the surfaces sites (i.e., those for nearest neighbor pairs on upper level 1 and lower level 1), the second (third) summation is taken over the vertices of the upper (lower) tree of $T^{(n)}$.

Let $\mathbf{B}$ be the σ-algebra generated by cylindrical sets with finite base of Ω^a. For any n we let $\mathbf{B}_{V^{(n)}} = \{\sigma \in \Omega : \sigma|_{V^{(n)}} = \sigma_n\}$ denote the subalgebra of $\mathbf{B}$, where $\sigma|_{V^{(n)}}$ is restriction of σ to $V^{(n)}$ and $\sigma_n : x \in V^{(n)} \mapsto \sigma_n(x)$ an admissible configuration in $V^{(n)}$.

The resulting for $\sigma \in \mathbf{B}_{V^{(n)}}$ Gibbs distribution is then defined by

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z^{(n)}} \exp\left(-\frac{1}{kT} H(\sigma)\right),$$

where $Z^{(n)}$ is the partition function. We can rewrite this distribution in terms of the number of "occupied" edges $n_0(\omega)$ and number of "occupied" vertices $n_1(\omega)$ and $n_2(\omega)$ on the surface, the upper tree and the lower tree, respectively, as follows:

$$P(\omega) = \frac{1}{Z^{(n)}} \exp\{-h_0 n_0(\omega) - h_1 n_1(\omega) - h_2 n_2(\omega)\},$$

where $h_i = \frac{J_i}{kT}$ $i = 0, 1, 2$.

Taking an advantage of structure of the closed Cayley tree, under some conditions we obtain the following system of equations

$$\begin{cases} x = \frac{(1+y)^2}{(x+y)^2}, \\ y = \frac{(x+y+z+1)^2}{c(x+y)^2}, \\ z = \frac{cy^2}{(x+y)^2}. \end{cases} \tag{1}$$

If the system of equations (1) has a unique solution, the corresponding limiting measure is also unique, indicating the absence of a phase transition. On the other hand, if the system has multiple solutions, this implies there is more than one limiting measures, which is characteristic of a phase transition. Let $h_1 = h_2 = h$. We obtain the following result

Theorem 1. For the Hard-Core model on the symmetric closed Cayley tree with a branching ratio of two:

- if $h \leq \ln\left(\frac{33\sqrt{33}-189}{16}\right)$, a phase transition occurs,
- if $h > \ln\left(\frac{33\sqrt{33}-189}{16}\right)$, a phase transition does not occur.

Literature

1. Jelitto R. J. The Ising model on a closed Cayley tree //Physica A: Statistical mechanics and its applications. 1979 . Vol . 99, №. 1. P. 268–280.

Fixed Points Of A Non-Stochastic Quadratic Operator

Mansurkhujayev A. M.[1], **Boxonov Z. S.**[2]
University of exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
mr.azizkhuja@gmail.com
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
z.b.x.k@mail.ru

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ x_i \geq 0, \ \text{ for any } \ i \ \text{ and } \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

the $(m-1)$- dimensional simplex.

A *quadratic stochastic operator* (QSO) is a mapping $W : S^{m-1} \to S^{m-1}$ given by

$$W : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E \tag{1}$$

and the coefficients $p_{ij,k}$ satisfy

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k \in E. \tag{2}$$

Thus, each quadratic stochastic operator W can be uniquely defined by a cubic matrix $(p_{ij,k})_{i,j,k=1}^{m}$ with conditions (2).

For a given $x^{(0)} \in S^{m-1}$ the trajectory (orbit) $\{x^{(n)}\}$ of $x^{(0)}$ under the action of QSO (1) is defined by

$$x^{(n+1)} = W(x^{(n)}) = W^{n+1}(x^{(0)}), \ n = 0, 1, 2, \dots.$$

Definition 1. [1] A quadratic operator (1) preserving a simplex, is called non-stochastic if at least one of its coefficients $p_{ij,k}$, $i \neq j$ is negative.

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *periodic* point of W if there exists an n such that $W^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the *prime period* or *least period* of the point $\mathbf{x}$. A period-one point is called a *fixed* point of W. Denote the set of all periodic points (not necessarily prime) of period n by $\mathrm{Per}_n(W)$, the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}(W)$.

Let $DW(\mathbf{x}^*) = (\partial W_i / \partial x_j)_{i,j=1}^{m}(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 1. [2] *A fixed point $\mathbf{x}^*$ of the operator W is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ at $\mathbf{x}^*$ has no eigenvalues on the unit circle.*

Definition 2. [2] *A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:*

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{x}^*)$ are less than 1 in absolute value;

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{x}^*)$ are greater than 1 in absolute value;

iii) a saddle otherwise.

Theorem 1. [1] For a quadratic operator W (given by (1)), to preserve a simplex S^{m-1} it is sufficient that

i) $\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad i,j = 1,...,m;$

ii) $0 \le p_{ii,k} \le 1 \quad i,k = 1,...,m;$

iii) $-\frac{1}{m-1}\sqrt{p_{ii,k}p_{jj,k}} \le p_{ij,k} \le 1 + \sqrt{(1-p_{ii,k})(1-p_{jj,k})}$
and necessary that the conditions (i), (ii) and

iii') $-\sqrt{p_{ii,k}p_{jj,k}} \le p_{ij,k} \le 1 + \sqrt{(1-p_{ii,k})(1-p_{jj,k})}$
are satisfied.

Let us consider a non-stochastic quadratic operator defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$W : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 - ax_1x_2, \\ x_2' = (2+a)x_1x_2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases} \tag{3}$$

Theorem 2. The following statements are true for the non-stochastic quadratic operator W (defined by (3)):

i) For the non-stochastic quadratic operator W to map the simplex S^2 to itself, it is necessary and sufficient that $a \in [-2,1]$.

ii) $Fix(W) = \begin{cases} \{u_1,u_2,u_3\}, & if\ a \in [-2,-1]; \\ \{u_1,u_2,u_3,u_4\}, & if\ a \in (-1,-0); \\ \{u_1,u_2,u_4\}, & if\ a \in [0,1]. \end{cases}$

where

$$u_1 = (1,0,0),$$
$$u_2 = (0,0,1),$$
$$u_3 = \left(\frac{1}{2-a}, \frac{1}{2-a}, \frac{1}{2-a}\right),$$
$$u_4 = \left(\frac{1}{2+a}, \frac{a+1}{2+a}, 0\right).$$

Literature

1. Rozikov U., Xudayarov S. Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos // *Ann. Funct. Anal.*, 2022. 13(17), pp. 1–17.

2. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical System // 2003, *Westview Press.*

On Local Fractional Integro-Differentiation

Yakhshiboev M.U.[1], **Karimov M.**[2]

[1]Samarkand branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan; m.yakhshiboyev@gmail.com

[2]Digital Technologies and Artificial Intelligence Research Institute, Tashkent, Uzbekistan; karimovmarat704@gmail.com

Multiple fractional integro-differentiation (the Chern construction) is studied in this paper. This modification is local in the sense that it is applicable to functions defined on the plane, but when calculating at a final point it does not require knowledge of the function values in the vicinity of infinity. The study is devoted to various ways of "truncating" the Chen-Marchaud constructions for fractional differentiation of $\mathbb{D}_c^\alpha f$, and these versions of "truncation" are used to describe and invert fractional integrals Chen of functions from $L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Multiple non-convolution integral representations in Lebesgue spaces with mixed norm are derived. Various methods of "reducing"the Chern-Marchaud constructions for multiple fractional differentiation $\mathbb{D}_c^\alpha f$ are developed and integral representations of truncated multiple fractional Chern-Marchaud derivatives in Lebesgue spaces with mixed norm are obtained. The topics of norm convergence and almost everywhere convergence of non-convolution integral operators in Lebesgue spaces with mixed norms remain under-explored. This limit $\left(\mathbb{D}_c^\alpha f\right)(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbb{D}_{c,\varepsilon}^\alpha f\right)(x)=\varphi(x)$, both double and repeated, exists in the sense of space $L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ (or $L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$, respectively), and it exists almost everywhere if $p_1 \le p_2$. In this paper, we also prove the inversion theorem and provide a description of multiple fractional Chern integrals in Lebesgue spaces $I_c^\alpha\varphi$ with mixed norm. Additionally, we demonstrate that integrals of multiple fractional Chern integration in Lebesgue spaces with mixed norm are bounded.

Definition 1. Let us fix an arbitrary point $c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$ for function $\varphi(x_1,x_2)$,given on plane $\mathbb{R}^2$, then the integral

$$\left(I_c^\alpha\varphi\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\int_{c_1}^{x_1}\int_{c_2}^{x_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{1-\alpha_1}(x_2-t_2)^{1-\alpha_2}}, & x_1>c_1,\ x_2>c_2,\\ \int_{c_1}^{x_1}\int_{x_2}^{c_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{1-\alpha_1}(t_2-x_2)^{1-\alpha_2}}, & x_1>c_1,\ x_2<c_2,\\ \int_{x_1}^{c_1}\int_{c_2}^{x_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(t_1-x_1)^{1-\alpha_1}(x_2-t_2)^{1-\alpha_2}}, & x_1<c_1,\ x_2>c_2,\\ \int_{x_1}^{c_1}\int_{x_2}^{c_2}\frac{\varphi(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(t_1-x_1)^{1-\alpha_1}(t_2-x_2)^{1-\alpha_2}}, & x_1<c_1,\ x_2<c_2,\end{cases}$$

where $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)$, $\alpha_1>0$ and $\alpha_2>0$, will be called an integral of fractional order $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$according to Chen.

Definition 2. Let us fix an arbitrary point $c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$ for function $f(x_1,x_2)$ defined on plane $\mathbb{R}^2$, the following expression

$$\left(D_c^\alpha f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_{c_1}^{x_1}\int_{c_2}^{x_2}\frac{f(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}(x_2-t_2)^{\alpha_2}}, & x_1>c_1,x_2>c_2,\\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_{c_1}^{x_1}\int_{x_2}^{c_2}\frac{f(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}(t_2-x_2)^{\alpha_2}}, & x_1>c_1,x_2<c_2,\\ -\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_{x_1}^{c_1}\int_{c_2}^{x_2}\frac{f(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(t_1-x_1)^{\alpha_1}(x_2-t_2)^{\alpha_2}}, & x_1<c_1,x_2>c_2,\\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int_{x_1}^{c_1}\int_{x_2}^{c_2}\frac{f(t_1,t_2)dt_1dt_2}{(t_1-x_1)^{\alpha_1}(t_2-x_2)^{\alpha_2}}, & x_1<c_1,x_2<c_2,\end{cases}\tag{1}$$

where $\Gamma(1-\alpha)=\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)$, will be called *the mixed fractional Chen derivative of order* $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $0<\alpha_i<1$, $i=1,2$.

Applying the expression for one-dimensional fractional derivatives in the Marchaud form (see (18.90), [1], p. 258 and (3) in [2]), from (1), for $0 < \alpha_i < 1,\ i = 1, 2$ we obtain:

$$\mathbb{D}_c^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(x_1, x_2)}{|x_1 - c_1|^{\alpha_1} |x_2 - c_2|^{\alpha_2}} + \frac{\alpha_1}{|x_2 - c_2|^{\alpha_2}} \int\limits_{\min(x_1, c_1)}^{\max(x_1, c_1)} \frac{f(x_1, x_2) - f(t_1, x_2)}{|x_1 - t_1|^{1-\alpha_1}} dt_1 + \right.$$

$$+ \frac{\alpha_2}{|x_1 - c_1|^{\alpha_1}} \int\limits_{\min(x_2, c_2)}^{\max(x_2, c_2)} \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, t_2)}{|x_2 - t_2|^{1+\alpha_2}} dt_2 +$$

$$\left. + \alpha_1 \alpha_2 \iint_{R_{xc}} \frac{f(x_1, x_2) - f(t_1, x_2) - f(x_1, t_2) + f(t_1, t_2)}{|x_1 - t_1|^{1+\alpha_1} |x_2 - t_2|^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 \right\},$$

where $R_{x,c} = \{(t_1, t_2) : \min(x_i, c_i) \le t_i \le \max(x_i, c_i),\ i = 1, 2\}$.

Lemma 1. Operator I_c^{α}, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$, is continuous in $L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right),\ 1 \le p_i < \infty,\ i = 1, 2$, here

$$\left\| I_c^{\alpha} \varphi \right\|_{L_{\overline{p}(K)}} \le \frac{\left[(b_1 - c_1)_+^{\alpha_1} + (c_1 - a_1)_+^{\alpha_1}\right] \left[(b_2 - c_2)_+^{\alpha_2} + (c_2 - a_2)_+^{\alpha_2}\right]}{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1+\alpha_2)} \left\| \varphi \right\|_{L_{\overline{p}(K)}}.$$

Lemma 2. Let $f = I_c^{\alpha} \varphi$, where $\varphi \in L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right),\ 1 \le p_i < \infty, \alpha_i > 0,\ i = 1, 2,\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Then the truncated fractional derivative $\mathbb{D}_{c,\varepsilon}^{\alpha} f$ has the following integral representation:

$$\mathbb{D}_{c,\varepsilon}^{\alpha} f = \int\limits_0^{\frac{|x_1 - c_1|}{\varepsilon_1}} \int\limits_0^{\frac{|x_2 - c_2|}{\varepsilon_2}} K_{l_1,\alpha_1}^{+}(t_1) K_{l_2,\alpha_2}^{+}(t_2) \varphi(x - \varepsilon \circ tsign(x - c)) dt_1 dt_2,$$

where $\varepsilon \circ t = (\varepsilon_1 t_1, \varepsilon_2 t_2),\ l_i > \alpha_i > 0,\ K_{l_i,\alpha_i}^{+}(t_i),\ i = 1, 2$ – are the kernels,

$$\mathrm{K}_{l_i,\alpha_i}^{+}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} (t-k)_+^{\alpha_i}}{\chi(\alpha_i, l_i)\Gamma(1+\alpha_i) t} \in L_1(\mathbb{R}), \int_0^{\infty} \mathrm{K}_{l_i,\alpha_i}^{+}(t) dt = 1.$$

Theorem 1. Let $f = I_c^{\alpha} \varphi,\ \varphi \in L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ (or $\varphi \in L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$), $1 \le p_i < \infty,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2,\ c \in \mathbb{R}^2$. Then

$$\left(\mathbb{D}_c^{\alpha} f\right)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mathbb{D}_{c,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \varphi(x),$$

where limits $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ – both double and two repeated ones $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} \lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} = \lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0}$ – exist in space $L_{\overline{p}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ (in $L_{\overline{p}}^{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$, respectively). In addition, both repeated limits also exist for almost all $x \in \mathbb{R}^2$.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. London-New York: Gordon & Breach. Sci. Publ., (Russian

edition - Fractional Integrals and Derivatives and some of their Applications, Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987.), 1993, 1-1012 pp.

2. Samko S.G. and Yakhshiboev M.U. On a class of identity approximation operators of a non-convolution type // J. Fractional calculus and Applied Analysis. 2001. Vol. 4, №. 4, P. 523-530.

On The Interpolation Problem For Bounded $A(z)$-Analytic Functions

Shoimkulov B.A., **Ne'matillayeva M.D.**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; shoimkba@rambler.ru

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; muhayyo@rn.gmail.com

As is well known, the solution of the Beltrami equation: $\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0$ (1) is directly related to quasiconformal mappings. In the general case, for the function $A(z)$, it is assumed that it is measurable and $|A(z)| \le C < 1$ almost everywhere in the considered domain $D \subset \mathbb{C}$. Solutions to equation (1) are called $A(z)$-analytic functions. The most interesting case is when $A(z)$ is an anti-analytic function, $\partial A = 0, |A(z)| \le C < 1, \ \forall z \in D$. Then, according to (1), the class of $A(z)$-analytic functions $f \in O_A(D)$ is characterized by the fact that $\bar{D}_A f = 0$. Since the anti-analytic function is infinitely smooth, it follows that $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ (see [1]).

This article is devoted to the study of interpolation sequences for $A(z)$-analytic functions in lemniscates when $A(z)$ is an anti-analytic function. For analytic functions, the interpolation problem is well-studied (see [2], [3]).

We present some facts from the theory of $A(z)$-analytic functions that we need below. Consider the integral

$$\psi(z,\xi) := z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \in O_A(D),$$

where $\gamma(\xi, z)$ is a smooth curve connecting points ξ, $z \in D$. If the domain D is simply connected, then the integral $I(z) = \int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau$ does not depend on the integration path; it coincides with the primitive, $I'(z) = \bar{A}(z)$. The function $\psi(z,\xi)$ for convex domains has a unique zero at the point $z = \xi$ and the set

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D : \quad |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)\, d\tau} \right| < r \right\}$$

represents an open connected set in D. For sufficiently small $r > 0$, it is compactly contained in D and includes the point ξ. This set is called an $A(z)$-lemniscate, centered at the point ξ and denoted as $L(\xi, r)$.

We also define the class of bounded functions:

$$H_A^\infty(L(a,r)) = \left\{ f(z) \in O_A(L(a,r)) : \quad \sup_{z \in L(a,r)} \{|f(z)|\} < \infty \right\}.$$

A sequence $\{z_n\}$ in the lemniscate $L = L(a,1) = \{|\psi(z,a)| < 1\}$ is called an interpolation sequence if each interpolation problem

$$f(z_n) = b_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

with bounded data $\{b_n\}$ has a solution $f(z) \in H_A^\infty(L)$. Using the Blaschke product (see [4]) for $A(z)$-analytic functions, the following theorem is proved.

Theorem. For a sequence $\{z_n\}$ of points from $L = L(a,1) = \{|\psi(z,a)| < 1\}$ to be an interpolation sequence, it is necessary and sufficient that there exists a $\delta > 0$ such that for every k, the condition

$$\prod_{n,n\neq k} \left| \frac{\psi(z_k,a) - \psi(z_n,a)}{1 - \overline{\psi}(z_n,a)\,\psi(z_k,a)} \right| \geq \delta > 0\,, \qquad k = 1, 2, ... \ .$$

References

1. Vekua I.N. Generalized analytic functions. M: "Nauka". Vol. 512 p (1988).

2. Koosis P. Introduction to H^p spaces. Cambirdge University, London Math Sosiety Lecture Note Series 40, 364 p (1960).

3. Garnett J. Bounded Analytic Functions.Moscow, 1984.

4. M.Ne'matillayeva, Sh.Khursanov "Analog of the Weierstrass Theorem and the Blaschke Product for A(z)-analytic Functions Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2023, 16(4), 420-430.

Local Behavior Of A Non-Volterra Quadratic Operator On S^2

Norkuchkarov Kh. A.[1], **Boxonov Z. S.**[2]

University of exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
norqochqorovhumoyun13@gmail.com
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
z.b.x.k@mail.ru

Let $E = \{1, \ldots, m\}$ be a finite set and set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ x_i \geq 0, \ \text{ for any } \ i \ \text{ and } \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

the $(m-1)$- dimensional simplex.

A *quadratic stochastic operator* (QSO) is a mapping $W : S^{m-1} \to S^{m-1}$ given by

$$W : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E \tag{1}$$

and the coefficients $p_{ij,k}$ satisfy

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k \in E. \tag{2}$$

Assume $\{x^{(n)} \in S^{m-1} : n = 0, 1, 2, ...\}$ is the trajectory (orbit) of the initial point $x^{(0)} \in S^{m-1}$, where $x^{(n+1)} = W(x^{(n)}) = W^{n+1}(x^{(0)})$ for all $n = 0, 1, 2, ...$. Let $\omega_W(x^{(0)})$ be the set of limit points of the trajectory. The main problem in mathematical population genetics consists of the study of the asymptotical behavior of the trajectories for a given QSO W. In other words, the main task is the description of the set for any initial point for a given QSO. This problem is an open problem even in two-dimensional case.

The main problem was completely solved for Volterra QSOs. A quadratic stochastic operator is called a Volterra if

$$p_{ij,k} = 0 \text{ for any } \ k \notin \{i, j\},\ i, j, k \in E.$$

The asymptotic behavior of trajectories Volterra QSOs was analyzed in [1].

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *periodic* point of W if there exists an n such that $W^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the *prime period* or *least period* of the point $\mathbf{x}$. A period-one point is called a *fixed* point of W. Denote the set of all periodic points (not necessarily prime) of period n by $\mathrm{Per}_n(W)$, the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}(W)$.

Let $DW(\mathbf{x}^*) = (\partial W_i/\partial x_j)_{i,j=1}^m(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 1. [2] *A fixed point $\mathbf{x}^*$ of the operator V is called hyperbolic if its Jacobian $DV(\mathbf{x}^*)$ at $\mathbf{x}^*$ has no eigenvalues on the unit circle.*

Definition 2. [2] *A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:*

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{x}^*)$ are less than 1 in absolute value;

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{x}^*)$ are greater than 1 in absolute value;

iii) a saddle otherwise.

Let us consider a non-Volterra QSO defined on the two-dimensional simplex which has the form

$$W : \begin{cases} x_1' = (1-b)x_1^2 + (1-b+a)x_1x_2 + (1-b)x_1x_3 + ax_2^2 + ax_2x_3, \\ x_2' = (1-a)x_1x_2 + cx_1x_3 + (1-a)x_2^2 + (1-a+c)x_2x_3 + cx_3^2, \\ x_3' = bx_1^2 + bx_1x_2 + (1-c+b)x_1x_3 + (1-c)x_2x_3 + (1-c)x_3^2, \end{cases} \tag{3}$$

where $a, b, c, d \in (0, 1)$.

Theorem 1. The following statements are true for the QSO W (defined by (3)):

i) The operator W has a unique fixed point x^*;

ii) x^* is non-hyperbolic (but, x^* is semi-attracting);

iii) The operator W has no periodic points in the set S^2;

where

$$x^* = \left(\frac{ac}{ab+bc+ac}, \frac{bc}{ab+bc+ac}, \frac{ab}{ab+bc+ac}\right).$$

Literature

1. Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems //*Infin. Dimens. Anal. Quan. Probab. Relat. Top.*, 2011, 14(2), pp. 279–335.

2. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical System // 2003, *Westview Press.*

Spectrum Of The Generalized Cesàro Operator On Rearrangement Invariant Spaces

Ozbekbay B.O.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: ozbekbay.b00@gmail.com

This work studies the spectrum of the generalized CesГґro operator

$$C_\beta f(t) := \beta t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\, ds, \quad \beta > 0,$$

acting on rearrangement invariant spaces $E(0,1)$ and $E(0,\infty)$ with Boyd indices satisfying $0 < \overline{a} \leq \underline{a} < 1$. The boundedness of the operator and its spectral structure are investigated. The results provide new insights into the properties of CesГґro-type operators in rearrangement invariant spaces and their potential applications. This research is a joint work with Kanat Tulenov.

Gibbs Measure For Mixed Spins And Mixed Types Model

Rahmatullaev M. M.[1], Tukhtabaev A. M.[2]

Institute of Mathematics, Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan;
mrahmatullaev@rambler.ru
Namangan state technical university, Namangan, Uzbekistan;
akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru

We consider present paper the Ising-Potts model on a Cayley tree. We find the functional equation which guarantees existence of limiting Gibbs measure.

The Ising-Potts model is applicable to a diverse array of complex systems, encompassing multicomponent alloys, disordered magnetic structures such as spin glasses, magnetic systems exhibiting phase coexistence, biological networks, neural architectures, and socio-dynamic models.

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be a Cayley tree of order k [1] and $\Phi = \{-1, 1\}$, $\Psi = \{1, 2, ..., q\}$ $(q \geq 3)$. A configuration (σ, s) on $A \subset V$ is then defined as a function $x \in A \mapsto (\sigma(x), s(x)) \in \Phi \times \Psi$. The set of all configurations on A is denoted by $\Omega_A = (\Phi \times \Psi)^A$. One can see that $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$. Using this, for given configurations $(\sigma_{n-1}, s_{n-1}) \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $(\sigma_{[n]}, s_{[n]}) \in \Omega_{W_n}$ we define their concatenations by

$$((\sigma_{n-1}, s_{n-1}) \vee (\sigma_{[n]}, s_{[n]}))(x) = \begin{cases} (\sigma_{n-1}, s_{n-1})(x), & \text{if } x \in V_{n-1}, \\ (\sigma_{[n]}, s_{[n]})(x), & \text{if } x \in W_n. \end{cases} \tag{1}$$

where $(\sigma, s)(x) := (\sigma(x), s(x))$. It is clear that $(\sigma_{n-1}, s_{n-1}) \vee (\sigma_{[n]}, s_{[n]}) \in \Omega_{V_n}$.

The Hamiltonian of the Ising-Potts model is given by

$$H_n(\sigma_n, s_n) = -\alpha \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} J^{(I)}_{x,y}\sigma(x)\sigma(y) - (1-\alpha) \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} J^{(P)}_{x,y}\delta_{s(x)s(y)}, \tag{2}$$

where $\sigma \in \Phi$, $s \in \Psi$, $\alpha \in [0,1]$. Note that in [2], the homogeneous Ising-Potts model was studied, however, the hamiltonian is different from (2).

Let us consider a probability measure μ_n on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_n(\sigma_n, s_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n, s_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),s(x),x}\right\}, \tag{3}$$

where $\beta = \frac{1}{T}, T > 0$- temperature, $\mathbf{h}_x = \{(h_{-1,1,x}, ..., h_{-1,q,x}, h_{1,1,x}, ..., h_{1,q,x}) \in \mathbb{R}^{2q}, x \in V\}$ is a collection of vectors, Z_n^{-1} is the normalizing factor.

A probability distribution μ_n is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $(\sigma_{n-1}, s_{n-1}) \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{(\sigma_{[n]},s_{[n]})\in\Omega_{W_n}} \mu_n((\sigma_{n-1}, s_{n-1}) \vee (\sigma_{[n]}, s_{[n]})) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}, s_{n-1}). \tag{4}$$

By the Kolmogorov theorem, there exists a unique measure μ on the set Ω_V such that, for all n and $(\sigma_n, s_n) \in \Omega_{V_n}$,

$$\mu\left(\{(\sigma, s)|_{V_n} = (\sigma_n, s_n)\}\right) = \mu_n(\sigma_n, s_n).$$

Theorem. The measures $\mu_n(\sigma_n, s_n), n = 1, 2, ...,$ satisfy the compatibility condition (4) if and only if for any $x \in V$ the following equation holds:
If $(i,j) \neq (-1,q)$ then

$$z_{i,j,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\sum\limits_{v=1}^{q}\left((\theta^{(I)}_{x,y})^{\alpha i} z_{1,v,y} + (\theta^{(I)}_{x,y})^{-\alpha i} z_{-1,v,y}\right) + \left((\theta^{(P)}_{x,y})^{1-\alpha} - 1\right)\left((\theta^{(I)}_{x,y})^{\alpha i} z_{1,j,y} + (\theta^{(I)}_{x,y})^{-\alpha i} z_{-1,j,y}\right)}{\sum\limits_{v=1}^{q}\left((\theta^{(I)}_{x,y})^{-\alpha} z_{1,v,y} + (\theta^{(I)}_{x,y})^{\alpha} z_{-1,v,y}\right) + \left((\theta^{(P)}_{x,y})^{1-\alpha} - 1\right)\left((\theta^{(I)}_{x,y})^{-\alpha} z_{1,q,y} + (\theta^{(I)}_{x,y})^{\alpha}\right)}, \tag{5}$$

If $(i,j) = (-1,q)$ then $z_{-1,q,x} = 1$,
where $\theta^{(I)}_{x,y} = \exp\{\beta J^{(I)}_{x,y}\}$, $\theta^{(P)}_{x,y} = \exp\{\beta J^{(P)}_{x,y}\}$, $z_{i,j,x} = \exp\{h_{i,j,x} - h_{-1,q,y}\}$, $i = -1, 1, j = 1, 2, ..., q$.

References

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ., Singapore, 2013.

2. Haydarov F.H., Omirov B.A., Rozikov U.A. Coupled Ising-Potts model: rich sets of critical temperatures and translation-invariant Gibbs measures // arXiv:2502.12014v1 [math.FA]. 2025.

Configurations For Limiting Gibbs Measures Of The Potts-Sos Model

Rahmatullaev M. M.[1,2], **Rasulova M. M.** [1]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
mrahmatullaev@rambler.ru
m_rasulova_a@rambler.ru

We consider the three-state Potts-SOS model on a Cayley tree of order two. A classification of all translation-invariant splitting Gibbs measures (TISGMs) for this model on the Cayley tree of order two is provided in [2]. The main aim of this work is to identify a set of boundary conditions such that the limiting Gibbs measures corresponding to these conditions match the TISGMs.

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be the Cayley tree of order k. Denote by V the set of vertices and by L the set of edges of the tree. Two points $t, s \in V,\ (t \neq s)$ are called *neighbors* if there is an edge connecting them. In this case, for the pair $\{s, t\}$, we denote it as $\langle s, t\rangle$. We can choose an arbitrary vertex of the tree as a root, denoted by 0. If $t \neq s$ and the path connecting 0 to t passes through s, we write $s \to t$. If $s \to t$ and s, t are neighbors, then t is called a *direct successor* of s, and we write $s \to_1 t$. The set

$$\partial A = \{t \in V \backslash A; \text{there exists a neighbour of } t \text{ in } A\}$$

is the boundary of $A \subset V$.

For every $A \subset V$, let $\Omega_A = \{0, 1, \ldots, m\}^A$ be the set of all spin configurations on A. For simplicity of notation, we write Ω instead of Ω_V.

For every $A \subset V$, the σ-algebra B_A is defined by the σ-algebra generated by $\{X_t, t \in A\}$, here $X_t(\sigma) = \sigma(t)$, $\forall t \in A, \sigma \in \Omega_A$. Let A be a finite subset of V, $\omega \in \Omega$ and $\sigma \in \Omega_A$. The Potts-SOS interaction energy on A given the inner configuration σ and boundary condition ω is defined by

$$H_A^\omega(\sigma) = -\sum_{t,s\in A:\langle t,s\rangle} \Big[J_p\delta_{\sigma(t)\sigma(s)} + J_s \mid \sigma(t) - \sigma(s) \mid \Big]$$
$$-\sum_{t\in A, s\in\partial A:\langle t,s\rangle} \Big[J_p\delta_{\sigma(t)\omega(s)} + J_s \mid \sigma(t) - \omega(s) \mid \Big],$$

where $J = (J_p, J_s) \in R^2$ is a pair of coupling constants and δ is the Kronecker delta.

A finite Gibbs measure P_A^ω on Ω_A corresponding to H_A^ω is defined by

$$P_A^\omega(\sigma) = [Z_A^\omega]^{-1} \exp[-\beta H_A^\omega(\sigma)],\ \sigma \in \Omega_A,$$

where $Z_A^\omega = \sum_{\tilde{\sigma}\in\Omega_A} \exp[-\beta H_A^\omega(\tilde{\sigma})]$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ is the temperature.

Definition. *For fixed J and T if there is an increasing sequence of finite subsets $\{V_n\}$ such that $V_n \nearrow V$ as $n \to \infty$ and $P^\omega = w - \lim_{n\to\infty} P_{V_n}^\omega$ (the weak convergence of measures) exists for suitable fixed $\omega \in \Omega$, then P^ω is called a limiting Gibbs measure with boundary condition ω for J at T* (see [1] for more details).

We denote the TISGMs found in [2] for the cases $k = m = 2$ and $r = \theta^2$ by $\mu_i,\ i = 1, 2, 3$, respectively.

We denote the following sets:

$$\mathbb{B}_0 = \{\omega \in \Omega : c_i^0(\omega) = c_i^2(\omega), i = 1, 2\},\ \mathbb{B}_1^+ = \{\omega \in \mathbb{B}_0 : S > h_1^{(2)}(\theta)\},$$
$$\mathbb{B}_1^0 = \{\omega \in \mathbb{B}_0 : S = h_1^{(2)}(\theta)\},\ \mathbb{B}_1^- = \{\omega \in \mathbb{B}_0 : S < h_1^{(2)}(\theta)\},$$

where

$$c_1^l(\omega) = \sum_{s:t\to_1 s} \delta_{l\omega(s)} \text{ and } c_2^l(\omega) = \sum_{s:t\to_1 s} \mid l - \omega(s) \mid,\ l = 0, 1, 2,$$
$$S = S(\omega, J_p, J_s) := J_p(c_1^1(\omega) - c_1^2(\omega)) + J_s(c_2^1(\omega) - c_2^2(\omega)),$$
$$h_1^{(2)}(\theta) = 2\ln\frac{-L^2 + 4(3\theta - \theta^2) + 4L\theta - i\sqrt{3}(L^2 + 4(3\theta - \theta^2))}{12L},$$
$$L = \sqrt[3]{8\theta^3 - 36\theta^2 + 216 + 12\sqrt{-3\theta^4 + 36\theta^3 - 108\theta^2 + 324}}.$$

We obtain the following main result.

Theorem. *Let $k = m = 2$ and $r = \theta^2$. Then we have*
(i) if $\theta_1 < \theta < \theta_c$ and $\omega \in \mathbb{B}_0$, then $P^\omega = \mu_1(\theta)$;
(ii) if $\theta = \theta_c$, then

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_1(\theta), \text{ if } \omega \in \mathbb{B}_1^+, \\ \mu_2(\theta), \text{ if } \omega \in \mathbb{B}_1^0 \cup \mathbb{B}_1^-; \end{cases}$$

(iii) if $\theta > \theta_c$, then

$$P^\omega = \begin{cases} \mu_1(\theta), \text{ if } \omega \in \mathbb{B}_1^+, \\ \mu_2(\theta), \text{ if } \omega \in \mathbb{B}_1^0, \\ \mu_3(\theta), \text{ if } \omega \in \mathbb{B}_1^-, \end{cases}$$

where $r = \exp(J_p\beta),\ \theta = \exp(J_s\beta)$, $\theta_1 = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 6\sqrt{3}} - 1$ and $\theta_c \approx 7.404$.

Literature

1. Rozikov U.A. Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model. Singapore: World Scientific, 2023.

2. Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A. Extremality of translation-invariant Gibbs measures for the Potts-SOS model on the Cayley tree //Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2021. №7. P. 1–18.

$G_3^{(2)}$-Periodic Ground States For The Chui-Weeks Model

Rasulova M. M. [1], **Hakimova M. A.**[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[2]Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
m_rasulova_a@rambler.ru
hakimovamuslimaxon@gmail.com

We consider the Chui-Weeks model on a third-order Cayley tree and describe all translation-invariant and $G_3^{(2)}$-periodic ground states for this model.

The Cayley tree Γ^k (see, e.g., [1,2]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree. It is known (see [2]) that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

We consider model where the spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$. For $A \subseteq V$ a spin *configuration* σ_A on A is defined as a function $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations coincides with $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

Definition 1. *A configuration $\sigma \in \Omega$ is called G_k^* -periodic, if $\sigma(yx) = \sigma(x)$ for any $x \in G_k$ and $y \in G_k^* \subset G_k$.*

For a given periodic configuration the index of the subgroup is called the *period of the configuration.*

Definition 2. *A configuration that is invariant with respect to all shifts is called translation-invariant.*

The Chui-Weeks model (see [3]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{\sigma(x),0}, \tag{1}$$

where $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α is an external field and $\sigma \in \Omega$.

Let M be the set of all unit balls with vertices in V and $S_1(x)$ be the set of all nearest neighboring vertices of $x \in V$. We denote the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ by σ_b. The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{J}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} \mid \sigma(x) - \sigma(c_b) \mid + \frac{\alpha}{k+2} \sum_{x \in b} \delta_{\sigma(x),0}.$$

where $J = (J, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ and c_b is the center of the unit ball b.

We have the following lemma.

Lemma. *Let $k = 3$. Then for each configuration φ_b, we have the following*

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i = 1, 2, ..., 28\},$$

where

$$U_1 = 0; U_2 = \alpha; U_3 = \frac{J}{2}; U_4 = \frac{J}{2} + \frac{\alpha}{5}; U_5 = \frac{J}{2} + \frac{4\alpha}{5}; U_6 = J; U_7 = J + \frac{\alpha}{5};$$

$$U_8 = J + \frac{2\alpha}{5}; U_9 = J + \frac{3\alpha}{5}; U_{10} = J + \frac{4\alpha}{5}; U_{11} = \frac{3J}{2}; U_{12} = \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{5}; U_{13} = \frac{3J}{2} + \frac{2\alpha}{5};$$

$$U_{14}=\frac{3J}{2}+\frac{3\alpha}{5};U_{15}=2J;U_{16}=2J+\frac{\alpha}{5};U_{17}=2J+\frac{2\alpha}{5};U_{18}=2J+\frac{3\alpha}{5};$$
$$U_{19}=2J+\frac{4\alpha}{5};U_{20}=\frac{5J}{2}+\frac{\alpha}{5};U_{21}=\frac{5J}{2}+\frac{2\alpha}{5};U_{22}=3J+\frac{\alpha}{5};U_{23}=3J+\frac{2\alpha}{5};$$
$$U_{24}=3J+\frac{3\alpha}{5};U_{25}=\frac{7J}{2}+\frac{\alpha}{5};U_{26}=\frac{7J}{2}+\frac{3\alpha}{5};U_{27}=4J+\frac{\alpha}{5};U_{28}=4J+\frac{4\alpha}{5}.$$

Definition 3. *A configuration φ is called a ground state for the Hamiltonian (1), if*

$$U(\varphi_b)=\min\{U_i : i=1,2,...,28\}$$

for any $b\in M$.

In this work we study the ground states with $(J,\alpha)\neq(0,0)$.

The following theorem describes all translation-invariant ground states for the three-state Chui-Weeks model on the Cayley tree of order three.

Theorem 1. *Let $k=3$. Then for the Chui-Weeks model the following assertions hold*
i) the configurations $\sigma(x)=1\ \forall x\in V$ and $\sigma(x)=2\ \forall x\in V$ are translation-invariant ground states iff $(J,\alpha)\in\{(J,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : J\geq 0,\ \alpha\geq 0\}$;
ii) the configuration $\sigma(x)=0\ \forall x\in V$ is the translation-invariant ground state iff $(J,\alpha)\in\{(J,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : 20J\geq\alpha,\ \alpha\leq 0\}$;
iii) if $(J,\alpha)\in\{(J,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : J\leq 0,\alpha\geq 20J\}$, then there is no translation-invariant ground state.

The following theorem describes all $G_3^{(2)}$-periodic ground states for the three-state Chui-Weeks model, where $G_3^{(2)}=\{x\in G_3 :|\ x\ |\ \text{ is even}\}$, where $|\ x\ |$ means length of the word x.

Theorem 2. *Let $k=3$. Then for the Chui-Weeks model the following assertions hold*
i) the $G_3^{(2)}$-periodic configurations

$$\sigma(x)=\begin{cases}1,\ \textit{if}\ x\in G_3^{(2)},\\ 2,\ \textit{if}\ x\in G_3\setminus G_3^{(2)},\end{cases}\qquad \sigma(x)=\begin{cases}2,\ \textit{if}\ x\in G_3^{(2)},\\ 1,\ \textit{if}\ x\in G_3\setminus G_3^{(2)}\end{cases}$$

are $G_3^{(2)}$-periodic ground states iff $(J,\alpha)\in\{(J,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : -\alpha\leq 10J\leq 0\}$;
ii) the $G_3^{(2)}$-periodic configurations

$$\sigma(x)=\begin{cases}0,\ \textit{if}\ x\in G_3^{(2)},\\ 2,\ \textit{if}\ x\in G_3\setminus G_3^{(2)},\end{cases}\qquad \sigma(x)=\begin{cases}2,\ \textit{if}\ x\in G_3^{(2)},\\ 0,\ \textit{if}\ x\in G_3\setminus G_3^{(2)}\end{cases}$$

are $G_3^{(2)}$-periodic ground states iff $(J,\alpha)\in\{(J,\alpha)\in\mathbb{R}^2 : J\leq 0,\alpha=0\}$.

Literature

1. Rozikov U.A. Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model. Singapore: World Scientific, 2023.

2. Ganikhodzhaev N. N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree //Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan. 1994. Issue 4. P.3–5.

3. Cuesta J. A., Sanchez A. General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions //Journal of Statistical Physics. 2004. Vol. 115. P. 869–893.

Invariant Set for Operator Modeling Phytoplankton-Zooplankton Interactions

Shoyimardonov S. K.[1], **Sadullayeva S. G'.** [2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; shoyimardonov@inbox.ru National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan; ssadullaeva460@gmail.com

In [1], the following continuous-time phytoplankton-zooplankton model is considered:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = bP(1-\dfrac{P}{k}) - \alpha f(P)Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = \beta f(P)Z - rZ - \theta g(P)Z, \end{cases} \tag{1}$$

where

- $P-$ the density of the phytoplankton population;
- $Z-$ the density of the zooplankton population;
- $\alpha > 0$ and $\beta > 0-$ predation and conversion rates of zooplankton on the phytoplankton population, respectively;
- $b > 0-$ the growth rate of the phytoplankton;
- $k > 0-$ the carrying capacity of the phytoplankton;
- $r > 0-$ the death rate of the zooplankton;
- $f(P)-$ the predator functional response;
- $g(P)-$ the distribution of toxic substances;
- $\theta > 0-$ the rate of toxin liberation by the phytoplankton population.

Let's consider the model (1) by choosing $f(P) = g(P) = P$ and simplifying it as follows:

$$\overline{t} = bt, \overline{x} = \frac{P}{k}, \overline{y} = \frac{\alpha Z}{b}, \overline{\beta} = \frac{\beta k}{b}, \overline{r} = \frac{r}{b}, \overline{\theta} = \frac{\theta k}{b}.$$

Then, by dropping the overline sign at time $t \geq 0$, we get the simplified system:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - xy \\ \dot{y} = (\beta - \theta)xy - ry \end{cases} \tag{2}$$

Let's denote $\gamma = \beta - \theta$ and consider the discrete-time version of the model (2), which has the following form:

$$V : \begin{cases} x^{(1)} = x(2-x) - xy \\ y^{(1)} = \gamma xy + (1-r)y. \end{cases} \tag{3}$$

Denote

$$S_1 = \left\{(x,y) \in R_+^2 : 0 < x \le 3 - 2\sqrt{2}, \quad \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \le y \le \frac{(1+\sqrt{x})^2}{2}\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x,y) \in R_+^2 : 3 - 2\sqrt{2} < x < 1, \quad x < y \le \frac{(1+\sqrt{x})^2}{2}\right\}$$

and $S = S_1 \cup S_2$ be the set represented in Fig. 1.

Proposition. Let $0 < r \le 1$. If $0 < \gamma \le r$ or $(r,\gamma) \in S$ then the following set

$$\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 - x\}$$

is an invariant w.r.t operator (3).

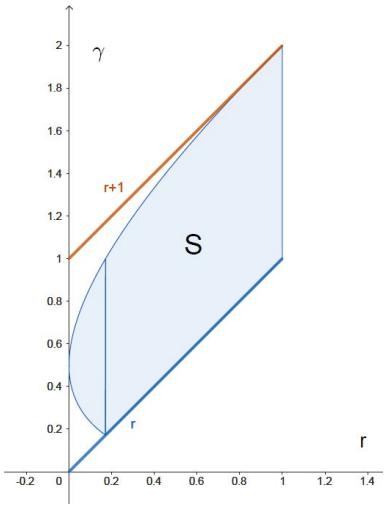


Рис. 1: The set S

Literature

1. Chattopadhayay J., Sarkar R., Mandal S. Toxin-producing plankton may act as a biological control for planktonic blooms-Field study and mathematical modelling //Journal of Theoretical Biology. 2002. 215(3). P. 333–344.

2. Shoyimardonov S. Neimark-Sacker bifurcation and stability analysis in a discrete phytoplankton-zooplankton system with Holling type II functional response //Journal of Applied Analysis and Computation. 2023. 13(4). P. 2048–2064.

A Quadratic Stochastic Operator On 5-Dimensional Simplex

Rozikov U.A., Solaeva M.N.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, Universitet str., 100174, Tashkent, Uzbekistan; rozikovu@yandex.ru;
University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan; m.solayeva@uwed.uz

We consider a quadratic stochastic operator (QSO) (depending on two parameters) that maps the 5-dimensional simplex onto itself. Currently, only a few QSOs have a complete description of their trajectories (limit points) (see [1]-[3]). However, we have managed to fully describe the set of all limit points for our two-parameter QSO.

It is well known that a QSO mapping, simplex to itself, appears as an evolution operator in population dynamics (see [2], which presents algebraic, probabilistic and analytic theory of QSOs.)

Very recently, in [3] a new class of QSOs is considered and for such QSOs the behavior of trajectories is completely studied.

Here we enlarge this class of QSOs and fully describe the set of all limit points of trajectories. Namely, consider 5-dimensional simplex S^5 and operator $W : S^5 \to S^5$ defined by

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_6 + a(x_2x_5 - x_1x_6) + b(x_4x_5 - x_3x_6) \\ x'_2 = x_5 - a(x_2x_5 - x_1x_6) - b(x_4x_5 - x_3x_6) \\ x'_3 = x_4 + a(x_2x_3 - x_1x_4) + b(x_6x_3 - x_5x_4) \\ x'_4 = x_3 - a(x_2x_3 - x_1x_4) - b(x_6x_3 - x_5x_4) \\ x'_5 = x_2 + a(x_4x_1 - x_3x_2) + b(x_6x_1 - x_5x_2) \\ x'_6 = x_1 - a(x_4x_1 - x_3x_2) - b(x_6x_1 - x_5x_2) \end{cases}$$

Here $x_i \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$ and $a, b \in [0, 1]$ are parameters.

Our main problem is to study the sequence $\{x^{(n)} = W(x^{(n-1)})\}_{n=1}^{\infty}$ for each initial point $x^{(0)} \in S^5$.

Fixed points. An element $t = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in S^5$ is a fixed point for W, iff $W(t) = t$. The set of all fixed points is denoted by $\mathrm{Fix}(W)$.

Operator W has the following set of fixed points

$$\mathrm{Fix}(W) = \left\{ \frac{1}{2}(c, c, 1-2c, 1-2c, c, c) : c \in [0, 1/2] \right\}.$$

Invariant sets. A set $M \subset S^5$ is called invariant if $W(M) \subset M$.

For any $c \in [0, 1/2]$, the following set is invariant with respect to W:

$$M_c = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in S^5 : x_1 + x_2 = c, x_3 + x_4 = 1 - 2c, x_5 + x_6 = c\}.$$

Moreover, the following sets are invariant with respect to W^2:

$$M_{<,c} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in S^5 : x_1 + x_2 < c, x_3 + x_4 = 1 - 2c, x_5 + x_6 > c\}$$

and

$$M_{>,c} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in S^5 : x_1 + x_2 > c, x_3 + x_4 = 1 - 2c, x_5 + x_6 < c\}$$

i.e., $W(M_{<,c}) \subset M_{>,c}$ and $W(M_{>,c}) \subset M_{<,c}$. Since for any $c \in [0, 1/2]$ we have that M_c and $M_{<,c} \cup M_{>,c}$ are invariant with respect to operator W^2, and

$$S^5 = \bigcup_{c\in[0,1/2]} (M_c \cup M_{<,c} \cup M_{>,c})$$

we can study trajectories of the system on each these sets separately.

Behavior of trajectories. Our main result the following

Theorem. For any initial point $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0)$, with $x_1^0 + x_2^0 = x_5^0 + x_6^0 = c$ its trajectory under operator W has the following limits:

$$\lim_{n\to\infty} W^{2n}(x^{(0)}) = \left(b_1, c - b_1, \frac{b_1(1-2c)}{c}, \frac{(1-2c)(c-b_1)}{c}, b_1, c - b_1\right)$$

and

$$\lim_{n\to\infty} W^{2n+1}(x^{(0)}) = \left(c - b_1, b_1, \frac{(1-2c)(c-b_1)}{c}, \frac{b_1(1-2c)}{c}, c - b_1, b_1\right),$$

where

$$b_1 \equiv b_1(x_1^0, x_3^0, x_5^0) = c\left(\frac{ab - a - b - c(ab - b^2)}{(a-b)^2c + ab - a - b}x_1^0 + x_3^0 + \frac{ac(a-b) + ab - a - b}{(a-b)^2c + ab - a - b}x_5^0\right).$$

Literature

1. W.J. Ewens, *Mathematical population genetics*. Mathematical biology, Springer, 2004.

2. U.A. Rozikov, *Population dynamics: algebraic and probabilistic approach*. World Sci. Publ. Singapore. 2020, 460 pp.

3. U.A. Rozikov, M.N. Solaeva, Behavior of trajectories of a quadratic operator splitted to uncountable linear operators. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2023, Vol. 44, №. 7, p. 2910-2915.

$L^p - L^q$ Fourier Multipliers On Non-Commutative Torus And Its Applications

Tastankul R. A., Tulenov K. S.

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan;
ramazan.tastankul@mail.ru

In this talk,we present a short and a simple proof of $L^p - L^q$ boundedness of Fourier multipliers on noncommutative torus [1-2]:

$$\widehat{T_\varphi f}(m) = \varphi_m \widehat{f}(m), \forall m \in \mathbb{Z}^d.$$

We also obtain the Paley type inequality with the same approach. As applications of these results, we obtain local well-posedness in time of nonlinear partial differential equations in the noncommutative torus. It is joint work with K. S. Tulenov.

References

1. Z. Chen, Q. Xu and Z. Yin, *Harmonic Analysis on Quantum Tori.*, Commun. Math. Phys., 322 (2013), 755-805.

2. M. Ruzhansky, S. Shaimardan and K. Tulenov, *HГurmander type Fourier multiplier theorem and Nikolskii inequality on quantum tori, and applications.* arXiv:2402.17353 [math.FA], (2024), 45p.

Weighted Norm Inequalities For Matrix Operators With $1 < q < p < \infty$

Oinarov R.[1], **Temirkhanova A. M.**[1]

[1] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan;
o_ryskul@mail.ru
ainura-t@yandex.kz

Let $1 < p, q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be sequences of positive numbers, which will be called the weighted sequences. Let l_{pv} be the space of all sequences $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ of real numbers such that $\|f\|_{pv} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$. We consider the weighted estimate

$$\|A^{\pm} f\|_{qu} \le \|A^{\pm}\|_{pv \to qu} \|f\|_{pv}, \quad \forall f \in l_{pv}, \tag{1}$$

for the matrix operators

$$\left(A^{+} f\right)_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} f_j, \ i \in \mathbb{N},$$

$$\left(A^{-} f\right)_j = \sum_{i=j}^{\infty} a_{ij} f_i, \ j \in \mathbb{N},$$

where $a_{ij} \ge 0$, $i \ge j \ge 1$. Note the validity of inequality (1) that the validity of inequality (1) is equivalent to the boundedness of matrix operators (2) and (3) from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$.

In the paper [1], the wide classes O_n^+ and $O_n^-, n \ge 0$, of matrices were introduced. These classes are defined by conditions on a matrix $(a_{i,j})$ that are weaker than the conditions are defined before in [2]–[5]. The criteria for the boundedness of operators (2) and (3) for $1 < p \le q < \infty$ were obtained, where the matrices belong to the class $O_n^+ \bigcup O_n^-$, $n \ge 1$. Moreover, according to [1], these classes form extension systems $O_0^{\pm} \subset O_1^{\pm} \subset ... \subset O_n^{\pm} \subset ...$, and it was shown that the system of classes $O_n^{\pm}, n \ge 0$ is closed with respect to iteration, i.e., the iteration matrix of operators (2) and (3) from classes $O_n^{\pm}$ and $O_m^{\pm}$ belongs to the class $O_{n+m+1}^{\pm}$. This property makes it possible to study various problems that involve iterations of matrix operators, in particular, the problem of weighted estimates for quasilinear operators with iteration of operators (2) and (3).

The problem of boundedness of operators (2) and (3) with matrices from the classes O_n^+ and $O_n^-, n > 1$, has not been proved for the case $1 < q < p < \infty$.

In the present work, we consider the case $1 < q < p < \infty$ and find the criteria for the boundedness of operators (2) and (3) from $l_{p,v}$ into $l_{q,u}$, when their matrices belong to the classes $O_n^{\pm}$ for any $n \ge 2$.

References

1. Oinarov R., Taspaganbetova Z. Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators // Journal of Inequalities and Applications. 2012. №. 53. P. 1–18.

2. Oinarov R., Persson L-E. and Temirkhanova A. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leq q$ // Math Inequal.Appl. 2009. Vol. 12, №. 4. P. 891–903.

3. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Boundedness and compactness criteriaof a certain class of matrixoperators // Mathematical J. Almaty 2011. Vol. 11, №. 2. P. 73–85.

4. Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A. Criteria of boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Ann. Funct. Anal. 2011. Vol. 1. P. 114–127.

5. Temirkhanova A. Weighted inequality for one class of matrix operators for $1 < q < p < \infty$ // Eurasian Math. J. 2008. Vol. 2. P. 117–127 (in Russian).

Fixed Points And Their Stability In Mosquito Evolution Models

Tukhtasinova N. A.[1], **Boxonov Z. S.**[2]

University of exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan;
toxtasinovanargizaxon786@gmail.com
V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
z.b.x.k@mail.ru

Consider a wild mosquito population without the presence of sterile mosquitoes. For the simplified stage-structured mosquito population, we group the three aquatic stages into the larvae class by $x \geq 0$, and divide the mosquito population into the larvae class and the adults, denoted by $y \geq 0$. We assume than the density dependence exists only in the larvae stage [1].

We let the birth rate, that is, the oviposition rate of adults be B; the rate of emergence from larvae to adults be a function of the larvae with the form of $\alpha(1 - k(x))$, where $\alpha > 0$ is the maximum emergence rate, $0 \leq k(x) \leq 1$, with $k(0) = 0, k'(x) > 0$, and $\lim\limits_{x\to\infty} k(x) = 1$, is the functional response due to the interspecific competition. We further assume a functional response for $k(x)$, as in [1], in the form $k(x) = \frac{x}{1+x}$. We let the death rate of larvae be a linear function, denoted by $d_0 + d_1 x$, and the death rate of adults be constant, denoted by μ.

In the case where adult mosquitoes have difficulty in finding their mates, Allee effects are included and the adult birth rate is given by $B = \frac{\beta y}{\gamma+y}$, where γ is the Allee effect constant [2].

The discrete time dynamics of the model for $\gamma = 0$ was fully studied in [2]-[5]. Here we assume $\gamma > 0$ then the evolution of this population is given by the operator:

$$W : \begin{cases} x' = \frac{\beta y^2}{\gamma+y} - \frac{\alpha x}{1+x} - (d_0 + d_1 x)x + x, \\ y' = \frac{\alpha x}{1+x} - \mu y + y, \end{cases} \tag{1}$$

In the system (1) x', y' means the next state relative to the initial state x, y respectively.

Let

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

It is easy to see that if

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ 0 < \mu \leq 1,\ d_0 > 0,\ \alpha + d_0 \leq 1,\ d_1 = 0. \tag{2}$$

then the operator (1) maps the set $\mathbb{R}^2_+$ to itself.

A point $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2_+$ is called a fixed point of W if $W(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$.

Let $DW(\mathbf{z}^*) = (\partial W_i/\partial z_j)^2_{i,j=1}(\mathbf{z}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{z}^*$.

Definition 1. *A fixed point $\mathbf{z}^*$ of the operator W is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{z}^*)$ at $\mathbf{z}^*$ has no eigenvalues on the unit circle.*

Definition 2. *A hyperbolic fixed point $\mathbf{z}^*$ is called:*

i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{z}^*)$ are less than 1 in absolute value;

ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $DW(\mathbf{z}^*)$ are greater than 1 in absolute value;

iii) a saddle otherwise.

The following theorem describes the local dynamics of the operator W.

Theorem 1. *The following statements are true for the operator W (defined by (1)):*

i) if $\beta < \nu$, then the operator W has unique fixed point $(0,0)$ which is attracting;

ii) if $\beta = \nu$, then the operator W has two fixed points $(0,0)$, (x_1^*, y_1^*), and the point $(0,0)$ is attracting, the point (x_1^*, y_1^*) is non-hyperbolic (but (x_1^*, y_1^*) is semi-attracting);

iii) if $\beta > \nu$, then the operator W has three fixed points $(0,0)$, (x_2^*, y_2^*), (x_3^*, y_3^*), and the points $(0,0)$ and (x_3^*, y_3^*) are attracting, the point (x_2^*, y_2^*) is repelling;

where (x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*) and (x_3^*, y_3^*) are defined as follows:

$$x_1^* = \sqrt{\frac{\gamma\mu(\alpha + d_0)}{d_0(\alpha + \gamma\mu)}},$$

$$x_2^* = \frac{\alpha^2\beta - \mu(d_0\gamma\mu + (\alpha + d_0)(\alpha + \gamma\mu)) - \sqrt{D}}{2d_0\mu(\alpha + \gamma\mu)}$$

$$x_3^* = \frac{\alpha^2\beta - \mu(d_0\gamma\mu + (\alpha + d_0)(\alpha + \gamma\mu)) + \sqrt{D}}{2d_0\mu(\alpha + \gamma\mu)},$$

$$y_i^* = \frac{\alpha x_i^*}{\mu(1 + x_i^*)},\ i = 1, 2, 3,$$

$$D = \big(\mu(d_0\gamma\mu + (\alpha + d_0)(\alpha + \gamma\mu)) - \alpha^2\beta\big)^2 - 4d_0\gamma\mu^3(\alpha + d_0)(\alpha + \gamma\mu),$$

$$\nu = \frac{\mu}{\alpha^2}\left(\sqrt{d_0\gamma\mu} + \sqrt{(\alpha + d_0)(\alpha + \gamma\mu)}\right)^2.$$

Literature

1. Li J., Cai L., Li Y., Stage-structured wild and sterile mosquito population models and their dynamics // Jour.Bio.Dyn, 2017, 11(2), 79–101.768.

2. Boxonov Z.S., Rozikov U.A. A discrete-time dynamical system of stage-structured wild and sterile mosquito population // Nonl.stud., 2021, 28(2), p.413–425.

3. Boxonov Z.S., Rozikov U.A. Dynamical system of a mosquito population with distinct birth-death rates, // JAND, 2021, 10(4), p.807–816.

4. Boxonov Z.S., A discrete-time dynamical system of mosquito population // JDEA, 2023, 29(1), p.67–83.

5. Boxonov Z.S., Description of trajectories of an evolution operator generated by mosquito population // RJND, 2024, 20(2), pp. 197–207.

Metrizability Of m-Measurable Operators Of Affiliated Of Real W*-Algebra

Tukhtasinov T.T.

Fergana State University;
toxirjontoxtasinov13@gmail.com

Let A be an algebra and let $P(A)$ be the set of all projections of A. By subadditive measure on A we mean a mapping $m : P(A) \to [0, \infty]$ with the following properties:

i) $m(0) = 0$, and $m(p) = 0$ implies $p = 0$ (faithfulness);

ii) $p \leq q$ implies $m(p) \leq m(q)$ (monotonicity);

iii) $p \sim q$ implies $m(p) = m(q)$,

iv) $m(p \vee q) \leq m(p) + m(q)$ (subadditivity);

v) $p_n \uparrow p$ implies $m(p_n) \uparrow m(p)$.

The measure m is called *finite* if $m(1) < \infty$, where 1 is the unit of algebra A. Making use of the relation $p \vee q - q \sim p - p \wedge q$, it is not hard to notice that instead of (iv) one may assume

iv*) $m(p \vee q) = m(p + q) \leq m(p) + m(q)$ for $p \perp q$.

Now, let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H. A weakly closed *-subalgebra M containing the identity operator 1 in $B(H)$ is called a W*-*algebra*. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ with the identity 1 is called a *real W*-algebra*, if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$.

Theorem 1. Let $R \subset B(H)$ be a real W*-algebra and let m be subadditive measure on R. We extend the subadditive measure m at $A = R + iR$ as

$$\overline{m}(e) = m(s(f)),$$

where $e \in P(A)$ with $e = f + ig$ and $s(f)$ is the support of the element f.
Then $\overline{m} : P(A) \to [0, \infty]$ is the subadditive measure on A.

Definition 1. 1) An operator a acting in a Hilbert space H ($a : D(a) \to H$) is called *affiliated with the algebra* R (symbolically, $a \eta R$) if $au' = u'a$, for any unitary operator $u' \in R'$, where R' is commutant of R.

2) A linear subspace $D \subset H$ is called *affiliated with the algebra* R if $u'(D) \subset D$ for any unitary operator $u' \in R'$ and denoted by $D\eta R$.

3) A linear space $D\eta R$ is said to be *m-dense* in H if for any $\varepsilon > 0$ there exists a projection $p \in R$ such that $p(H) \subset D$ and $m(p^{\perp}) \leq \varepsilon$.

4) An operator a is called *m-measurable*, if (i) $a\eta R$; (ii) $D(a)$ is m-dense; (iii) a is closed.

By $L_m = L_m(R)$ we denote the set of all m-measurable (relative to algebra R) operators. Similarly, by $L_{\overline{m}} = L_{\overline{m}(A)}$ we denote the set of all $\overline{m}$-measurable (relative to algebra A) operators.

Theorem 2. If $R \subset B(H)$ is a real W*-algebra and $A = R + iR$ is its enveloping (complex) W*-algebra, then $L_{\overline{m}} = L_m + iL_m$.

We define the topology on the L_m by the following base of neighborhoods of zero

$$N_{\varepsilon,\delta}(m) = N_{\varepsilon,\delta} = \{a \in L_m : ||ae|| \leq \varepsilon,\ m(e^{\perp}) \leq \delta,\ e \in P(R)\}.$$

We denote this topology by τ_m.

On the other hand, if (X, τ) is the topological space and $F \subset X$, then the family $\tau_F = \{U \cap F : U \in \tau\}$ is the topology of subspace, and naturally the question arises: do these two topologies coincide? i.e. is it true $\tau_m = \tau_{L_m}$? The following theorem gives a confirming answer.

Theorem 3. Let R be a real W*-algebra and $\tau_{L_m} = \{U \cap L_m : U \in \tau_{\overline{m}}\}$. Then the topologies τ_m and τ_{L_m} coincide, i.e. $\tau_m = \tau_{L_m}$.

Definition 2. For any closed, densely defined operator $a\eta R$, we defin $\eta_{|a|}(\lambda) = m(e_{\lambda}^{\perp})$, and

$$a(\alpha) = inf\{\lambda \in [0, \infty] : m(e_{\lambda}^{\perp}) \leq \alpha,\ \alpha > 0\}$$

where $|a| = \int_0^{\infty} \lambda de_{\lambda}$. For $a \in L_m$ we put

$$\ell_r(a) = inf\{\varepsilon > 0 : m(e_{\varepsilon}^{\perp}) \leq \varepsilon\} = inf\{\varepsilon > 0 : a(\varepsilon) \leq \varepsilon\},$$
$$\ell(a) = inf\{\varepsilon > 0 : \overline{m}(e_{\varepsilon}^{\perp}) \leq \varepsilon\} = inf\{\varepsilon > 0 : a(\varepsilon) \leq \varepsilon\}.$$

It is easy to show that $\ell|_{L_m} = \ell_r$.

The main result of the article is the following theorem:

Theorem 4. The functional $\rho : L_m \times L_m \to [0, \infty)$ defined as

$$\rho(a, b) = \ell_r(a - b), \qquad a, b \in L_m$$

is a metric on L_m invariant with respect to the translation and $*$. The convergence in this metric is equivalent to m-convergence.

References

1. Ayupov Sh.A. , Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluw.Acad.Pub.,MAIA. 418, 1997.

2. Leszek J.Ciach. Subadditive measure on projectors of a von Neumann algebra. Mathematical dissertation. Institute of mathematics Polish Academy of Sciences Warszawa, Poland, 72p. 1990.

Discrete-Time Dynamics Of An Epidemic Sir Model

Jamilov U. U.[1], **Tursunov O. E.**[2]

[1] V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
jamilovu@yandex.ru

[2] University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
otabektursunov915@gmail.com

One of basic models of epidemic diseases without lifetime immunity is known as the susceptible-infected-recovered (SIR) model [1], [2]. In this model, the total population of N individuals exposed to an epidemic disease at each time instant t is divided into three groups (each represented by a compartment): the susceptible group fraction denoted by $s(t)$, the infected group fraction denoted by $i(t)$, and the recovered group fraction denoted by $r(t)$ (the compartment variables are in fact the fraction of each group's population divided by N). Accordingly, the system is closed and we have $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

A model for the propagation of the disease is equivalent to the following differential equations:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\alpha s(t)i(t) + \gamma r(t), \qquad \frac{di(t)}{dt} = \alpha s(t)i(t) - \beta i(t), \qquad \frac{dr(t)}{dt} = \beta i(t) - \gamma r(t). \quad (1)$$

Accordingly, moving from the susceptible group to the infected group takes place at a rate that is proportional to the population of the infected and susceptible groups, with parameter α. At the same time, infected individuals are assumed to recover at a constant rate of β. Finally, considering that the disease is not assumed to result in lifetime immunity of the subjects, the recovered individuals again return to the susceptible group at a fixed rate of γ. Note that if $\gamma = 0$ then the model (1) coincides with the well-known SIR model of Kermack and McKendrick. A fatal version of the SIR model with rates of birth μ^* and with different death rates from the susceptible μ_s, infected μ_i and recovered μ_r groups defined by

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\alpha s(t)i(t) + \gamma r(t) - \mu_s s(t) + \mu^*, \\ \frac{di(t)}{dt} &= \alpha s(t)i(t) - \beta i(t) - \mu_i i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} &= \beta i(t) - \gamma r(t) - \mu_r r(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Note that the system (2) is no longer closed and we consider the case when $\mu^* = \mu_s = \mu_i = \mu_r = \mu$. Then the discrete version of (2) has the following form

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \alpha s_n i_n + \gamma r_n - \mu s_n + \mu, \\ i_{n+1} = (1-\beta) i_n + \alpha s_n i_n - \mu i_n, \\ r_{n+1} = (1-\gamma) r_n + \beta i_n - \mu r_n, \end{cases}$$

where n is a non-negative integer number.

Consider a map $V : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \to \mathbf{x}' = V(\mathbf{x}) = (x_1', x_2', x_3')$ defined by

$$V : \begin{cases} x_1' = (1-\mu)x_1 - \alpha x_1 x_2 + \gamma x_3 + \mu, \\ x_2' = (1-\beta-\mu)x_2 + \alpha x_1 x_2, \\ x_3' = (1-\gamma-\mu)x_3 + \beta x_2, \end{cases} \quad (3)$$

where $x_1' = s_1$, $x_2' = i_1$, $x_3' = r_1$, $x_1 = s_0$, $x_2 = i_0$, $x_3 = r_0$.

Then the dynamical system can be written as $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right),\ n \geq 0$. We are interested in investigating the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}^n$, for any initial condition $\mathbf{x}^{(0)} \in R^3_+$.

Let $S^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ be the 2-dimensional simplex and $\Gamma_\tau := \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, \quad i \notin \tau \subset \{1, 2, 3\}\}$ be a face of the simplex S^2. Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ and $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertices of the simplex S^2

Theorem. For the operator (3) the following assertions hold:

i) The operator (3) maps S^2 to itself if and only if

$$\mu, \beta, \mu + \beta \in [0, 1], \quad -\mu \leq \gamma \leq 1 - \mu, \quad \beta + \mu - 1 \leq \alpha \leq 1 + \mu;$$

ii)

$$\mathrm{Fix}\,(V) = \begin{cases} S^2, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = \mu = 0, \\ \{\mathbf{e}_1\}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \mu \neq 0 \ \text{ or } \ \alpha = 0, \beta\gamma\mu \neq 0, \\ \Gamma_{\{1,2\}}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \mu = 0, \gamma \neq 0, \\ \Gamma_{\{1,3\}}, & \text{if} \quad \alpha = \gamma = \mu = 0, \beta \neq 0 \ \text{ or } \ \gamma = \mu = 0, \alpha\beta \neq 0, \\ \Gamma_{\{1,3\}} \cup \Gamma_{\{2,3\}}, & \text{if} \quad \beta = \gamma = \mu = 0, \alpha \neq 0, \\ \{\mathbf{e}_1\}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = 0, \gamma\mu \neq 0 \ \text{ or } \ \alpha = \gamma = 0, \beta\mu \neq 0, \\ \{\mathbf{e}_1\}, & \text{if} \quad \beta = \gamma = 0, \alpha\mu \neq 0; \end{cases}$$

iii) For any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \setminus \mathrm{Fix}\,(V)$ we have

$$\lim_{n\to\infty} V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} \mathbf{x}^{(0)}, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = \mu = 0, \\ \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \mu \neq 0 \ \text{ or } \ \alpha = 0, \beta\gamma\mu \neq 0, \\ \left(1 - x_2^{(0)}, x_2^{(0)}, 0\right), & \text{if} \quad \alpha = \beta = \mu = 0, \gamma \neq 0, \\ \left(x_1^{(0)}, 0, 1 - x_1^{(0)}\right), & \text{if} \quad \alpha = \gamma = \mu = 0, \beta \neq 0, \\ \left(0, 1 - x_3^{(0)}, x_3^{(0)}\right), & \text{if} \quad \beta = \gamma = \mu = 0, \alpha > 0, \\ \left(1 - x_3^{(0)}, 0, x_3^{(0)}\right), & \text{if} \quad \beta = \gamma = \mu = 0, \alpha > 0, \\ \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \alpha = \beta = 0, \gamma\mu \neq 0 \ \text{ or } \ \alpha = \gamma = 0, \beta\mu \neq 0, \\ \mathbf{e}_1, & \text{if} \quad \beta = \gamma = 0, \alpha < 0, \mu > 0. \end{cases}$$

References

1. Brauer F., and Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemiology . New York: Springer, 2012, vol. 2.

2. Sameni R. Mathematical modeling of epidemic diseases; A case study of the COVID-19 coronavirus// arXiv:2003.11371v4 [q-bio.PE] 31 Dec 2020.

On p-Adic Ising Mapping And Its Dynamics

Umurova Sh. U.[1], **Khakimov O. N.**[2]
University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
umurovash13@gmail.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
khakimovo86@gmail.com

By $\mathbb{Q}$, as usual, we denote the field of rational numbers. Let p be a fixed prime number, then every $x \neq 0$ can be represented as $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, and n and m are relatively prime with p: $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$. The p-adic norm of x is defined by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

We note that such a norm satisfies the so called *strong triangle inequality*

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field $\mathbb{Q}_p$ (see [2]).

Let $x \neq 0$ be an arbitrary p-adic number, then it can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots),$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the integers x_j satisfy: $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p - 1$. Moreover, one has $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

We recall that $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ and $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$ are the set of all *p-adic integers* and *p-adic units*, respectively.

For a given $a \in \mathbb{Q}_2 \setminus \{-1, 0, 1\}$ we consider the following function on $\mathbb{Q}_2$

$$f(x) = \left(\frac{ax + 1}{x + a}\right)^3,$$

The function f is known as the Ising mapping. The dynamics of the Ising mapping on $\mathbb{Q}_p$ (for $p \neq 2$) were studied in [1]. It is easy to check that $x_1 = 1$ and $x_2 = -1$ are fixed points of the Ising mapping. Our aim is to describe the set of all fixed point of the mapping. To achieve this, we need to take into account the following equation

$$\frac{f(x) - x}{x^2 - 1} = 0.$$

From the last equality we obtain

$$x^2 + (3a - a^3)x + 1 = 0.$$

Lemma 1. Let $a \in \mathbb{Q}_2 \setminus \mathbb{Z}_2$. Then the Ising mapping has four fixed points: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, x_3 and x_4. Moreover, one has $|x_3|_2 = |a^3|_2$ and $|x_4|_2 = |a^{-3}|_2$.

Now we are going to study dynamics of the Ising mapping.

Lemma 2. Let $a \in \mathbb{Q}_2 \setminus \mathbb{Z}_2$ and f be the Ising mapping. Then the following statements hold:

(i) x_1 and x_2 are repelling fixed points;

(ii) x_3 and x_2 are attracting fixed points.

For the fixed points x_3 and x_4 we denote

$$A(x_i) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_2 : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_i \right\}.$$

Theorem. Let $a \in \mathbb{Q}_2 \setminus \mathbb{Z}_2$ and f be the Ising mapping. Then

$$A(x_3) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B_r(x_3)), \quad A(x_4) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B_1(x_4)),$$

where $r = |a^3|_2$.

References

1. Mukhamedov F.M., Khakimov O.N. Translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures for the Ising model on Cayley trees. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020.

2. Schikhof W.H., Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, Cambridge: Cambridge University Press; 1984.

p-Adic $(2,2)$-Rational Function And Its Dynamics

Urolboeva A. I.[1], **Khakimov O. N.**[2]

University of Exact and Social Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
asaluralboyeva09@gmail.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
khakimovo86@gmail.com

Let $\mathbb{Q}_p$ be a field of p-adic numbers. For more details about p-adic analysis we refer to [2]. In [1] the authors were described the set of all translation-invariant p-adic Gibbs measures for the Ising-Vannimenus model on Cayley tree of order two. They considered the following rational mapping over $\mathbb{Q}_p$

$$f_{a,b,c}(x) = a^2 \frac{b^4c^2x^2 + 2b^2x + c^2}{c^2x^2 + 2b^2x + b^4c^2}.$$

In this paper, we examine a specific case of the rational mapping $f_{a,b,c}$, when $b^2 = c^2 = \alpha$ and $a = 1$

$$f(x) = \frac{\alpha^2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + \alpha^2}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}_p \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

It is easy to check that $x_0 = 1$ is a fixed point of f. So, we have

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{(\alpha^2 - 1)(x + 1)}{x^2 + 2x + \alpha^2} \quad \text{if } x \neq 1.$$

Consequently, we conclude that $x_* \neq 1$ be a fixed point of f if and only if it is a solution of the following equation

$$x^2 + (3 - \alpha^2)x + 1 = 0. \tag{1}$$

Note that (1) has a solution if and only $\sqrt{(a^2-1)(a^2-5)} \in \mathbb{Q}_p$. So, a function f has either only one fixed point $x_0 = 1$ or three fixed points $x_0 = 1$ and

$$x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{a^2 - 3 + \sqrt{(a^2-1)(a^2-5)}}{2}.$$

Let us denote

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Q}_p : \exists n \in \mathbb{Z}_+ \text{ such that } f^n(x) = \hat{x}_1 \text{ or } f^n(x) = \hat{x}_2\}$$

where $\hat{x}_{1,2}$ are the solutions to $x^2 + 2x + \alpha^2 = 0$.

Proposition. Let $|\alpha|_p > 1$. Then $\mathcal{P}$ is a finite set. Moreover, $\mathcal{P} \neq \varnothing$ iff $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Now we are going to study dynamics of the Ising mapping.

Lemma 1. Let $|\alpha|_p > 1$. The following statements hold:

1) $|x_1|_p = \frac{1}{|x_2|_p} = |\alpha^2|_p$;

2) $|x_1 - \alpha^2|_p < |\alpha^2|_p$;

3) $|x_2 - \alpha^{-2}|_p < \frac{1}{|\alpha^2|_p}$.

Lemma 2. Let $r_1 = |a^2|_p$ and $r_2 = 1$. Then

$$|f(x) - x_i|_p = \frac{|x - x_i|_p}{|\alpha^2|_p}, \quad \forall x \in B_{r_i}(x_i).$$

Theorem. Let $r_1 = |a^2|_p$ and $r_2 = 1$. Then

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_i, \quad \forall x \in B_r(x_i).$$

References

1. Mukhamedov F., Saburov M., Khakimov O., On p-adic Ising-Vannimenus model on an arbitrary order Cayley tree. // Jour. Stat. Mech. (2015), P05032.

2. Schikhof W.H., Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, Cambridge: Cambridge University Press; 1984.

Случайная Безусловная Сходимость Хаоса Радемахера В L_∞ И Ее Приложения В Теории Графов

Асташкин С. В.[1], **Лыков К. В.**[2]

Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия;
astash@ssau.ru
Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь;
alkv@list.ru

Недавно авторами было установлено (см. [1,2]), что кратная система и хаос Радемахера обладают свойством случайной безусловной сходимости в пространстве L_∞. Там же было обнаружено существование тесных связей между L_∞-нормами линейных комбинаций элементов этих систем и некоторыми специальными нормами матриц их коэффициентов. В докладе будет рассказано о том, как упомянутые факты позволяют доказать новые точные двусторонние оценки для разброса весовых реберных графов и гиперграфов. Эти результаты, в частности, распространяют классическую теорему, полученную Эрдешем и Спенсером в невесовом случае для полных графов, на произвольные весовые.

Литература

1. Асташкин С.В., Лыков К.В. Об одном свойстве кратной системы Радемахера и его применении к задачам об уклонении в графах// Успехи мат. наук, 2024, том 79, №4, С. 231–232.

2. Astashkin S.V., Lykov K.V. Random unconditional convergence of Rademacher chaos in L_∞ and sharp estimates for discrepancy of weighted graphs and hypergraphs // arXiv: 2412.20107v1 [math PR] 28 Dec 2924.

Интерполяционная Последовательность В Некоторых Матричный Областях

Балтабаева М. О.[1]

[1]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
makhliyo.6642@gmail.com

Интерполяция функций лежит в основе разработки приближенных и численных подходов к решению множества задач. В частности, этот метод широко используется для аппроксимации и вычисления функций, численного интегрирования и дифференцирования, а также для создания приближенных алгоритмов решения различных классов линейных и нелинейных уравнений. Интерполяция функций матричных аргументов представляет значительный интерес как с теоретической точки зрения, поскольку способствует развитию более глубокой теории интерполяции, так и с практической, так как позволяет обобщить и расширить применение методов интерполяции скалярных функций на задачи, связанные с матрицами.

Интерполяционные последовательности на комплексной плоскости играют фундаментальную роль в анализе пространств ограниченных голоморфных функций. Эти последовательности были подробно исследованы в работах различных авторов.

Классическая теорема Карлесона [1] описывает интерполяционную последовательность в единичном круге комплексной плоскости. Берндтссон [2] получил достаточное условие для интерполяционной последовательности в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. В работах [3] и [4, глава 5] представлена свойства интерполяционной последовательности в обобщенным круге из матричная пространства $\mathbb{C}[m \times m]$. В докладе приводятся достаточные условия для интерполяционных последовательностей в матричной верхней полуплоскости.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{m^2}$, пространство m^2 комплексных переменных. В некоторых вопросах точку Z этого пространства удобно представлять в виде $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^{m}$, т.е., в виде квадратных $[m \times m]$ – матриц. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m \times m]$. Матричная верхняя полуплоскость определяется как множество матриц

$$\Im = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \operatorname{Im} Z > 0\},$$

где $\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i}(Z - Z^*)$, $Z^* = \bar{Z}'$ – матрица, сопряженная и транспонированная к Z (см. [1]). При $m = 1$ это обычная верхняя полуплоскость.

Обозначим через $H^\infty(\Im)$ – пространство ограниченных голоморфных функций в $\Im$.

Определение 1. *Последовательность $\{P_k\}$ в классической области $\Im$ называется интерполяционной последовательностью для $H^\infty(\Im)$, если для любой ограниченной последовательности $\{b_k\}$ комплексных чисел существует функция $F \in H^\infty(\Im)$ такая, что*

$$F(P_k) = b_k,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Для $P, Z \in \Im$ положим

$$\Phi_P(Z) = \frac{\det Z - \det P}{\det Z - \det P^*}$$

Ясно, что при $m = 1$ отображение $\Phi_P(Z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг, переводящего точку P в нуль.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого δ и любого k выполняется условие*

$$\prod_{j \neq k} \left|\Phi_{P_j}(P_k)\right| \geq \delta.$$

Тогда последовательность $\{P_k\} \subset \Im$ является интерполяционной в $\Im$ для $H^\infty(\Im)$.

Литература

1. Carleson L. An interpolation problem for bounded holomorphic functions, Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 921–930.

2. Berndtsson B. Interpolating sequences for H^∞ in the ball, Proc. Amer. Math. 1985. V. 88. P. 1–10.

3. Шаимкулов Б.А. Интерполяционные последовательности в обоб-щенном единичном круге, Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды междунар. науч. конф. 26–29 ноября 2003. Ташкент, 2003. Т. 2. С. 111–112.

4. Г. Худайберганов, А. М. Кытманов, Б.А. Шаимкулов, Анализ в матричных облястях, Красноярск: Сибирский федеральный ун–т, 296 с. (2017).

Весовые Неравенства Для Дискретного Оператора Харди

Бокаев Н. А.[1], **Гогатишвили А.** , [2] **Кузеубаева Н. К.**[3]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
bokayev2011@yandex.ru
Институт математики Чешской академии наук, Прага, Чехия;
gogatish@math.cas.cz
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
nurgul.kuzeubaeva@mail.ru

В данной работе мы характеризуем весовые неравенства для дискретного оператора Харди:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^q a_n\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^p b_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}x_k\right)^q a_n\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^p b_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

для неотрицательных, невозрастающих последовательностей $x=(x_n)$. Здесь (a_n) и (b_n) – заданные неотрицательные весовые последовательности, $p,q\in(0,\infty)$ – фиксированные параметры, а константа $C>0$ не зависит от x.

Теорема 1. Пусть $0<q\le\infty$, $1<p<\infty$. Предположим, что (a_n) и (b_n) – заданные последовательности неотрицательных весов. Тогда неравенство (1) выполняется для всех неотрицательных, невозрастающих последовательностей (x_n) тогда и только тогда, когда для любого $\alpha>0$ справедливо следующее неравенство:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{B_i^{\alpha+1}}\left(\sum_{k=1}^{i}B_k^{\alpha+1}y_k\right)\right)^q a_n\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_n^p B_n^p b_n^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

для всех неотрицательных последовательностей (y_n).

Теорема 2. Пусть $0<q\le\infty$, $1<p<\infty$. Предположим, что (a_n) и (b_n) – заданные последовательности неотрицательных весов, и пусть $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$. Тогда неравенство (2) выполняется для всех неотрицательных, невозрастающих последовательностей (x_n) тогда и только тогда, когда для любого $\alpha>0$ справедливо следующее неравенство:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{B_i^{\alpha+1}}\left(\sum_{k=1}^{i}B_k^{\alpha+1}y_k\right)\right)^q a_n\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_n^p B_n^p b_n^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

для всех неотрицательных последовательностей (y_n), где C Ч константа, зависящая только от p, q, α и последовательностей (a_n), (b_n).

В непрерывном случае аналогичные вопросы рассмотрены в [1].

Литература

1. A.Gogatishvili and V.D.Stepanov. Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions. //J. Math. Anal. Appl. 2013. T.405, №1. C. 156-172.

Свойства Автоморфизмов Матричной Верхней Полуплоскости

Душамов А. О.[1], Курбанов К. С.[2]

[1,2]Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан;
dushamovakbar12@gmail.com, kamron_kurbanov@mail.ru

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{m^2}$, пространство m^2 комплексных переменных. В некоторых вопросах точку Z этого пространства удобно представлять в виде $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^{m}$, т.е. в виде квадратных $[m \times m]$ – матриц. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m \times m]$.

Матричная верхняя полуплоскость определяется как множество матриц

$$\Im = \{Z \in \mathbb{C}\,[m \times m] : \operatorname{Im} Z > 0\},$$

где $\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i}(Z - Z^*)$. $Z^* = \bar{Z}'$ – матрица, сопряженная и транспонированная к Z (см. [1]). При $m = 1$ это обычная верхняя полуплоскость.

Граница $\partial\Im$ этой области состоит из матриц Z, для которых $\operatorname{Im} Z$ неотрицательно определенная, но неположительно определенная эрмитова матрица (ее собственные значения неотрицательны и хотя бы одно равно нулю). Так как обращение в нуль собственных значений эрмитовой матрицы выражается вещественно аналитическим равенством, то $\partial\Im$ состоит из кусков вещественно аналитических поверхностей размерности $2m^2 - 1$.

Множество

$$S(\Im) = \{Z : \operatorname{Im} Z = 0\}\ ,$$

которое лежит на $\partial\Im$, называется остовом верхней полуплоскости $\Im$. Оно состоит из всех эрмитовых матриц. Условие эрмитовости выражается m^2 независимыми уравнениями, поэтому вещественная размерность $S(\Im)$ равна m^2.

При $m = 2$ этот особый случай имеет вид

$$\Im = \left\{ Z \in \mathbb{C}\,[2 \times 2] : \begin{pmatrix} \operatorname{Im} z_{11} & \frac{z_{12} - \bar{z}_{21}}{2i} \\ \frac{z_{21} - \bar{z}_{12}}{2i} & \operatorname{Im} z_{22} \end{pmatrix} > 0 \right\}.$$

Эта область определяется неравенствами

$$\Im = \left\{ \operatorname{Im} z_{11} > 0, \operatorname{Im} z_{11} \operatorname{Im} z_{22} - \frac{1}{4}|z_{12} - \bar{z}_{21}|^2 > 0 \right\},$$

а ее граница – уравнением

$$\partial\Im = \left\{ \operatorname{Im} z_{11} \operatorname{Im} z_{22} = \frac{1}{4}|z_{12} - \bar{z}_{21}|^2 \right\},$$

где остовом является вещественная четырехмерная плоскость

$$S(\Im) = \{\operatorname{Im} z_{11} = \operatorname{Im} z_{22} = 0, z_{12} = \bar{z}_{21}\}.$$

Заметим, что невырожденное аффинное преобразование

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} z_{11} + z_{22} & z_{12} + z_{21} \\ i(z_{21} - z_{12}) & z_{11} - z_{22} \end{pmatrix}$$

переводит $\Im$ в область, определяемую неравенствами

$$\tau(2) = \left\{ \operatorname{Im} z_{11} > 0, (\operatorname{Im} z_{11})^2 > (\operatorname{Im} z_{12})^2 + (\operatorname{Im} z_{21})^2 + (\operatorname{Im} z_{22})^2 \right\}$$

называемой трубой будущего (см. [2]), т.е. в трубчатую область $T = \mathbb{R}^4(x) + iC$ над конусом

$$C = \left\{ y_{11}^2 - y_{22}^2 - y_{12}^2 - y_{21}^2 > 0 \right\},$$

точнее – над одной полостью C_+ этого конуса, для которой $y_{11} > 0$ (мы положили $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$). Граница $\partial\Im$ при этом переходит в $\partial C_+ \times \mathbb{R}^4(x)$, а остов – в вещественное подпространства $\mathbb{R}^4(x)$, точнее - в произведение на него вершины конуса C_+. Эти реализации более подробно приведены в работах [2-4].

Теорема 1. *Дробно-линейное отображение вида*

$$W = (AZ + B) \cdot (CZ + D)^{-1} \tag{1}$$

является автоморфизмом области $\Im$, где A, B, C и D матрицы размеров $[m \times m]$ удовлетворяющие соотношениям

$$C^*A = A^*C,\ D^*B = B^*D,\ D^*A - B^*C = I.$$

Обозначим Γ – группу автоморфизмов области $\Im$ т.е. $\mathrm{Aut}\Im = \Gamma$ и Γ_0 – подгруппу Γ, оставляющую начало координат неподвижным. В данной работе представлены свойства группы автоморфизмов Γ.

Литература

1. Г. Худайберганов, А. М. Кытманов, Б.А. Шаимкулов, Анализ в матричных облястях, Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 296 с. (2017).

2. В.С. Владимиров, А.Г. Сергеев, Комплексный анализ в трубе будущего, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 8, ВИНИТИ, М., 1985, 191–266.

3. Khudayberganov G., Abdullayev J. Sh. Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-SzegXo in the domains $\tau^+(n-1)$ and $\Re_{IV}^n$. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 13:5, 559–567(2020).

4. Khudayberganov G., Abdullayev J. Sh. The boundary Morera theorem for domain $\tau^+(n-1)$, Ufimsk. Mat. Zh., 13:3 (2021), pp. 196–210.

Точки Лебега В Современных Исследованиях В Области Теории Функций

Даужанов А.Ш.[1], **Омаров Т.М.**[2]

[1] доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, г. Нукус E-mail:aynazard@mail.ru

[2] ассистент преподаватель кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета им. Бердаха, г. Нукус turaromarov400@gmail.

Аннотация. Целью этой работы является развитие одной из фундаментальных теорем анализа в современных научных исследованиях. Также приведена история открытия теории функций множеств. Рассмотрены различные обобщения классической теоремы Лебега.

Ключевые слова: А. Лебег, история теории функций множеств, теорема о точках Лебега.

ВВЕДЕНИЕ. В этом году исполняется 150 лет со дня рождения одного из крупнейших математиков 20-го столетия, внесший огромный вклад в современной теории функций действительного переменного Анри Лебега (1875-1941). А. Лебег не только автор общего понятия интеграла, но и разработал теорию интегрирования, а также применение интеграла для решения многих вопросов теории функций.

Введенные Лебегом понятия и разработанные методы с успехом применялись в самых разнообразных областях современной математики до настоящего времени.

Его исследования по теории функций и множеств, а именно введенные им измеримые множества и функции (1901) способствовали к созданию самостоятельной математической теории – теории функций множеств. Последующем теория функций множеств начало интенсивно разрабатываться очень многими математиками. В настоящее время эта теория является огромной математической дисциплиной, создавший своеобразный след на теорию функций, функциональный анализ, теорию вероятностей и другие разделы современной математики. Но основным еҷ носителем является именно работы Лебега, ставших отправными пунктами множества последующих научных исследований.

С именем А. Лебега связано очень много идей, методов и результатов. Опишем коротко некоторые из них.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА. В ряде задач теории функций центральное место занимает связь между значениями функции в точке и значениями в окрестности этой точки. Эта связь может выражаться в различных терминах.

Теорема Лебега. Будем говорить, что точка $x_0 \in [a,b]$ называется точкой Лебега суммируемой функции $f(x)$ $(= f \in L_1)$, если

$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} |f(y) - f(x_0)|\, dy = 0.$ (1)

Обычно условие (1) называют теоремой о точках Лебега.

Известно роль точек непрерывности функции: если функция $f(x)$ непрерывна, то любая точка $x_0 \in [a,b]$ является точкой Лебега функции $f(x)$. В общем случае, когда $f(x)$ суммируема, почти каждая точка отрезка $[a,b]$ является точкой Лебега функции $f(x)$. В точках Лебега суммируемая функция обладает многими свойствами непрерывной функции. Другими словами, множество точек $x_0 \in R$, не являющихся точками Лебега, имеет меру нуль.

Множество точек Лебега для более гладких функций исследовали многие авторы, среди которых отметим публикации следующих: Г.Федерер–В.Зимер (1972), Т.Бэгби–В.Зимер (1974), С.Кальдерон–Е.Фейбс–Н.Ривьер (1974). В основном их исследования были посвящены изучению точечных свойств функций из пространства Соболева $W_p^{\alpha}(G),\ G \subset R^n,\ 1 < p < \infty,\ \alpha > 0$ (см.[1], [3]).

В течение последних десятки лет разные вопросы в этой области исследовались многими специалистами в математическом анализе, среди которых были П.Хайлаш, Ю.Киннунен, В.Г.Кротов, М.А.Прохорович и другие.

В работах А.С.Садуллаева–С.А.Имомкулова–К.Х.Рахимова [4] были рассмотрены класс ограниченных субгармонических функции в области $D \subset C$ и доказаны, что если $u(z) \in sh(D) \bigcap L_{\infty}(D)$ и $l-$ произвольная вещественная прямая, имеющая непустое пересечение с D, то для сужения $f = u|_l$ каждая точка $x \in l \bigcap D$ является его точкой Лебега.

Отметим, что исследуемые свойства функций не является инвариантными относительно изменения значений на множестве меры нуль. Такие свойства в современной теории функций обычно называют Ђтонкими". Для их изучения используются довольно сложные способы оценки массивности множеств меры нуль с помощью подходящего аппарата – емкостей, порождаемых функциональными пространствами, а также мер и размерностей Хаусдорфа.

Литература

1. H. Federer, W. Ziemer. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are $p-$th power summable // Indiana University Math.Journal. – 1972. – V.22, №2. – P. 139-158.

2. Медведев Ф.А. О работах Анри Лебега по теории функций (к столетию со дня рождения) // УМН. – 1975. – Т.30, №4. – С. 227-239.

3. Прохорович М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева $W_{\alpha}^{p},\ \alpha > 0$, на пространствах однородного типа // Мат. заметки. – 2009. – Т.85, №4. – С. 616-621.

4. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А., Рахимов К.Х. Ограниченная субгармоническая функция обладает свойством Лебега в каждой точке // Мат. заметки. – 2014. – Т.96, №6. – С. 921-925.

Непрерывность Гессианов В Классе Ограниченных $m-$ Выпуклых Функций
Посвящается к 80 летию Алимова Шавката Арифжановича
Посвящается к 70 летию Ашурова Равшана Раджабовича

Садуллаев А.

Национальный университет Узбекистана, Институт Математики Академии Наук Узбекистана,
sadullaev@mail.ru

Математиками Национального университета Узбекистана и Ургенчского отделения Института Математики Узбекской Академии был разработан новый подход к изучению $m-$выпуклых $(m-cv)$ функций, основанного на связях $m-cv$ функций с $m-$ субгармоническими (sh_m) функциями. Класс sh_m- функций хорошо развит и имеет более менее завершчнную теорию. В частности, в классе ограниченных $m-cv$ функций были введены Гессианы $H^k(u), k=1,2,...,n-m+1$, как борелевские меры. Были доказаны ряд простых свойств этих мер. В этой работе мы предлагаем дальнейшие, более тонкие свойства этих мер, таких как непрерывность этих Гессианов в том смысле, что для монотонной последовательности $m-cv$ функций $u_j(x)$ последовательность борелевских мер $H^k(u_j), k=1,2,...,n-m+1$, слабо сходится. Мы устанавливаем также связь максимальных $m-cv$функций $u(x)$ с Гессианами $H^{n-m+1}(u_j)$.

2020 Mathematics Subject Classification: 26B25; 39B62; 52A41

Keywords: $m-$ subharmonic functions, $m-$ convex functions, Borel measures, Hessians

О Новых Условиях Единственности Слабо Периодической Меры Гиббса Для HC Модели

Хакимов Р. М.[1], **Куйсиналиев Ш. Ш.**[2]

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан,
rustam-7102@rambler.ru;
Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан,
shahriyormatematik2@gmail.com

Работа посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса для Hard-Core (HC) модели с двумя состояниями в случае нормального делителя индекса четыре. Найдены новые условия единственности (трансляционно-инвариантности) слабо периодической меры Гиббса.

Дерево Кэли $\tau^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер.

Пусть $d(x,y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y, т.е. количество ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y.

Для фиксированной $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) = n\},\ V_n = \cup_{j=0}^{n} W_j.$$

Для $x \in W_n$ обозначим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x,y) = 1\}-$множество прямых потомков вершины x. Пусть $\Phi = \{0,1\}$ и $\sigma \in \Phi^V-$ конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$.

Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x,y\rangle$ из V и обозначим множество таких конфигураций через Ω^a.

Гамильтониан Hard-Core (HC) модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J\sum_{x\in V}\sigma(x), \;\; \sigma \in \Omega^a, \;\; J \in R.$$

Понятие меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [1]-[2].

Известно [3], что каждой мере Гиббса для HC-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y\in S(x)} (1+\lambda z_y)^{-1},$$

где $\lambda = e^{-J\beta} > 0-$параметр, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$.

Известно, что τ^k можно представить как G_k - свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, ..., a_{k+1}$, соответственно.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ есть фактор группа, где G_k^*-нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется G_k^*-периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in G_k^*$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x,y\rangle\}\backslash S(x)$ имеет единственный элемент, которого обозначим через $x_\downarrow$.

Определение 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется G_k^*-слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для $\forall x \in G_k$.

Определение 3. Мера μ называется G_k^*-(слабо) периодической, если она соответствует G_k^*-(слабо) периодической совокупности величин z.

Пусть $A \subset \{1,2,...,k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum\limits_{i\in A} w_x(a_i)-$четное число$\}$, где $w_x(a_i)-$число буквы a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| -$ четное число$\}$, где $|x|-$длина слова $x \in G_k$ и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}-$ нормальный делитель индекса 4.

В работе [4] для исследования задачи существования слабо периодических мер Гиббса изучалась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(1+\lambda z_7)^k}{((1+\lambda z_7)^{k/i}+\lambda z_8^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_2)^{k-i}} \\ z_2 = \frac{(1+\lambda z_8)^k}{((1+\lambda z_8)^{k/i}+\lambda z_7^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_1)^{k-i}} \\ z_7 = \frac{(1+\lambda z_1)^k}{((1+\lambda z_1)^{k/i}+\lambda z_2^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_8)^{k-i}} \\ z_8 = \frac{(1+\lambda z_2)^k}{((1+\lambda z_2)^{k/i}+\lambda z_1^{1-1/i})^i} \cdot \frac{1}{(1+\lambda z_7)^{k-i}}, \end{cases}$$

где $i = |A|-$мощность множества A.

Замечание. Работы [4] и [5] посвящена изучению слабо периодических мер Гиббса с периодом четыре для HC-модели на некоторых инвариантах. В частности, при

$k = 2,3,4, i = 1$; $k = i$; $k = 3, i = 2$; $k = 4, i = 2,3$; $k = 5, i = 1$ было доказано единственность слабо периодической меры Гиббса на инвариантном множестве $I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8,\ z_2 = z_7\}$. А также были найдены условия существования и неединственности слабо периодических мер Гиббса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $k = 6$, $i = 4$. Тогда для HC-модели в случае нормального делителя индекса четыре на I_4 слабо периодическая мера Гиббса единственна. Более того, эта мера совпадает с единственной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.*

Литература

1. Георги Х.О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. "Мир"1992. с.624.

2. Rozikov U.A. Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.

3. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network // Queueing Systems, 46, 2004, p. 197–212.

4. Хакимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для HC-модели для нормального делителя индекса четыре // УкрМЖ, 2015, т. 67, №10, стр.1409–1422.

5. Хакимов Р.М., Махаммадалиев М.Т. Условия единственности и неединственности слабо периодических мер Гиббса для HC модели. ТМФ, 2020, 204(2), стр.258-279.

О Мерах Гиббса Для Модели SOS С Конкурирующими Взаимодействиями Блюма-Капеля На Дереве Кэли

Ходжиев Б.Г.

Наманганский государственный университет, ул. Уйчи, 316 ;
xodjiyevbaxodir1997@gmail.com.

Пусть $\tau^k = (V, L, i), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V - множество вершин, L - множество ребер τ^k, i- функция инцидентности. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины $x, y \in V$ называются ближайшими соседями и мы пишем $l = \langle x, y\rangle$.

Пусть G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, соответственно, т.е. $a_i^2 = e$ (см.[1],[4]).

Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k[4].

Для произвольной фиксированной точки $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}, \qquad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \qquad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L | x, y \in V_n\},$$

где $d(x, y)$-расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер соединяющих x и y . Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели SOS с конкурирующими взаимодействиями Блюма-Капеля имеет вид:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle: \\ x,y\in V}} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_2 \sum_{\substack{x,y\in V: \\ d(x,y)=2}} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

где $J=(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2, \sigma\in\Omega$.

Пусть

$$A_1=\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2 | J_1\le 0; J_1+8J_2\le 0\}.$$

и $\mathbf{P}=intA_1\equiv\{(J_1,J_2)\in\mathbb{R}^2 : J_1<0; J_1+8J_2<0\}$.

Рассмотрим случай $J\in\mathbf{P}$ в этом случай, только постоянные конфигурации являются основными состояниями гамильтониана. Пусть $\Lambda\subset V$ конечное множество, $\Lambda'=V\backslash\Lambda$ и $\omega_\Lambda=\{\omega(x), x\in\Lambda'\}$, $\sigma_\Lambda=\{\sigma(x), x\in V\}$ - данные конфигурации. Энергия конфигурации σ_Λ имеет вид

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda|\omega_{\Lambda'})=-J_1\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x,y\in\Lambda}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-J_1\sum_{\substack{\langle x,y\rangle\\ x\in\Lambda,y\in\Lambda'}}|\sigma(x)-\sigma(y)|-$$

$$-J_2\sum_{\substack{x,y\in\Lambda:\\ d(x,y)=2}}(\sigma(x)-\sigma(y))^2-J_2\sum_{\substack{x\in\Lambda,y\in\Lambda':\\ d(x,y)=2}}(\sigma(x)-\sigma(y))^2. \qquad (2)$$

Пусть $\omega^{(i)}_{\Lambda'}\equiv i$, $i\in\Phi$ − постоянные конфигурации вне Λ. Для каждой конфигурации σ_Λ внутри Λ доопределим конфигурации ко всему дереву с i-й постоянной конфигурацией и обозначим эту конфигурацию $\sigma^{(i)}_\Lambda$, и пуст $\Omega^{(i)}_\Lambda=\{\sigma^{(i)}_\Lambda\}$ [2].

Рассмотрим V_n и для данной конфигурации $\sigma^{(i)}_\Lambda\in\Omega^{(i)}_\Lambda$,$\Lambda\subset V_n$ мы обозначим $V^{(j)}_n\equiv V^{(j)}_n(\sigma^{(i)}_\Lambda)=\{t\in V_n : \sigma^{(i)}_\Lambda(t)=j\}$, $j\in\Phi, j\ne i$. Пуст $G^{n,j}=(V^{(j)}_n, L^{(j)}_n)$ - граф такой, что $L^{(j)}_n=\{l=\langle x,y\rangle\in L: \ x,y\in V^{(j)}_n\}$, $j\in\Phi$.

Число для элементов множества A обозначим $|A|$. Для ребра $l_1,l_2\in L, l_1\ne l_2$, называются ближайшими соседними ребрами, если $|i(l_1)\cap i(l_2)|=1$, и мы пишем в этой случае $\langle l_1,l_2\rangle_1$. Для любого связанного компонента $K\in\tau^k$ обозначим через $E(K)$ множество ребер K и $b(K)=\{l\in L\backslash E(K) : \exists l_1\in E(K)$ такое, что $\langle l,l_1\rangle_1\}$.

Определение 1. *Ребро $l=\langle x,y\rangle\in L_{n+1}$ называется граничным ребром конфигурации $\sigma^{(i)}_{V_n}(x)$, если $\sigma^{(i)}_{V_n}(x)\ne\sigma^{(i)}_{V_n}(y)$. Множество граничных ребер конфигурации называется реберной границей $\Gamma(\sigma^{(i)}_{V_n})\equiv\Gamma$ этой конфигурации.* Граница Γ состоит из 3 частей

$$\Gamma_\epsilon(\sigma^{(i)}_{V_n}(x))\equiv\Gamma_\epsilon, \qquad \epsilon\in\{ij : i<j; i,j=\Phi\}\equiv D_3$$

где, например, Γ_{01} - множества ребер $l=\langle x,y\rangle$ с $\sigma(x)=0$ и $\sigma(y)=1$.

Множества $V^{(j)}_{n,r}, j\in\Phi, j\ne i; r=1,2,...,m$ называются интерьером $\mathrm{Int}b(G^{n,j}_r)$ подконтура $b(G^{n,j}_r)$. Для любых двух подконтуров T_1,T_2 расстояние $dist(T_1,T_2)$ определяем следующим образом:

$$dist(T_1,T_2)=\min_{\substack{x\in V(T_1):\\ y\in(T_2)}}d(x,y). \qquad (3)$$

Определение 2. *Любой максимальный связанный набор (компонент) подконтуров называется контуром границы* Γ.

Пуст $\gamma=\{\gamma_r, r=1,2,...\}$ - контур границы Γ, γ_r- подконтур. Обозначим

$$Int\gamma=\bigcup_j Int\gamma_j. \quad imp\gamma=\{b\in\partial : b\cap\gamma\ne\varnothing\}, \qquad |\gamma|=|imp\gamma|.$$

Теорема 1. *Для всех достаточно больших β сушествуют по крайней мере три меры Гиббса для модели SOS с конкурирующими взаимодействиями Блюма-Капеля на дереве Кэли порядка $k = 2$.*

Замечание 1. Модель Поттса с q-состояниями рассмотрено в работе [3]. Если $q = 3$, то для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями верно аналогичная теорема к теорему 1(см.[3]).

Литературы

1. Ganikhodjaev, N.N.: Group representation and automorphisms of the Cayley tree // Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan4, 3-5 (1994).

2. M. M. Rahmatullaev; M.A. Rasulova; J. N. Asqarov. Ground States and Gibbs Measures of Ising Model with Competing Interactions and an External Field on a Cayley Tree // Journal of Statistical Physics 190:116 (2023).

3. U.A. Rozikov, On q-component models on Cayley tree: contour method // Lett. Math. Phys. Vol 71, №. 1, pp. 27-38,(2005).

4. U.A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees // World Scientific, Haversack, (2013).

Соотношение Для Числовой Области Значений Модели Фридрихса С Трехмерным Возмущением

Хусенова Ж. Т.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
j.t.husenova@buxdu.uz

Одним из классических методов изучения спектра линейного ограниченного оператора A в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является изучение его числовой области значений. Последнее множество определяется следующим образом:

$$\mathcal{W}(A) := \{(Ax, x) : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

Из определения видно, что множество $\mathcal{W}(A)$ является подмножеством комплексной плоскости, и геометрические свойства множества $\mathcal{W}(A)$ дают некоторые сведения об операторе A. Это понятие впервые введено в работе Теплица [1] для матриц и доказано, что числовая область значений матрицы содержит все ее собственные значения, т.е. ее спектр (так как множество всех собственных значений матрицы совпадает со спектром этой матрицы). Далее, в работе Хаусдорфа [2] показано, что числовая область значений оператора является выпуклым множеством. Отметим, что выше указанные результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае для любого линейного ограниченного оператора. В работе Винтнера [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании числовой области значений этого оператора.

Введем оператор, который будет изучен в данной работе.

В гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$ квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на отрезке $[-\pi;\pi]$ рассмотрим оператор вида:

$$H := H_0 - V_1 - V_2 - V_3, \tag{1}$$

где H_0 - оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi];$$

а V_α, $\alpha = 1,2,3$ - интегральные операторы вида

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x)\int_{-\pi}^{\pi} v_\alpha(t)f(t)dt, \quad f \in L_2[-\pi;\pi].$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2,3$ – вещественнозначные непрерывные функции определенные на отрезке $[-\pi;\pi]$. Причем функции $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ и $v_3(\cdot)$ - линейно независимы.

При этих предположениях на параметр функции, оператор H, определенный по формуле (1), ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

Оператор H, определенный по формуле (1), обычно называется моделью Фридрихса с трехмерным возмущением.

Из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что $\sigma_{\text{ess}}(H) = [m;M]$, где

$$m := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x), \quad M := \max_{x\in[-\pi;\pi]} u(x).$$

Для определения собственных значений и числовой области значений модели Фридрихса H введем регулярную функцию в области $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ следующим образом

$$I_{\alpha\beta}(z) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v_\alpha(t)v_\beta(t)dt}{u(t)-z}, \quad \alpha,\beta = 1,2,3.$$

Используя простые соображения, можно показать, что число $z \in \mathbb{C}\setminus[m;M]$ является собственным значением модели Фридрихса H тогда и только тогда когда

$$\Delta(z) := \begin{vmatrix} 1-I_{11}(z) & -I_{12}(z) & -I_{13}(z) \\ -I_{21}(z) & 1-I_{22}(z) & -I_{23}(z) \\ -I_{31}(z) & -I_{32}(z) & 1-I_{33}(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда для дискретного спектра оператора H имеем

$$\sigma_{\text{disc}}(H) = \{z \in \mathbb{C}\setminus[m;M] : \ \Delta(z) = 0\}.$$

Функция $\Delta(\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с моделью Фридрихса H. Из положительности оператора V следует, что модель Фридрихса H не имеет собственный значений, лежащих правее M и поэтому

$$\max\sigma(H) = \max\sigma_{\text{ess}}(H) = M.$$

Теперь сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. а) *Имеет место соотношение* $M \notin \mathcal{W}(H)$;

б) *Число* $z = M$ *является предельной точкой множества* $\mathcal{W}(H)$.

Чтобы использовать в дальнейших исследованиях наряду с моделью Фридрихса H, рассмотрим линейные, ограниченные и самосопряженные операторы

$$H_k := H_0 - V_k, \quad k = 1,2,3$$

в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

Теорема 2. *Существуют индексы* $i,j,k\in\{1,2,3\}$ *такие, что*

$$\mathcal{W}(H_i)\subset\mathcal{W}(H_j)\subset\mathcal{W}(H_k).$$

Для формулировки следующего результата обозначим через $\operatorname{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ носитель функции $v_\alpha(\cdot)$ и через $\mu(\Omega)$ меру Лебега множества $\Omega\subset\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Если для любых* $i\neq j$, $i,j=1,2,3$ *выполняется условие*

$$\mu(\operatorname{supp}\{v_i(\cdot)\}\cap\operatorname{supp}\{v_j(\cdot)\})=0, \tag{2}$$

тогда существует индекс $k\in\{1,2,3\}$ *такой, что* $\mathcal{W}(H_k)=\mathcal{W}(H)$.

Литература

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer // Math. Z., 1918, V. 2, №. 1-2, P. 187–197.

2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform // Math. Z., 1919, V. 3, №. 1, P. 314–316.

3. Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen // Math. Z., 1929, V. 30, №. 1, P. 228–281.

Смешанные Гессианы В Классе m-Выпуклых Функций

Шарипов Р. А.

Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни.
Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ургенч, Узбекистан;
sharipovr80@mail.ru

Как известно, сильно m-субгармонические (sh_m) функции имеют практическую полезную связь с m-выпуклыми ($m-cv$) функциями. Она оказалась очень удобной методикой в исследовании $m-cv$ функций. Цель настоящей работы введение смешанный гессианов в классе $m-cv$ функций, используя эту связь.

Напомним, функция $u(x)\in C^2(D)$ определенная в области $D\subset\mathbb{R}^n$, называется m-выпуклой, $1\leq m\leq n$, если гессианы $H^k(u)=H^k(\lambda)=\sum\limits_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n}\lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_k}$ собственных значений $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ симметричной матрицы $\left(\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right)$ удовлетворяет условиями

$$H^k(u(x))\geq 0,\quad k=1,\ldots,n-m+1$$

в каждой точке $x\in D$. (см. [5], [6], [7])

Аналогично, дважды гладкая функция $u(z)\in C^2(\mathbb{D})$ определенная в области $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}^n$, называется сильно m-субгармонической, $u(z)\in sh_m(\mathbb{D})$, если дифференциальные формы (потоки)

$$(dd^cu)^k\wedge\beta^{n-k}\geq 0\,,\ \ k=1,\ldots,n-m+1.$$

Здесь $\beta=dd^c|z|^2-$ фундаментальная форма объема в $\mathbb{C}^n$. (см. [1], [2], [3], [4])

Операторы $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k}$ функционально связаны с гессианами $H^k(u(z)) = \sum\limits_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} \lambda_{j_1}\ldots\lambda_{j_k}$ с помощью соотношения

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} = k!\,(n-k)!H^k(u)\,\beta^n.$$

Следовательно, дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(\mathbb{D}), \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, является сильно m-субгармонической, если в каждой точке $z^0 \in \mathbb{D}$ имеют места неравенства

$$H^k\left(u(z^0)\right) \ge 0, \;\; k = 1, 2, ..., n-m+1.$$

Цель настоящей работе исследовать так называемого смешанного гессиана, введенного Трудингером-Вонгом [7] для введения емкостных величин в классе $u(x) \in m - cv(D)$. Как известно, смешанные гессианы связаны с дифференциальными операторами $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{m-1} \ge 0, \;\; k = 1, 2, ..., n-m+1$, для различных функций $u_1(z), u_2(z), ..., u_k(z) \in sh_m(\mathbb{D})$. В классе $sh_m(\mathbb{D}) \bigcap L^\infty_{loc}(\mathbb{D}), \; 1 \le m \le n$, мы определяем дифференциальные операторы $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{m-1} \ge 0$ как потоки (обобщенные функции) бистепени (k,k), рекуррентным соотношением по k.

Пусть $dd^c u_t = \frac{i}{2}\sum\limits_{j,s} \frac{\partial^2 u_t}{\partial z_j \partial \bar{z}_s} dz_j \wedge d\,\bar{z}_s, \; t = 1, 2, ..., k$. Обозначим через $\lambda^t_j = \frac{\partial^2 u_t}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ диагональные элементы матрицы $\left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial z_j \partial \bar{z}_s}\right)$. Тогда

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-k} = C_{k,n}\left[\sum_{1\le j_1\ne j_2\ne\ldots\ne j_k\le n} \lambda^1_{j_1}\lambda^2_{j_2}...\lambda^k_{j_k}\right]\beta^n$$

где $C_{k,n} > 0-$ константа. Величина

$$H^k(\vec{u}, z) = \sum_{1\le j_1\ne j_2\ne\ldots\ne j_k\le n} \lambda^1_{j_1}\lambda^2_{j_2}...\lambda^k_{j_k}$$

называется смешанным гессианом для функций $u_1, u_2, ..., u_k \in sh_m(\mathbb{D}) \bigcap C^2(\mathbb{D})$. Таким образом, $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-k} = C_{k,n} H^k(\vec{u}, z)\,\beta^n$ и из положительности $dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-k} \ge 0$ следует, что смешанный гессиан $H^k(\vec{u}) \ge 0$.

Используя связь m-выпуклых $(m-cv)$ функций с сильно m-субгармоническими функциями, мы можем определить смешанные гессианы $H^k(u_1, u_2, ..., u_k), \quad k = 1, 2, ..., n-m+1$, для различных функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x) \in m - cv(D) \bigcap L^\infty_{loc}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

Борелевские меры

$$\nu_k : \;\; \nu_k(E_x) = \frac{4^k}{mesE_y}\mu_k(E_x \times E_y), \;\; k = 1, 2, ..., n-m+1,$$

естественно называть смешанным гессианом $H^k(u_1, u_2, ..., u_k), \;\; k = 1, 2, ..., n-m+1$, для ограниченных, m-выпуклых функций $u_1, u_2, ..., u_k \in m - cv(D)$.

Основные результаты работы являются следующие

Теорема 1. *В классе локально равномерно ограниченных функций* $L = \{u(x) \in m - cv(D) \bigcap L^\infty_{loc}(D)\}$, *семейство интегралов*

$$\int\limits_K H^k(\vec{u}, x)\,dV(x), \quad \vec{u} = (u_1(x),\, u_2(x), ..., u_k(x)) \in L,$$

равномерно ограничены для любого компакта $K \subset D$, $1 \leq k \leq n-k+1$.

В классе $L = \{u(x) \in m - cv(D) \bigcap L^{\infty}_{loc}(D)\}$ имеет место также слабая сходимость смешанный гессианов

Теорема 2. *Если последовательности* $u_{tj}(x) \in L$, $t = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ...$, *убывающие,* $u_{tj}(x) \downarrow u_t(x) \in L$, *то последовательность борелевских мер* $H^k(\vec{u}_j, x)$ *слабо сходится к* $H^k(\vec{u}, x)$, $H^k(\vec{u}_j, x) \mapsto H^k(\vec{u}, x)$, $k = 1, 2, ..., n-m+1$.

Литература

1. Blocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation // Ann.Inst. Fourier, Grenoble, 2005, V.5, pp.1735–1756.

2. Dinew S., Kolodziej S., A priori estimates for the complex Hessian equation // Anal. PDE, 2014, V.7, pp.227–244.

3. Lu C.H. A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015, V. 431:1, PP.228–259.

4. Sadullaev A., Abdullaev B., Potential theory in the class of m-subharmonic functions// Proc. Steklov Inst. Math., 2012, 279, pp.155–180.

5. Sadullaev A., Definition of Hessians for m-convex functions as Borel measures// Analysis and Applied Mathematics. Birkhauser, Cham, 2024, 6, pp.13–19.

6. Sharipov R.A., Ismoilov M.B. m-convex $(m-cv)$ functions // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2023, V. 13:2, pp. 237–247.

7. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures III// Ann. Math. 2002, V.150, pp. 579–604.

Birinchi Tip Klassik Soha Avtomorfizmlari Xossalarining Tatbiqlari

Erkinboyev Q. S.[1], **Ibrohimova M. H.**[1]

[1]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
qerkinboyev@gmail.com, marjonaibrohimova6@gmail.com

Birinchi tip klassik soha[1,3]: $\Re_1(m,n)$- sohaning har bir elementi m ta satr va n ta ustundan iborat bo‘lgan matritsalardan (matritsaning har bir elementi kompleks son) iborat bo‘lib, quyidagini qanoatlantiradi

$$I^{(m)} - ZZ^* > 0.$$

Bunda $I^{(m)}$- m-tartibli birlik kvadrat matritsa, Z^*- Z matritsaga qo‘shma bo‘lgan matritsaning transponerlanganidir.

$\Re_1(m,n)$ birinchi tip klassik sohaning $P \in \Re_1(m,n)$ nuqtasini O nuqtaga akslantiruvchi avtomorfizlari[1] quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi_P(Z) = Q(Z-P)(I-P^*Z)^{-1}R^{-1}$$

bunda

$$Q(I-PP^*)Q^* = I^{(m)}, R(I-P^*P)R^* = I^{(n)}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Bizga $f:\ \Re_1(m,n)\to\Omega$ bigolomorf akslantirish [2] berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Ushbu $\psi_P=f\circ\varphi_P\circ f^{-1}$ akslantirish uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

1^0. $\psi_P\circ\psi_P=Z$ (Involyutsiya bo‘lish xossasi);

2^0.$\psi_P\in Aut(\Omega)$;

3^0. ψ_P akslantirish Ω sohada tranzitiv;

4^0. $\forall\psi\in Aut(\Omega)$ golomorf uchun φ_U unitar almashtirish mavjudki ushbu

$$\psi=\varphi_U\circ\psi_P$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М.: Наука. 3-е изд., 1985 г.

3. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск, 2017. 293 с.

$B^{(2)}_{m,n}$ Matritsaviy Shar Avtomorfizmlarining Ba’zi Xossalari

Ibrohimova M. H.[1], Jumaboyev R. SH.[1], Erkinboyev Q. S.[1]

[1]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
marjonaibrohimova6@gmail.com, r.jumaboyev95@gmail.ru, qerkinboyev@gmail.com

$\mathbb{C}^{mn}$ fazoni qaraylik. Bu fazodagi $z\in\mathbb{C}^{mn}$ nuqtalarni quyidagicha yozamiz:

$$z=(z_{11},z_{12},...,z_{1n},\ \ldots,z_{m1},z_{m2},...,z_{mn}),$$

bu yerda, $z_{\mu\nu}=x_{\mu\nu}+iy_{\mu\nu},\ \ \mu=1,2,...,m,\ \ \nu=1,2,...,n.$

Ba’zi amaliy masalalarda $\mathbb{C}^{mn}$ fazoning nuqtalarini $[m\times n]$ matritsa sifatida yozish qulay bo‘ladi:

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}...z_{1n}\\ . & . \ \ ... \ \ .\\ z_{m1} & z_{m2}...z_{mn}\end{pmatrix}.$$

U holda ushbu $\mathbb{C}^{mn}\simeq\mathbb{C}[m\times n]$ izomorfizm bo‘ladi.

Ba’zi hollarda $\mathbb{C}[m\times m]$ fazo bilan birgalikda n ta $\mathbb{C}[m\times m]$ fazoning dekart ko‘paytmalaridan tashkil topgan $\mathbb{C}^n[m\times m]$ fazo ham keltiriladi:

$$\mathbb{C}^n[m\times m]=\underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times...\times\mathbb{C}[m\times m]}_{n-ta}.$$

Ikkinchi tip matritsaviy shar $B^{(2)}_{m,n}$ ushbu

$$B^{(2)}_{m,n}=\{Z=(Z_1,...,Z_n)\in\mathbb{C}^n[m\times m]:\ I^{(m)}-\langle Z,Z\rangle>0,\ Z_\nu=Z'_\nu,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,n\}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

$B_{m,n}^{(2)}$ shar ostovi (Shilov chegarasi) quyidagicha aniqlanadi

$$X_{m,n}^{(2)} = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \ I^{(m)} = \langle Z, Z\rangle \, , \ Z_\nu = Z_\nu^{'}, \ \nu = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Endi $P \in B_{m,n}^{(2)}$ nuqtani 0 nuqtaga akslantiruvchi ushbu

$$W_k = \bar{R}^{-1}\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (Z_s - P_s) \, R_{sk} \ , \quad k = 1, ..., n \tag{1}$$

akslantirishni qaraylik.

1-teorema[1]. (1) akslantirish $B_{m,n}^{(2)}$ shar avtomorfizmi bo‘lishi uchun ushbu

$$R^{'} \left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) \bar{R} = I^{(m)}$$

munosabatning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

Qulaylik uchun $P \in B_{m,n}^{(2)}$ nuqtani 0 nuqtaga akslantiruvchi (1) avtomorfizmni $\varphi_P(Z)$ deb belgilab, uning uchun o‘rinli bo‘ladigan xossalarni quyidagi teoremada keltiramiz.

2-teorema. $B_{m,n}^{(2)}$ shar avtomorfizmi $\varphi_P(Z)$ uchun ushbu

$$P_i R_{ii} + \bar{R} P_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda quyidagi xossalar o‘rinli.

1^0. $\varphi_P(P) = 0, \ \varphi_P(0) = P$;

2^0. $\frac{\partial W_k(P)}{\partial Z_i} = R^{'} R_{ik}, \ \frac{\partial W_k(0)}{\partial Z_i} = \bar{R}^{-1}\left(P_i^* \bar{R} P_k + R_{ik}\right)$;

3^0. Ixtiyoriy $Z, \tilde{Z} \in B_{m,n}^{(2)}$ lar uchun

$$\det\left(I^{(m)} - \left\langle \varphi_P(Z), \varphi_P\left(\tilde{Z}\right)\right\rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \left\langle Z, \tilde{Z}\right\rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \left\langle P, \tilde{Z}\right\rangle\right)};$$

4^0. Ixtiyoriy $Z \in B_{m,n}^{(2)}$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\det\left(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z)\rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle P, Z\rangle\right)};$$

5^0. Ixtiyoriy $Z \in B_{m,n}^{(2)}$ uchun

$\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$. (Involyutsiya bo‘lish xossasi.)

Yuqorida keltirilgan 2-teorema $m = 1$ holda Rudinning[2] "Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$"kitobidagi 2.2.2 teoremani ifodalaydi.

Adabiyotlar Ro‘yxati

1. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск, 2017. 293 с.

2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.. – М.: Мир,1984. – 456 с.

Maxsus Veyl Sohasida Lokal Qoldiqning Bir Ko‘rinishi

Maxamadiyeva A.Sh.
Mirzo Ulug’bek nomidagi O’zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O’zbekiston;
azizamaxamadiyeva@gmail.com

Ko’p o’zgaruvchili kompleks analizda lokal qoldiqlar ko’p kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasida funksiyalarning soha ichidagi qiymatlarini sohaning butun chegarasi yoki chegaraning bir qismi orqali bog’lash kabi masalalarida asos sifatida xizmat qiladi. Shuning uchun ko’p o’zgaruvchili qoldiqlarni tadqiq etish funksiyalar nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi

Bu ishda lokal qoldiq $\mathbb{C}^2$ fazoda tayin akslantirishlar orqali aniqlangan.

1-ta’rif[1]. Ushbu $D \subset \mathbb{C}^n$ soha hamda chekli sondagi $W_i \in \mathcal{O}(D)$ funksiyalar va $D_i \Subset W_i(D), \quad i = 1, ..., N$ shartni qanoatlantiruvchi tekis shakllar berilgan bo’lsin. Agar

$$\Pi = \{z \in D : \ W_i(z) \in D_i, \ i = 1, \ \dots \ , \ N\}, (1)$$

to’plam D sohada kompakt yotsa, u holda bu to’plamga poliedrik to’plam deyiladi. Bu to’plam har doim ham bo’g’lamli bo’lavermaydi. (1) ko’rinishdagi bog’lamli to’plamni *poliedrik soha* deb ataymiz

2-ta’rif [1]. Agar (1) ko’rinishidagi to’plamda $N \geq n$ va

1) uning chegarasi

$$\sigma_i = \left\{z \in D : \quad W_i(z) \in \partial D_i, \ W_j(z) \in \overline{D}_j, \ j \neq i\right\}$$

$(2n-1)$ −o’lchamli to’plam;

2) uning ixtiyoriy k $(2 \leq k \leq n)$ − qirrasining o’lchami $2n-k$ sondan oshmasa, u holda (1) to’plamga Veyl to’plami deyiladi. Veyl to’plamining n−o’lchamli $\sigma_{i_1 \, \dots \, i_n} = \sigma_{i_1} \cap \dots \cap \sigma_{i_n}$ qirrasiga uning ostovi deyiladi. Bog’lamli Veyl to’plamiga *Veyl sohasi* deyiladi.

Xefere[2] teoremasiga ko’ra Π Veyl poliedrining biror U atrofida shunday $P_\nu^i(\xi, \ z) \in \mathcal{O}(U \times U)$ funksiyalar mavjudki, uning uchun barcha $(\xi, \ z) \in U \times U$ larda ushbu

$$W_j(\xi) - W_j(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - z_\nu) \ P_\nu^i(\xi, z) \ , \ \ j = 1 \ , \dots , \ n.$$

tenglik o’rinli bo’ladi. Bu funksiyalardan tuzilgan det $\| P_\nu^i(\xi, \ z)\|$ determinantni $H(\xi, \ z)$ bilan belgilaymiz.

1-teorema (Veyl [2],[3],[4]). Faraz qilaylik, Π -soha D_i silliq chegarali sohalar bilan aniqlangan (1) Veyl sohasi bo’lsin. Agar $f \in \mathcal{O}(\Pi) \bigcap C\left(\overline{\Pi}\right)$ bo’lsa, u holda ixtiyoriy $z \in \Pi$ nuqta uchun quyidagi

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 \dots i_n} \int\limits_{\sigma_{i_1 \dots i_n}} \frac{f(\xi)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \{W_{i_\nu}(\xi) - W_{i_\nu}(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^{i_1} & \dots & P_n^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_1^{i_n} & \dots & P_n^{i_n} \end{vmatrix} d\xi, (3)$$

formula o’rinli, bu yerda yig’indi barcha soha asosini aniqlovchi qirralarning tartiblangan indekslari bo’yicha hisoblanadi $(1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N)$,P_ν^i - Hefer koeffitsiyentlari va $d(\xi) = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$. Qirralar esa, barcha ∂D_i lar musbat yo’nalganligi sharti bo’yicha yo’naltirilgandir.

Endi (3) Veyl integral formulasi orqali lokal qoldiqni aniqlaymiz. Ushbu [5] ishda qanday integral formulalar orqali lokal qoldiq aniqlash mumkinligi keltirilgan. Ta'kidlash lozimki, (3) formula [5] ishda keltirilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Shuning uchun (3) formula orqali lokal qoldiq yozish mumkin.

$0 \in \mathbb{C}^2$ nuqtaning $\Pi = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < \frac{1}{2}\right\}$ atrofida golomorf bo'lgan $h(z) : \Pi \to \mathbb{C}$ funksiyaning 0 nuqtadagi $W_1(z_1, z_2) = z_1$, $W_2(z_1, z_2) = z_2$ va $W_1(z_1, z_2) = z_1 z_2$ akslantirishlarga bog'liq bo'lgan lokal qoldig'i

$$\underset{0}{res}_{W_1,W_2,W_3} h(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{h(\xi)\, z_1 d\xi_1 \wedge d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_1\xi_2 - z_1 z_2)} + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{h(\xi)\, \xi_2 d\xi_1 \wedge d\xi_2}{(z_2 - \xi_2)(\xi_1\xi_2 - z_1 z_2)}\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu yerda Γ_1 va Γ_2 Π sohaning ostovlari

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Главная редакция физико-математической литературы издательства -Наука, част 2. М., 1976,280 с.

2. Айзинберг Л.А., Южаков А.П.Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе - Наука, Новосибирск, 1979, 366с.

3. Айзинберг Л.А.Формула Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Наука, Новосибирск, 1990, 248 с.

4. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. 410 с.

5. Цих А.К., Шаимкулов Б.А. Интегральные реализации вычета Гротендика и его преобразование при композициях //Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. 2005. Выпуск 1. С. 151-155.

$\mathbb{C}^2$ Fazodagi Veyl Sohasida Lokal Qoldiqning Xossalari

Maxamadiyeva A.Sh.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
azizamaxamadiyeva@gmail.com

Ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida lokal qoldiqlar, golomorf va maxsus ko'rinishdagi meromorf funksiyalarni tadqiq qilishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu ma'noda lokal qoldiqlarni va ularning xossalarini o'rganish maqsadga muvofiqdir.

Bu ishda maxsus sohadagi lokal qoldiqning muhim hossalarning bir qismi keltirilmag.

Ushbu ([1],[2],[3]) ishlarda $\mathbb{C}^n$ fazodagi Veyl sohasi va bu sohada integral formula aniqlangan.

$\mathbb{C}^2$ fazo 0 nuqtasining atrofi bo'lgan

$$\Pi = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < \frac{1}{2}\right\}, \tag{1}$$

chegarasi silliq chiziqlar bilan aniqlangan Veyl sohasini qaraymiz. (1) sohada golomorf bo'lgan $h(z) : \Pi \to \mathbb{C}$ funksiyaning 0 nuqtadagi $W_1(z_1, z_2) = z_1$, $W_2(z_1, z_2) = z_2$ va $W_1(z_1, z_2) = z_1 z_2$ akslantirishlarga bog'liq bo'lgan lokal qoldig'i

$$\underset{0}{res}_{W_1,W_2,W_3} h(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int_{\Gamma_1} \frac{h(\xi)\, z_1 d\xi_1 \wedge d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_1\xi_2 - z_1 z_2)} + \int_{\Gamma_2} \frac{h(\xi)\, \xi_2 d\xi_1 \wedge d\xi_2}{(z_2 - \xi_2)(\xi_1\xi_2 - z_1 z_2)}\right), \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.Bu yerda Γ_1 va Γ_2 Π sohaning ostovlari

Endi (2) lokal qoldiqni ayrim xossalari keltiramiz

1-xossa: Lokal qoldiq W_k akislantirishning almashtirilishiga nisbatan kososimmetrik bo'ladi:

$$res_{(W_1,W_2,W_3)} = (sign\tau) res_{(W_{\tau(1)},W_{\tau(2)},W_{\tau(3)})}$$

Ushbu W_1, W_2, W_3 funksiyalar yordamida hosil qilingan, $0 \in \mathbb{C}^2$ nuqtada golomorf funksiyalar halqasini $\mathcal{O}_0$ orqali, uning idealini esa $I_0(W) = I_0(W_1, W_2, W_3)$ kabi belgilaymiz.

2-xossa: Agar h funksiya $I_0(W)$ idealga tegishli bo'lsa, u holda 0 nuqtada lokal qoldiq nolga teng bo'ladi:

$$\underset{0}{res}_{W_1,W_2,W_3} h(z) = 0.$$

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. Айзинберг Л.А., Южаков А.П.Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе - Наука, Новосибирск, 1979, 366с.

2. Айзинберг Л.А.Формула Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Наука, Новосибирск, 1990, 248 с.

3. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. 410 с.

Ikki Zarrachali Diskret Shryodinger Operatorining Quyi Spektri Haqida

Muminov Z. I.[1], **Quljonov O'. N.**[2]

[1] Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
e-mail: zimuminov@gmail.com

[2] Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston;
e-mail: uquljonov@bk.ru

d o'lchamli panjara $\mathbb{Z}^d$ da harakatlanuvchi va o'zaro ta'sir energiyasi $\hat{V}$ bo'lgan ikki kvant zarrachali sistemaning $\hat{H}$ energiya operatori $\ell^2((\mathbb{Z}^d)^2)$ Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida quyidagicha aniqlanadi

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V},$$

bu yerda $\hat{H}_0$ o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\hat{\Delta}_1 - \frac{1}{2m_2}\hat{\Delta}_2,$$

bu yerda

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta} \otimes I, \quad \hat{\Delta}_2 = I \otimes \hat{\Delta}.$$

Bunda I operator $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazodagi ayniy operator, $m_1, m_2 > 0$ lar esa zarrachalarning massalari, $\hat{\Delta}$ standart diskret Laplas operatori bo‘lib, u quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\hat{\Delta} = \sum_{j=1}^{d} \big(\hat{T}(e_j) + \hat{T}(-e_j) - \hat{T}(0)\big).$$

Bu yerda e_j, $j = 1, \ldots, d$ lar $\mathbb{Z}^d$ dagi birlik vektorlar, $\hat{T}(s)$ esa $s \in \mathbb{Z}^d$ ga siljitish vektorlari bo‘lib, u

$$(\hat{T}\hat{f})(s) = \hat{f}(x+s), \quad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d),\ s \in \mathbb{Z}^d.$$

formula yordamida aniqlanadi. $\hat{V}$ operator $\hat{v}(x-y)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori, ya’ni

$$(\hat{V}_{12}\hat{f})(x,y) = \hat{v}(x-y)\hat{f}(x,y), \quad \hat{f} \in \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

bunda $\hat{v} \geq 0$, $\hat{v}(\cdot) \neq 0, \hat{v} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$.

Energiya operatori $\hat{H}$ ning impuls tasviri

$$H = F^{-1}\hat{H}F : L_2((\mathbb{T}^d)^2) \to \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$$

quyidagicha aniqlanadi:

$$(Hf)(p,q) = E(p,q)f(p,q) - \int_{\mathbb{T}^d} v(p-t)f(t)dt.$$

Bu yerda $E(p,q)(\frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(q))$, $v(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\Sigma_{s\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(s)e^{i(s,p)}$,

$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{d}(1-\cos p_j)$, $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{T}^d$,

Energiya operatori $\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}$ va Hilbert fazosi $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ lar Fon Neymanning to‘g’ri integraliga yoyiladi, ya’ni

$$L_2((\mathbb{T}^d)^2) = \int_{\mathbb{T}^d} \oplus L_2(\mathbb{F}_k)dk, \ H^{(2)} = \int_{\mathbb{T}^d} \oplus \tilde{h}(k)dk,$$

bu yerda

$$\mathbb{F}_k = \{(p,q) \in (\mathbb{T}^d)^2,\ p+q = k\} \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Har bir $k \in \mathbb{T}^d$ da $\tilde{h}(k) : L_2(\mathbb{F}_k) \to L_2(\mathbb{F}_k)$ operatorlar quyidagi $h(k) : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$ operatorlarga unitar ekvivalent bo‘ladi:

$$h(k) = h_0(k) - V.$$

Bu yerda $h_0(k)$ operatorning $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ elementga ta’siri quyidagicha aniqlanadi:

$$(h_0(k)f)(p) = \tilde{E}_k(p)f(p),$$

bu yerda

$$\tilde{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p) = \Sigma_{j=1}^{d}[\mu(0) - |\mu(k_j)|\cos(p_j - \varphi(k_j))],$$

Bunda

$$\mu(k_j) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}e^{-ik_j}, \quad \varphi(k_j) = arg\mu(k_j),\ k_j \in \mathbb{T}.$$

$k \in \mathbb{T}^d$ ga ikki zarrachali sistemaning kvaiimpulsi, $h(k), k \in \mathbb{T}^d$ operatorlarga H operatorning qatlam operatorlari deyiladi.

$h_0(k)$ operatorning koordinat tasviri $\hat{h}_0(k) = Fh_0(k)F^{-1} : \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2) \to \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ operator quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$(\hat{h}_0(k)\hat{f})(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\Big(2\mu(0)I\hat{f}(x) - |\mu(k_j)|(\hat{f}(x+e_j) - \hat{f}(x-e_j))\Big).$$

Endi ushbu ishdagi asosiy teoremani keltiramiz.

1-teorema. *Faraz qilaylik $m_1 = m_2$ va $z_0(k) = \inf\sigma(\hat{h}(k)) < \mathfrak{e}_m(k)$ bo'lsin. U holda:*
a) agar $k \in (-\pi;\pi)^d$ bo'lsa, $z_0(k)$ soni $\hat{h}(k)$ operatorning oddiy xos qiymati bo'ladi va unga mos xos vektorni qa'tiy musbat qilib tanlash mumkin.
b) agar $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi;\pi)^d$ bo'lsa, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun shunday $\hat{v}(x)$ potensial mavjud bo'lib, $z_0(k)$ soni $\hat{h}(k)$ operatorning n karrali xos qiymati bo'ladi va unga mos n ta xos vektorlarning barchasini musbat qilib tanlash mumkin.

Adabiyotlar

1. Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I. // The Threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys., pp.91-115, 2006.

2. Rid M., Saymon B. Metodi matematicheskoy fiziki. T.4. Analiz operatorov. Russiya: M.: Mir, 1982.

3. Abdullayev J. Teoriya vozmusheniy dlya dvuxchastichnogo operatora Shryodingera na reshetke // TMF, T.145 (1), 2005, pp.212-220.

4. Muminov Z., Kuljanov U. Nijniye svyazanniye sostoyaniya odnochastichnix gamiltomianov na tselochislennix reshetke // Matematicheskiye trudi, Russiya. T.1, 2012, pp.129-140.

$\Re_{IV}$-Tip Klassik Sohaning Hajmi Haqidagi Teorema

Zarifova D.B.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
zarifovadinora@gmail.com

Ushbu ishda biz to'rtinchi tip klassik $\Re_{\mathrm{IV}}(n)$ soha va uning xajmini hisoblash haqidagi teoremani keltiramiz. Bu soha Li shari deb ham ataladi. To'rtinchi tip klassik $\Re_{\mathrm{IV}}(n)$ soha (Li shari)

$$\Re_{IV}(n) = \Big\{z \in \mathbb{C}^n : |zz'|^2 - 2\bar{z}z' + 1 > 0,\ |zz'| < 1\Big\} \tag{1}$$

shartni qanoatlantiruvchi n o'lchamli vektorlardan tashkil topgan, bu yerda z' vektor z vektorning transponerlanganidir.

To'rtinchi tip klassik $\Re_{IV}(n)$ sohaning ostovi ushbu ko'rinishda aniqlanadi:

$$\aleph_{IV}(n) = \Big\{z \in \mathbb{C}^n : |zz'|^2 - 2\bar{z}z' + 1 = 0,\ |zz'| = 1\Big\}. \tag{2}$$

Biz Li sharini bitta tengsizlik orqali ifodalashimiz ham mumkin. Buning uchun (1) munosabatni quyidagicha qayta yozib olamiz:

$$(1-\bar{z}z')^2 > (\bar{z}z')^2 - |zz'|^2 > (\bar{z}z')^2 - 1. \tag{3}$$

(3) munosabatdan

$$\bar{z}z' < 1 \tag{4}$$

ekanligi kelib chiqadi.

(3) tengsizlikning birinchi qismi orqali quyidagi ifodani hosil qilishimiz mumkin:

$$1-\bar{z}z' > \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}. \tag{5}$$

Bu yerda $\bar{z}z' \geq |zz'|$ munosabatdan foydalanayabmiz.

Barcha z vektorlar (1) tengsizlikni qanoatlantirganligi uchun (5) tengsizlikni ham qanoatlantiradi. Ikkinchi tomondan esa (5) tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir z vektor (1) tengsizlikni ham qanoatlantiradi.

Lemma. ([1]). $\alpha > -1$ va $\beta > -(n+\alpha)$ sonlar uchun ushbu

$$L_n(\alpha,\beta) = \int\limits_{\Re_{IV}(n)} \left(1-\bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(1-\bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+n)} \frac{1}{(\alpha+\beta+n)}, n \in N \tag{6}$$

formula o‘rinli.

Endi yuqoridagi Lemmadan foydalangan holda quyidagi to‘rtinchi tip klassik $\Re_{\mathrm{IV}}(n)$ soha hajmini hisoblash haqidagi teoremani keltiramiz:

Teorema. Agar (6) munosabatda $\alpha = \beta = 0$ deb olsak, u holda to‘rtinchi tip klassik $\Re_{\mathrm{IV}}(n)$ sohaning hajmi uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$V(\Re_{\mathrm{IV}}(n)) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{1}{n!}. \tag{7}$$

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. Hua Luogeng, Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains, AMS, 1963.

2. Shabat B.V., Introduction to Complex Analysis Part II Functions of Several Variables, Nauka, Fiz. Mat. Lit., M., 1985 (in Russian).

3. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Наука, 1961. – 192 с.

4. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. 410 с.

5. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск. 2017.– 292 с.

СЕКЦИЯ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
SECTION 6. PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Phase Diagram Of The 1-d Ising Model With Competing Interactions Up To The Third-Nearest-Neighbour

Ganikhodjaev N.N.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
e-mail nasirganikhodjaev@gmail.com

The Ising model represents a simplified mathematical description of interacting magnetic spins within a lattice structure [1]. It assumes that each spin can take one of two possible values: up or down, representing the spin alignment of individual atoms or molecules. The interactions between neighbouring spins are considered, leading to the emergence of collective behaviour and the manifestation of macroscopic magnetic properties.

The Ising model on the Bethe lattice of general connectivity, with competing interactions between the first-, second-, and third-neighbour spin generations has been studied in [2]. The phase diagram was studied for several ranges of the competing parameters showing the appearance of several features and modulated phases arising from the frustration effects introduced by the third-nearest-neighbour interaction.

We consider 1-D Ising models with competing binary interactions up to the first-second and -third nearest-neighbours. It is shown that the set of all limit Gibbs measures, i.e. phase diagram, consist of ferromagnetic, anti-ferromagnetic, paramagnetic and modulated phases. Also it is proven that on the set of ferromagnetic phases one can reach the phase transition.

Literature

1. Georgii, H.O. Gibbs Measures and Phase Transitions. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics 9, Walter de Gruyter and Co., 1988.

2. da Silva C.R. and Coutinho S. Ising model on the Bethe lattice with competing interactions up to the third-nearest-neighbor generation //Phys. Rev. B. 1986. Vol. 34, №. 5-6. P. 7975–7985.

The Conditional Limit Theorem For Critical Reduced Process Possibly With Infinite Variance

Khusanbaev Ya.M.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan;
yakubjank@mail.ru

Let $\{Z(k), k \geq 0\}$ be a random Galton-Watson branching process starting with probability 1 from one particle in which the number offspring of one particle has the generating function

$$f(s) := Es^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, 0 \leq s \leq 1$$

Let $A = f'(1) < \infty$. A branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$ be called subcritical, critical, or supercritical if $A < 1, A = 1$ or $A > 1$, respectively. Let us denote by $Z(m,n)$ the number of particles at time $m(m \leq n)$ in the process $\{Z(k), k \geq 0\}$, whose descendants exist at time n. The random process $\{Z(m,n), 0 \leq m \leq n\}$ is called the reduced process generated by the Galton-Watson branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$. The reduced process $\{Z(m,n), 0 \leq m \leq n\}$ is called subcritical, critical, or supercritical if the corresponding Galton-Watson branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$ is such, respectively. The reduced processes for Galton-Watson processes were introduced by Fleischmann and Prehn [1]. Fleischmann and Sigmund-Schulze [2] proved a functional limit theorem (under the assumption $Z(0) = 1, Z(n) > 0$) in which the convergence in Skorokhod space of critical reduced processes to the Yule process (with a modified time scale) has been established. Liu and Vatutin [3] proved conditional limit theorems (under the condition $0 < Z(n) \leq \tau(n)$) for the critical reduced processes starting with one particle ($Z(0) = 1$) and with a finite variance of offspring of one particle, where $\tau(n) = O(n)$, or $\tau(n) = o(n)$ as $n \to \infty$.We also note work [4], in which a similar problem was solved for Bellman-Harris processes.

Let $f_n(s)$ denote the n-th iteration of generating function $f(s)$:

$$f_0(s) := s, f_1(s) := f(s), ..., f_n(s) := f_{n-1}(f(s)).$$

Let $G_n(x) := P((1 - f_n(0))Z(n) < x/Z(n) > 0)$, $G(x)$ is distribution function with the Laplace transform g

$$g(\lambda) := 1 - \lambda(1 + \lambda^{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \lambda \geq 0.$$

We proved the following theorem.

Theorem. Let $A = f'(1) = 1$ and $f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, $s \in [0,1)$. Then for any $t \in [0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} E[s^{Z(nt,n}/0 < Z(n) \leq a(1 - f_n(0))^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{t^{1/a}G(a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j s^j}{j!} G^{*j}\left(\frac{a}{(1-t)^{1/a}}\right) \frac{d^j}{d\lambda^j} g\left(\frac{1-t}{t}, \lambda\right)|_{\lambda=1}$$

Corollary. If the conditions of Theorem are satisfied, then

$$\lim_{n\to\infty} P\left(d(n) \leq tn/0 < Z(n) \leq a(1 - f_n(0))^{-1}\right) = tG\left(\frac{a}{t^{1/a}}\right)\frac{1}{G(a)}.$$

In the case where $f''(1) < \infty$, the corresponding results, obtained in [3] , follow from the obtained results.

In the case when $\alpha = 1, \quad B < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} L\Big(1 - f_{\phi(n)}(0)\Big) = \lim_{n\to\infty} L\Big(1 - f_n(0)\Big) = B$$

We note that the case of the existence of a dispersion in the number offspring of one particle was investigated in [3].

Literature

1. Fleischmann K., Prehn U. Ein Grenzfersatz fur subkritische Verzweigungsprozesse mit eindlich vielen Typen von Teilchen // Math. Nachr.,64 (1974), 233–241.

2. Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton-Watson processes // Math. Nachr., 79 (1977), 357–362.

3. Liu M., Vatutin V. Reduced processes for small populations // Theory Probab. Appl., 63:4 (2018).

4. Vatutin V.A., Hong W., Ji Ya. Reduced critical Bellman–Harris branching processes for small populations // Discrete Math. Appl., 28:5 (2018), 319–330.

The Central Limit Theorem For Sum-Functions Of m-tuples Of Spacings

Lazareva V.[1], **Mirakhmedov Sh.**[2]

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan ;
1748mailbox@mail.ru

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan ;
shmirakhmedov@yahoo.com

Let $U_1 \le U_2 \le \ldots \le U_{n-1}$ be an ordered statistics of a sample of size $n-1$ from a uniform on the interval $[0,1]$ distribution. We assume $U_0 = 0$, $U_n = 1$ and $U_k = 1 + U_{k-n}$ for $k \ge n$. The overlapping spacings defined as $S_{k,m} = U_{k,m} - U_k$, and the non-overlapping, or disjoint, spacings are defined as $\bar{S}_{k,m} = U_{(k+1)m} - U_{km}$, $k = 0, \ldots, n-1$, where $m \ge 1$ is the step or order of spacings.The $S_k = S_{k,1}$ is referred to as a simple spacings. Consider the following form of spacing-statistics:

$$Q_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} h_k\left(nS_{k,m}\right) \quad \textit{and} \quad \bar{Q}_{n,m} = \sum_{k=0}^{[n/m]} h_k\left(n\bar{S}_{k,m}\right)$$

here and in what follows h_ks are real functions of non-negative argument (s), $[a]$ stands for the integer part of a. If $h_k = h$ the same for all k, $Q_{n,m}$ and $\bar{Q}_{n,m}$ are known as symmetric spacings-statistics. The limit theorems for the symmetric variant of $Q_{n,m}$ where $m = m(n) \to \infty$ in details was studied by [1]. Most general condition of asymptotic normality of $\bar{Q}_{n,m}$ is derived by [2]. Holst [3] considered the random variable (r.v.)

$$Z_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} h\left(nS_k, \ldots, nS_{k+m-1}\right) \tag{2}$$

and proved its asymptotically normality if $0 < Varh\left(X_0, \ldots, X_{m-1}\right) < \infty$, where and throughout $X_0, \ldots, X_{n-1}$ are independent r.v.s having common standard exponential distribution. We note that the statistics based on spacings generated by sequences of local alternative distributions converging to the uniform one can be reduced to a non-symmetric variant of uniform spacings.This fact motivated us to consider the following class of statistics:

$$R_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} h_k\left(nS_k, \ldots, nS_{k+m-1}\right)$$

R.v. $Q_{n,m}$ is a special variant of $R_{n,m}$, where $h_k(x_1, \ldots, x_m) = h_k(x_1 + \ldots + x_m)$ for all k, whereas $\bar{Q}_{n,m}$ follows by putting $h_k(x_1, \ldots, x_m) = h_k(x_1 + \ldots + x_m)$ for $k = lm$ where $l = 0, 1, \ldots, [n/m] - 1$, and else $h_k(x_1, \ldots, x_m) = 0$.

Our objective in the present paper is to establish the asymptotically normality of r.v. $R_{n,m}$ under the Liyapunov's type condition. The results includes situation where $m = m(n) \to \infty$ as $n \to \infty$, but with the proviso that $m = o(n)$.

Throughout the paper every unspecified asymptotic relations considered as $n \to \infty$, $\to^d$ used for convergence in distribution, $N(0,1)$ stands for the standard normal r.v., for a given variables a_i we set $a_k^m := (a_k, \ldots, a_{k+m-1})$, $|a_k^m| := a_k, \ldots, a_{k+m-1}$.

We remind well-known fact that the distribution of $(nS_0, \ldots, nS_{n-1})$ coincides with the conditional distribution $(X_0, \ldots, X_{n-1})$ given $X_0 + \ldots + X_{n-1} = n$. We set $X_{n+j} = X_j$, $j = 0, 1, \ldots$,

$$g_k\left(x_1^m\right) := h_k\left(x_1^m\right) - Eh_k\left(X_k^m\right) - B_n\left(|x_1^m| - m\right) m^{-1},$$

$$B_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k-m+1}^{k+m-1} cov\left(h_k\left(X_k^m\right), |X_j^m| m^{-1}\right),$$

$$A_{n,m} := \sum_{k=0}^{n-1} Eh_k\left(X_k^m\right), \quad \sigma_{n,m}^2 := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k-m+1}^{k+m-1} cov\left(h_k\left(X_k^m\right), h_j\left(X_j^m\right)\right) - nB_n^2.$$

Theorem. *If $m = m(n) = o(n)$, and for some $r > 2$*

$$\frac{m^{r-1}}{\sigma_{n,m}^r} \sum_{k=0}^{n-1} E|g_k\left(X_k^m\right)|^r \to 0$$

then $\left(R_{n,m} - A_{n,m}\right)/\sigma_{n,m} \to^d N(0,1)$.

Let's consider the symmetric statistics $Z_{n,m}$. Notice that we are dealing with a triangular array situation, since $m = m(n)$. Set now

$$g\left(x_0^m\right) = h\left(x_0^m\right) - Eh\left(X_0^m\right) - \left(x_0^m - m\right) m^{-1} \sum_{j=-m+1}^{m-1} cov\left(h\left(X_0^m\right), |X_j^m|\right).$$

We have

$$A_{n,m} = nEh\left(X_0^m\right),$$

$$\sigma_{n,m}^2 = n\left[\sum_{j=-m+1}^{m-1} cov\left(h\left(X_0^m\right), h\left(X_j^m\right)\right) - \left(\sum_{j=-m+1}^{m-1} cov\left(h\left(X_0^m\right), |X_j^m|\right)\right)^2\right] =: n\sigma_m^2.$$

The last quantity coincides with that of [3] (notice that Holst assumed $Eh\left(X_0^m\right)=0$).

Corollary. *If $m=m(n)=o(n)$, and for some $r>2$*

$$\frac{m^{r-1}}{n^{(r-2)/2}\sigma_m^r}E|g_{k,n}\left(X_0^m\right)|^r\to 0$$

then $\left(Z_{n,m}-nEh\left(X_0^m\right)\right)/\sigma_m\sqrt{n}\to^d N(0,1)$.

Literature

3. Hall P. On powerful distributional tests based on sample spacings. Journal of Multivariate Analysis, Elsevier. 1986. Vol. 19(2), pp. 201–224.

2. Mirakhmedov, S.A., Lower Estimation of the Remainder Term in the CLT for a Sum of the Functions of k-Spacings, Statistics and Probability Letters, Elsevier.2005. Vol. 73(4), pp. 411–424.

1. Holst L. Asymptotic normality of sum-functions of spacings. Ann. Probabl. 1979. Vol. 7, pp.1066–1072.

Approximation By A Normal Distribution In An Infinite Balls-In-Boxes Occupancy Scheme

Mirakhmedov Sh.[1], **Hamdamov A.**[2]

[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan ;
shmirakhmedov@yahoo.com

[2] Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan ;
1ahadhamdamov2396@gmail.com

We consider an infinite balls-in-boxes occupancy scheme defined in the following way: There are $s\geq 1$ different types of balls, with n_k balls of kth type, $k=1,,s$. The balls are randomly and independently are allocated into an infinite set of boxes labelled by $1,2,$. Each ball of kth type has probabilities $p_{k,j}\geq 0$ of being assigned to the jth box, $j=1,2,...$, $k=1,2,,s$. Let $\eta_{k,m}$ be the number of particles of kth type in the m-th box, after all allocations have been made, for $k=1,2,...,s,\ m=1,2,...$. We consider the random variable $\mu_r(n)$, where $r=(r_1,...,r_s)$, integers $r_j\geq 0$, $r_1+...+r_s\geq 1$, which represents the number of boxes containing exactly r_k particles of kth type, after all particles of all types have been allocated, viz.,

$$\mu_r(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{I}\{\eta_{1,m}=r_1,...,\eta_{s,m}=r_s\}$$

where $\mathbf{I}\{A\}$ denotes the indicator of the event A, $n=(n_1,...,n_s)$, $r=(r_1,...,r_s)$. Set $\pi_k(a)=e^{-a}a^k/k!$, $a>0$, $\xi_{k,m}$ is a Poison random variable whose expectation is $n_kp_{k,m}$,

$$\Pi_m(n,r)=\prod_{k=1}^{s}\pi_{r_k}(n_kp_{k,m}),\quad P_{i,2}=\sum_{m=1}^{\infty}p_{i,m}^2.$$

$$\Lambda_r(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\Pi_m(n,r)\ ,\ \gamma_l(n)=\frac{1}{n_l}\sum_{m=1}^{\infty}(r_l-n_lp_{l,m})\Pi_m(n,r)$$

$$g_{r,m}(\xi_{1,m},...,\xi_{s,m})=\mathbf{I}\{\xi_{1,m}=r_1,...,\xi_{s,m}=r_s\}-\Pi_m(n,r)-\sum_{l=1}^{s}\gamma_l(n)(\xi_{l,m}-n_lp_{l,m}),$$

$$\sigma_r^2(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\Pi_m(n,r)(1-\Pi_m(n,r))-\sum_{l=1}^{s}n_l\gamma_l^2(n),$$

$$\alpha_{3,r}(n)=\sum_{m=1}^{\infty}Eg_{r,m}^3(\xi_{1,m},...,\xi_{s,m}),\quad \kappa_{l,r}(n)=\sum_{m=1}^{\infty}Eg_{r,m}(\xi_{1,m},...,\xi_{s,m})(\xi_{l,m}-n_lp_{l,m})^2,$$

$$\beta_{k,r}(n)=\sigma_r^{-k}(n)\sum_{m=1}^{\infty}E|g_{r,m}(\xi_{1,m},...,\xi_{s,m})|^k,$$

$$\Upsilon_{4,r}(n)=\beta_{4,r}(n)+\sum_{l=1}^{s}\left(P_{l,2}+\frac{1}{n_l}\right)+\prod_{l=1}^{s}\exp\left(-\frac{n_l}{80s(3n_lP_{l,2}+1}\right).$$

Theorem 1. There exists a constant $C(s,r)$ such that

$$\sup_{-\infty<u<\infty}\mid Pr\{\mu_r(n)<u\sigma_r(n)+\Lambda_r(n)\}-\Phi(u)\mid\leq C(s,r)\left(\beta_{3,r}(n)+\sum_{l=1}^{s}\left(P_{l,2}+\frac{1}{\sqrt{n_l}}\right)\right).$$

Set $\nu(n)=max\left\{m:n_1p_{1,m}+...+n_sp_{s,m}\geq 1\right\}$,

$$\mathbb{W}(n,u)=\Phi(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\left[\frac{(1-u^2)\alpha_{3,r}(n)}{6\sigma_r^3(n)}+\frac{1}{3\sigma_r(n)}\sum_{l=1}^{s}\frac{\kappa_{l,r}^{(l)}(n)}{n_l}\right].$$

Teorem 2. There exist a positive constant $C(s,r)$ and $\rho\in(0,1)$ such that

$$\sup_{-\infty<u<\infty}\mid Pr\{\mu_r(n)<u\sigma_r(n)+\Lambda_r(n)\}-\mathbb{W}(n,u)\mid\leq C(s,r)\Upsilon_{4,r}(n)+\rho^{\nu(n)}\log(\beta_{4,r}^{-1}(n)).$$

Let now $p_{l,m}>0$ for $m=1,...,N$ and $p_{l,m}=0$ for all $m>N$, $l=1,...,s$, $N(n_1,...,n_s)\to\infty$ as $min(n_1,...,n_s)\to\infty$. That is each n_l particles of lth type are allocated into a finite number N of boxes according to a multinomial random allocation scheme. Here we are interested in the random variable $\mu_0(n)$,which is the number of empty boxes after particles of all types nave been allocated, viz.,

$$\mu_0(n)=\sum_{m=1}^{N}\mathbf{I}\{\eta_{1,m}+...+\eta_{s,m}=0\}$$

We assume that $Np_{l,m}\leq C$. Denote $\theta_{k,m}=n_kp_{k,m}$ and set $\theta_m=\theta_{i,m}+...+\theta_{s,m}$,

$$\Lambda_0(n)=\sum_{m=1}^{N}\exp(-\theta_m),\quad \gamma_l=\frac{1}{n_l}\sum_{m=1}^{N}\theta_{l,m}\exp(-\theta_m),$$

$$\sigma_0^2(n) = \sum_{m=1}^{N} \left[\exp(-\theta_m)(1 - \exp(-\theta_m)) - N^{-1} \sum_{j=1}^{s} n_j \gamma_j^2 \right]$$

Theorem 3. There exist a constant $C(s)$ such that

$$\sup_{-\infty<u<\infty} |Pr\{\mu_0(n) < u\sigma_0(n) + \Lambda_0(n)\} - \Phi(u)| \le C(s) \left(\frac{1}{\sigma_0(n)} + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right).$$

Define $\mathbb{W}_0(n,u)$ as above $\mathbb{W}(n,u)$, where the function $g_{r,m}$ being replaced by $g_{0,m} = \mathbf{I}\{\xi_{1,m}(n_1) + ... + \xi_{s,m}(n_s) = 0\} - \exp(-\theta_m) + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j(\xi_{j,m}(n_j) - \theta_{j,m})$.

Theorem 4. There exist a constant $C(s)$ and $\rho \in (0,1)$ such that

$$\sup_{-\infty<u<\infty} |Pr\{\mu_0(n) < u\sigma_0(n) + \Lambda_0(n)\} - \mathbb{W}_0(n,u))| \le C(s) \left(\frac{1}{\sigma_0^2(n)} + \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{n_j} + \rho^N \right).$$

The Problem Of Nuclear Temperature Dynamics For Stochastic Differential Equations

Nazarov Z.A.[1], **Ismoilova M.O.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;
zuhrov13@gmail.com
University of Management and Future Technologies, Tashkent, Uzbekistan;
munisaismoilova9718@gmail.com

Stochastic differential equations are a widely used mathematical tool for describing the dynamics of random processes. They extend deterministic differential equations by incorporating stochasticity into system evolution. Such models find applications in various fields, including financial mathematics, physics, biomathematics, and engineering. One fundamental approaches to analyzing and solving these equations is Ito calculus; see [2]. A key element of this framework is Ito's formula, which provides differentiation rules for stochastic processes. Unlike classical calculus, Ito's formula includes an additional quadratic variation term, which plays a crucial role in understanding the behavior of random systems. The development of stochastic calculus and Ito's formula has been significantly influenced by numerous mathematicians. Kiyoshi Ito laid the foundation of this field in the 1940s; see [6]. Later, the theoretical framework was expanded by Gihman and Skorokhod, while Stratonovich introduced an alternative approach to stochastic integration, widely used in physics; see [3] and [7]. The groundbreaking Black–Scholes model, built upon stochastic equations, revolutionized derivative pricing in financial mathematics. Additionally, the contributions of Föllmer, Protter and Karatzas further enriched the understanding of probabilistic models and stochastic control; see [1], [4] and [5]. Stochastic modeling continues to play a vital role in probability theory and mathematical finance. Beyond economics, these techniques are instrumental in describing population dynamics, ecological systems, and signal processing.

An Ito process is a special case of diffusion processes and is given by

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{1}$$

where X_t is a stochastic process, X_0 is the initial value, $\mu(s, X_s)$ is the drift function, $\sigma(s, X_s)$ is the diffusion function, W_s is a Wiener process; see [3]–[7].

If X_t is an Ito process as defined above, and $f(t, X_t)$ is a function that is twice continuously differentiable, then Ito's formula is expressed as

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 dt. \tag{2}$$

This can be considered the stochastic counterpart of the classical chain rule. If $\phi(t)$ satisfies appropriate regularity conditions, the Ito integral is defined as

$$I_t = \int_0^t \phi(s)dW_s. \tag{3}$$

Unlike Riemann or Lebesgue integrals, the Ito integral is defined in a way that accounts for the quadratic variation property of stochastic processes. In this paper, we attempt to solve the problem of nuclear temperature dynamics using Ito's formula within the framework of stochastic differential equation theory. The temperature dynamics of a system can be modeled using the following stochastic differential equation:

$$dX_t = -\lambda(X_t - \theta)dt + \sigma dW_t, \tag{4}$$

where (X_t) is the temperature of the system at time t, θ is the ambient temperature, $\lambda > 0$ is the cooling rate, σ is the intensity of stochastic fluctuations, W_t is a standard Wiener process. Define $Y_t = X_t - \theta$, which simplifies the equation to $dY_t = -\lambda Y_t dt + \sigma dW_t$. To solve this linear stochastic differential equation, we use the integrating factor $M_t = e^{\lambda t}$. Multiplying both sides by $e^{\lambda t}$, we obtain

$$e^{\lambda t}dY_t = -\lambda e^{\lambda t}Y_t dt + \sigma e^{\lambda t}dW_t. \tag{5}$$

Recognizing the total derivative, we rewrite $d(e^{\lambda t}Y_t) = \sigma e^{\lambda t}dW_t$. Integrating both sides from 0 to t, we obtain:

$$e^{\lambda t}Y_t - Y_0 = \sigma \int_0^t e^{\lambda s}dW_s. \tag{6}$$

Solving for Y_t

$$Y_t = Y_0 e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}dW_s. \tag{7}$$

Since $Y_0 = X_0 - \theta$, substituting back gives

$$X_t = \theta + (X_0 - \theta)e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}dW_s. \tag{8}$$

As a conclusion, we can state that $\theta+(X_0-\theta)e^{-\lambda t}$ describes the classical cooling process where the temperature X_t exponentially approaches θ. Additionally, $\sigma e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}dW_s$ represents the effect of random fluctuations on the temperature. As $t \to \infty$, the deterministic term converges to θ, and the stochastic term ensures that X_t fluctuates around θ. This model is applicable in reactor cooling systems, environmental temperature modeling, and semiconductor heat dissipation.

Literature

1. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. Walter de Gruyter, 2016.
2. Gihman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations. Springer, 1972.
3. Gihman I.I., Skorokhod A.V. The Theory of Stochastic Processes II. Springer, 1979.
4. Karatzas I., Shreve S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, 1991.
5. Protter P.E. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer, 2004.
6. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев–1968.

Law Of Large Numbers For Random Fields With Values In $l_p(1 \le p \le 2)$

Ruzieva D.S.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek;
dilnura.saidovna@gmail.com

We are interested in law of large numbers for random fields with values in infinite dimensional spaces. Let $\{\xi(t)\,,\ t \in Z^2\}$ be a random field of independent identically distributed random variables with values in $l_p(1 \le p \le 2)$ (a space of sequences $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, ...)$ such that $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|x^{(i)}\right|^p < \infty$ with a norm $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|x^{(i)}\right|^p\right)^{1/p}$) and let $\{X(t),\ t \in Z^2\}$ be a random field with values in $l_p(1 \le p \le 2)$. $\{e_j,\, j \ge 1\}$ is a standard basis of $l_p(1 \le p \le 2)$. Thus we can write

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} X^{(j)}(t)\ e_j\ ,\quad t \in Z^2$$

Assume that the following representations hold

$$X^{(j)}(t) = g_j(\xi(t-s),\ \ s \in Z^2) \qquad j = 1, 2, ... \tag{1}$$

where $g_j, j = 1, 2, ...$ are measurable functions. This type real-valued random fields were considered, for instance in [1].

Let $\{\xi^{|}(t),\ t \in Z^2\}$ be an independent copy of $\{\xi(t)\,,\ t \in Z^2\}$ and

$$\overline{X}^{(j)}(t) = g_j(\xi^*(t-s),\quad s \in Z^2)$$

where

$$\overline{X}^{(j)}(t) = g_j(\xi^*(t-s),\quad s \in Z^2)$$

$$\xi^*(j) = \begin{cases} \xi(j),\ \ if\ \ j \ne 0 \\ \xi^{|}(0),\ \ if\ \ j = 0 \end{cases}$$

$$\delta_j(t,p) = \left(E\left|X^{(j)}(t) - \overline{X}^{(j)}(t)\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\Delta_p(j) = \sum_{t \in Z^2} \delta_j(t,p).$$

Denote $S_{G_n} = \sum\limits_{t \in G_n} X(t)$, where $\{G_n,\ n = 1,2,...\}$ is a sequence of finite sets from Z^2. We assume that $G_k \subset G_{k+1},\ k = 1,2,...$ and $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|G_k|}{Ck^\gamma} = 1$, for some $\gamma \geq 1$, $C > 0$ where $|G_k| = card\, G_k$.

Theorem. Let $\{X(t),\ t \in Z^2\}$ be a random field with values in $l_p (1 \leq p \leq 2)$ defined by equation (1). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^{p/2} < \infty, \qquad 1 \leq p \leq 2$$

then for $\beta > \frac{1}{2}$ and $\alpha < \min\left\{\left\{\frac{1}{2\gamma\theta}\ ,\ \frac{\gamma\theta-1}{2\gamma\theta}\right\}\right.$, for some $\theta > 1$

$$\frac{(|G_n|)^\alpha}{(Log\,|G_n|)^\beta} \frac{S_{G_n}}{|G_n|} \ \to\ 0 \quad \text{a.s.}$$

References

1. M.E.Machkouri, D.Volny, W.B.Wu. A central limit theorem for stationary random fields. Stochastic Processes and their Applications 2013,123, 1–14.

Laws Of Large Numbers For Mixing Random Variables With Values In $L_p[0,1]$

Sharipov O.Sh.[1], **Muxtorov I.G‘.**[2]

Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
osharipov@yahoo.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
ibrohimmuxtorov199702@gmail.com

Laws of large numbers for random variables with values in Banach spaces were studied by many authors, see for instance [1]-[6]. We are interested in laws of large numbers for triangular arrays of weakly dependent random variables with values in $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ (space of all $\Im$-measurable functions $f(t)$, $t \in [0,1]$ such that $\int_0^1 |f(t)|^p\, \lambda(dt) < \infty$ with a norm $\|f(t)\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, \lambda(dt)\right)^{\frac{1}{p}}$, where $\lambda(\cdot)$-Lebesgue measure and $\Im$-Borel σ-field of $[0,1]$). We assume that random variables satisfy mixing conditions. Introduce mixing coefficients for triangular arrays.

$$\alpha_m(k) = \sup_{n\in N, j_n > k} \sup_{\Pi_m} \max_{1\leq h\leq j_n - k} \sup \Big\{ |P(AB) - P(A)\,P(B)| : A \in \Psi_{1h}^{(n)}(m),$$
$$B \in \Upsilon_{h+k,j_n}^{(n)}(m) \Big\},\ (k \in N)$$

where $\{X_{nj}\} = \{X_{nj} : j = 1, ..., j_n,\ n \in N\}$ is a triangular array of random variables with values in $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, $\Psi_{a,b}^{(n)}(m)$ is σ-field generated by random variables $\prod_m X_{na}(t), ..., \prod_m X_{nb}(t)$ and $\prod_m : L_p[0,1] \to R^m$ is a projective operator i.e. $\prod_m X_i(t) = (X_i(t_1), ..., X_i(t_m))$, $t_i \in [0,1]$ and $L_2\left(\Psi_{hk}^{(n)}(m)\right)$ is a family of square integrable $\Psi_{hk}^{(n)}(m)$-measurable random variables.
We say that $\{X_{nj}\}$ is α_m-mixing if $\alpha_m(k) \to 0$ as $k \to \infty$ for any fixed $m = 1, 2, ...$.
Such modifications of mixing coefficients in infinite dimensional spaces were suggested in [7].

We say that triangular array of centered random variables $\{X_{nj}\}$ with values in $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$ space satisfies law of large numbers if the following convergence in probability holds:

$$\sum_{i=1}^{j_n} X_{ni}(t) \xrightarrow{P} 0$$

where 0 is zero element of $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$.

The following theorem is one of our main results. We will assume that $j_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

Theorem. Let $\{X_{nj}\}$ be a α_m-mixing triangular array of row-wise identically distributed centered L_p-valued $1 \le p \le 2$ random variables. Assume that the following conditions holds for some $0 < q \le 1$

$j_n E\left|X_{n1}(t+h) - X_{n1}(t)\right|^q \le \varepsilon(h)$ for $0 \le h < 1$, $0 \le t \le 1-h$ and $n = 1, 2, ...$, for some function $\varepsilon(\cdot)$ such that $\varepsilon(h) \to 0$ as $h \to 0$.

and for some $d > 2$, $\delta > 0$ and $C > 0$

$\alpha_m(n) \le Cn^{-\theta}$ for some $\theta > \frac{d(d+\delta)}{2\delta}$ and all $m = 1, 2, ...$

$j_n^{\frac{d}{2}}\left(E\left|X_{n1}(t)\right|^{d+\delta}\right)^{\frac{d}{d+\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ for all $t \in [0,1]$.

Then $\{X_{nj}\}$ satisfies law of large numbers.

Literature

1. Bosq D. Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications. New York: Springer, 2000.

2. Le V.D., Tien N.D. Mean convergence theorems and weak laws of large numbers for double arrays of random elements in Banach spaces, Bull. Korean Math. Soc. 2010. Vol. 47, №. 3. P. 467-482.

3. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

4. Norjigitov A.F. Law of large numbers for sequence of weakly dependent random variables with values in $C[0,1]$, Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2018. Vol. 2. P. 19-23.

5. Parker R., Rosalsky A. Strong Laws of Large Numbers for Double Sums of Banach Space Valued Random Elements, Acta Mathematica Sinica, English Series. 2019. Vol. 35, №. 5. P. 583-596.

6. Sharipov O.Sh., Norjigitov A.F. Law of large numbers for weakly dependent random variables with values in $D[0,1]$, Ufa Mathematical Journal. 2021. Vol. 13, №. 4. P. 123-130.

7. Zhurbenko I.G. Mixing conditions for random processes with values in Hilbert spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1984. Vol. 278, №. 4. P. 793-796.

Strong Law Of Large Numbers For Random Walks In Weakly Dependent Random Scenery

Sharipov S.O.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
sadi.sharipov@yahoo.com

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ be a probability space. The random variables we deal with are all defined on $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Let $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ and $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be two independent sequences of independent identically distributed (i.i.d.) random variables taking values in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$, respectively. The sequence $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ is called the random scenery. The sequence $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is the sequence of increments of the random walk $(S_n)_{n\geq 0}$ defined by $S_0 = 0$ and $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ for $n \in \mathbb{N}$.

We define the random walk in random scenery as the process $(Z_n)_{n\geq 0}$ given by

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_{S_k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

There have been substantial research works devoted to studying the asymptotic behavior of Z_n. The process Z_n was introduced by Borodin [1] and, independently, by Kesten and Spitzer [2]. In the talk, we shall discuss the validity of the strong law of large numbers for Z_n under the assumption that the random scenery $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ satisfies a weak dependence condition.

Literature

1. Borodin A.N. Limit theorems for sums of independent random variables defined on a transient random walk. Investigations in the theory of probability distributions, IV. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 1979. 85. P. 17–29.

2. Kesten H., Spitzer F. A limit theorem related to a new class of self-similar processes. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1979, 50. P. 5–25.

Центральная Предельная Теорема Для Авто Регрессионного Процесса 1 – Порядка С Случайным Параметром

Зупаров Т.М.[1], **Жовлиев А.И.**[2]
m_zuparov@rambler.ru, jovliyevaziz91@gmail.com

1. Введение. Пусть $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}\}-$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин и последовательность$\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$удовлетворяющая уравнению

$$X_n - \mu = \rho_n(X_{n-1} - \mu) + \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Последовательность $\{X_n\}$ называется авто регрессионным процессом со случайными коэффициентами ρ_n , где $\mu = EX_n$ и $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ белый шум: последовательность независимых. одинаково распределчнных случайных величин с математическими ожиданиями равными нулю и единичными дисперсиями. Если последовательность (1) где $\mu = EX_n$ и $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ белый шум: последовательность независимых. одинаково распределчнных случайных величин с математическими ожиданиями равными нулю и единичными дисперсиями. удовлетворяет условию $\sup\limits_n |\rho_n| < 1$ и не зависеть от последовательности $\{\xi_n\}$, то существует единственное строго стационарное решение уравнения (1), такое, что $EX_n = \mu$. Это решение имеет вид [см 1 – 2]

$$X_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk}\varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где$A_{nk} = \prod_{j=n}^{n-k+1} \rho_j$ $k \geq 1$, $A_{n0} = 1$ и ряд сходится п.н.

Пусть $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} A_j\xi_{k-j}-$ линейный процесс со случайными коэффициентами $\{A_k,\ k = 0, 1, ...\}$, порожденный последовательностью $\{\xi_l,\ l \in \mathbb{Z}\}$ независимых с.в. и $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

В работе [1] рассмотрен класс авто регрессионных процессов 1 – порядка с случайными коэффициентами принимающие значения в Гильбертовом пространстве. Для этого класса получены предельные теоремы: усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема (ц.п.т.), компактный закон повторного логарифма. экспоненциальные неравенства, а также скорости сходимости. Решение многих задач связанные с авто регрессионными процессами с неслучайными параметрами принимающие значения в функциональных пространствах можно найти в монографии [2].

В данной работе рассмотрен авто регрессионный процесс 1 – го порядка с случайным параметром v:

$$X_n = \nu X_{n-1} + \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $0 < \nu < 1-$с.в. независящая от последовательности $\{\xi_k\}$и $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ последовательность независимых одинаково распределенных с.в. Такой процесс имеет вид (1), где $\rho_? \equiv v$и последовательность $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}\} -$ является зависимой, поэтому он не входит в класс процессов рассмотренных в работе [1].

В работе доказаны моментное неравенство, аналог цпт. Линдеберга – Феллера для последовательности $(1 - v)S_n/\sum_{j=1}^{n} M\xi_j^2$ для линейного процесса с $A_j = v^j$.

2. Основные результаты.

Моментное неравенство для авто регрессионного процесса.

Теорема 1.

$$EX_0^n \leq \beta_n \left[E\frac{1}{1-\nu^n} + C(n)\left(E\left(\frac{1}{1-\nu}\right)\right)^{[n/2]}\right],\ n=2,3,4,..., \tag{4}$$

где $\beta_n = E\,|\xi|^n$, $C(n) = 0$?@8 $n = 1,2,3$ и $C(n)$положительное постоянное

Центральная предельная теорема для авто регрессионного процесса

Пусть $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} A_j\xi_{k-j}-$ линейный процесс со случайными коэффициентами $\{A_k,\ k=0,1,...\}$, порожденный последовательностью $\{\xi_l,\ l\in\mathbb{Z}\}$ независимых с.в. и $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

При доказательстве цпт. для авто регрессионного процесса с случайным параметром нам потребуется следующее разложение линейного процесса.

Лемма. Если ряд$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ абсолютно сходится п.н., то имеет место разложение

$$X_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right)\xi_n + \sum_{j=-m+1}^{\infty}\gamma_j\xi_{n-j} - \sum_{j=-m+1}^{\infty}\gamma_j\xi_{n-j+1}, \tag{5}$$

где $\gamma_j = \sum_{k=j}^{\infty} A_k$.

Равенство (5) можно доказать непосредственно, сравнивая коэффициенты стоящие впереди случайными величинами $\xi_l;\ l=0,\pm1,\pm2,...$в выражении случайной величины X_n. В частности, из разложения (5) мы получим следующее разложении для суммы первых n членов линейного процесса:

$$S_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right)\sum_{t=1}^{n}\xi_t + \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\left(\xi_{1-j} - \xi_{n-j+1}\right) \tag{6}$$

В теореме 2 доказана цпт. для линейного процесса с случайными коэффициентами v^j, j = 0,1,2,....

Теорема 2. Пусть $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} v^j\xi_{k-j}$линейный процесс со случайными коэффициентами удовлетворяет условиям

1) $A_k = v^k,\ 0<v<1$ и случайная величина v не зависит от $\{\xi_k.\ k\in\mathbb{Z}\}$;

2) $\{\xi_k\}-$ последовательность независимых с.в., $E\xi_k = 0,\ E\xi_k^2 = \sigma_k^2 < \infty,\ k\geq 0$;

3) $\max\limits_k \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \to 0$при $n\to\infty$, где $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$.

Тогда последовательность $(1-v)S_n/B_n$ удовлетворяет ц.п.т. тогда и только тогда, когда выполнено условие Линдеберга:

(Л) $\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 I\left\{|\xi_k|\geq\varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$для любого положительного ε.

Из теоремы 2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть X_n авто регрессионный процесс 1 – порядка с случайным параметром v, $(0<v<1)$. Тогда последовательность $(1-v)S_n/B_n$ удовлетворяет ц.п.т. тогда и только тогда, когда выполнено условие Линдеберга:

Литература

1. S.Bonkhar, T.Mourid. Limit theorems for hilbertian avtoregressive processes with random coefficients. Annales de I'ISUP, 2018, 62(3), pp.59-74.

2. D.Bosq. Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications, Springer-Verlag New York, Inc, 2000.

Uzluksiz Vaqtli Va Migratsiyali Tarmoqlanuvchi Tasodifiy Jarayon Uchun Limit Teorema

Azimov J. B.[1], **Tursunova S. O.**[2]

Toshkent davlat transport universiteti, O‘zbekiston;
azimovjb@gmail.com
O‘zbekiston Milliy universiteti 2-bosqich magistri, O‘zbekiston;
tsevaraaa@gmail.com

Har bir zarrasi uzluksiz vaqtli Markov tarmoqlanuvchi jarayoni sxemasiga muvofiq rivojlanadigan populyatsiyani qaraymiz, shu bilan birga vaqtning har bir $t > 0$ momentida populyatsiyaga $(t,\ t+?t)$ oraliqda $\delta_{ok} + a_k\Delta t + o\left(\Delta t\right)$ ehtimollik bilan $k,\ k = 0, 1, 2, ...$ta zarracha kelib qo‘shiladi yoki populyatsiyadan $q_r\Delta t + o\left(\Delta t\right)$ ehtimollik bilan t momentda mavjud bo‘lgan zarrachalardan $r,\ r$=1,... m tasi emigratsiya bo‘ladi, bu yerda m - ixtiyoriy o‘zgarmas natural son

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{r=1}^{m} q_r = 0,\ \ a_0 < 0,\ \ \delta_{00} = 1,\ \ \delta_{0k} = 0,\ \ k \neq 0.$$

Zarrachalar bir-biridan, populyatsiyaning sonidan, kelib chiqishidan va migratsiya jarayonidan bog‘liqsiz ravishda ko‘payadi deb faraz qilamiz. Bunday jarayonning t vaqtidagi zarralar sonini Z_t bilan belgilaymiz.

Faraz qilaylik $\xi_i^{(t)}(\Delta t),\ \ \xi_t(\Delta t),\ \ \forall t \geq 0,\ \ \ i = 1, 2, ...$ bog‘liqsiz, butun qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar va $\xi_t(\Delta t)$ har qanday t uchun bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin.

$$P\left(\xi_t(\Delta t) = k\right) = \delta_{ok} + a_k\Delta t + o\left(\Delta t\right),\quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$P\left(\xi_t(\Delta t) = -r\right) = q_r\Delta t + o\left(\Delta t\right),\quad r = 1, 2, ..., m$$

va o‘z navbatida, $\xi_i^{(t)}(\Delta t),\quad i = 1, 2, ...$ barcha t uchun bir xil taqsimlangan bo‘lsin.

Demak

$$P\left(\xi_i^{(t)}(\Delta t) = k\right) = \delta_{1k} + p_k\Delta t + o\left(\Delta t\right),\ \ p_1 < 0,\ \ \ \delta_{11} = 1,\ \ \delta_{1k} = 0,\ \ \ k \neq 1$$

va hosil qilish funksiyasi

$$f(\Delta t, s) = Es^{\xi_i^{(t)}(\Delta t)} = s + f(s)\Delta t + o(\Delta t), f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0$$

deb olishimiz mumkin. Kiritilgan $\xi_i^{(t)}(\Delta t)$ tasodifiy miqdorni t momentdagi i-zarraning Δt vaqt ichidagi avlodlari soni deb qarash mumkin. U holda bitta zarraning u vaqt mobaynidagi qoldirgan zarralar soninig hosil qilish funksiyasini $f(u, s) = Es^{\xi_i^{(t)}(u)}$ orqali belgilash mumkin.

Kelgusida biz

$f'(1-) = 0$, ya’ni $f'(\Delta t, 1-) = 1$, $p_0 = f(0) > 0$,

$$f(s) = (1-s)^2 L(1-s),$$

bu yerda $L(1-s)$ funksiya $1-s \to 0$ da sekin o‘zgaruvchi funksiya,

$$q_m > 0,\ \lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k - \sum_{r=1}^{m} r q_r = 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k < \infty$$

deb faraz qilamiz.

Aytaylik, $\{Z(t),\ t \in [0,\infty)\}$ Markov zanjirining holatlar to‘plami N, $p_{rj}(t)$ jarayonnig t vaqtda r holatdan j holatga o‘tish ehtimolligi bo‘lsin, $r, j \in N,\ t \in [0,\infty)$.

Quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$M(t) = \int_0^t \frac{N(u)}{u} du,$$

bu yerda $N(t)$ funksiya $t \to \infty$ da sekin o‘zgaruvchi funksiya va

$$N(t) L\left(t^{-1} N(t)\right) \to 1,\quad t \to \infty.$$

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar $M(t) \to \infty,\ t \to \infty$, u holda $t \to \infty$ da

$$EZ(t) \sim \frac{t}{M(t)},$$

agar $b = \frac{f''(1-)}{2} < \infty$ bo‘lsa, $t \to \infty$ da

$$DZ(t) \sim b^2 \frac{t^2}{\ln t}$$

munosabat o’rinli bo’ladi.

Adabiyotlar

1. Нагаев С.В., Хан Л.В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией. // Теория вероятн. и ее примен. 25, 3 (1980), 523-534.

2. Хан Л.В. Предельные теоремы для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией. // Сиб. Мат. журнал. 21, 2 (1990), 183-194.

3. Бадалбаев И.С., Якубов Т.Д. Предельные теоремы для критического марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем и миграцией. Рук. Деп. В ГФНТИ ГКНТ РУз. 1994, 2153, 30 стр.

Dempfir Hadiga Ega Ikki Karra Nochiziqli Parabolik Tenglamalar Sistemasi Yechimining Sifat Xossalari

Aripov M. M.[1], Djabbarov O. R.[2], Xasanov J. O.[3], Nizomiddinova G. S.[2]
O‘zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
mirsaidaripov@mail.ru
Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston;
oybekjabborov1987@mail.ru
Urganch davlat pedagogika instituti, Urganch, O‘zbekiston;

Quyida $Q = \{(x,t) : t > 0,\, x \in R\}$ sohada Koshi masalasini qaraymiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - g(x)\left|\frac{\partial v^n}{\partial x}\right|^{q_2} v^{p_2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - g(x)\left|\frac{\partial u^n}{\partial x}\right|^{q_1} u^{p_1} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u_0(x),\ x \in R \\ v|_{t=0} &= v_0(x),\ x \in R \end{aligned} \tag{2}$$

(1) tenglama ikki komponentli muhitda, dempfir ta’siriga ega, divergent diffuziya jarayonini ifodalovchi parabolik tenglama. Bu yerda $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, $p \geq 2$, $k > 0$ sonli parametrlar, $u = u(x,t) \geq 0$ izlanayotgan nomanifiy yechim, $u_0(x)$ chegaralangan, uzluksiz, nomanfiy funksiya. (1) tenglamalar sistemasi buziluvchi tenglama bo‘Ълib, $u(x,t)$ yoki $|u_x| = 0$ bo‘lganda klassik ma’noda yechimga ega bo‘lmaydi. Bu holda (1), (2) masalaning yechimini $u^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x} \in C$, $v^{m_1-1}\left|\frac{\partial v^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x} \in C$, $u(x,t) \geq 0$, $v(t,x) \geq 0$ sinfda umumlashgan yechim sifatida qaraladi va bu yechim (1) tenglamani integral ayniyat ma’nosida qanoatlantiradi. (1) tenglama ko‘plab tabiatda uchraydigan tabiiy jarayonlarni ifodalaydi. (1), (2) masalani parametrlarining xususiy hollarida ko‘plab mualliflar tomonidan o‘rganilgan [1-4]. Maqolada buziluvchan ikki karra nochiziqli divergent ko‘rinishdagi parabolik tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining Fujita tipidagi global yechimlarini mavjudlik teoremalari isbotlanadi hamda yechim va front baholarining olinadi.

Nochiziqli matematik modellar buziladigan divergent va nodivergent turdagi ikki karra nochiziqli parabolik tenglamalar va sistemalar bilan ifodalanib, yechimlarning sifat xossalari: Fujita turidagi global yechimlarning mavjudlik muammolari, yechimlar va yechim frontlarini baholash, nochiziqli muhitni tavsiflovchi sonli parametrlarning qiymatiga qarab, Fujita turidagi kritik eksponentalari, ikkinchi kritik eksponenta va bu holatlarda yechimlarning xossalarini tadqiq qilish asosida yangi nochiziqli effektlar, taklif etilgan hisoblash sxemalari va sonli yechish usullari, amaliy dasturlar paketi, gaz, neft sohasidagi, viruslarning tarqalishi bilan bog‘liq jarayonlarida, tuz, changlarning tarqalishi, paxta zavodlarida paxtalarning yonishi bilan bog‘liq masalalarni bashorat qilishda foydalanish mumkin. Buning uchun nochiziqli tenglama va sistemalardagi muhitni xarakterlovchi sonli parametrlarning qiymatini topish uchun tegishli tajribalarni o‘tkazish lozim bo‘ladi. Bundan tashqari agar bu matematik modellar joriy qilinsa, yaratilgan dasturiy paket gaz, neft, gaz va suyuqliklarda filtrasiya masalasi va yer osti suvlarining harakatini o‘rganishda tejamkorlikka olib kelishi mumkin.

Faydalanilgan adabiyotlar

1. Арипов М.М, Садуллаева Ш.А. Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии. Ташкент, Университет, 2020, 670 с.

2. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Галактионов В.А., Михайлов А.П. Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. - М: Наука 1987, 477с.

3. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. - Ташкент, Фан, 1988, 137 с.

4. Aripov M.M., Djabbarov O.R., Sh.Sadullaeva. Mathematic modeling of processes describing by double nonlinear parabolic equation with convective transfer and damping // AIP Conference Proceedings, 2021, 2365, 060008.

$GJ|M|1|N-1$ Sistema Statsionar Navbat Uzunligi Taqsimoti Va $M|G|1|k$ $(k=\overline{0,N})$ Sistema Bandlik Davri O‘Rta Qiymati O‘Rtasida Ikkilanma Munosabat

Qurbonov H.[1], Bozorova O‘.[2]

[1,2]Sharof Rashidov nomidagi SamDU, Samarkand, Uzbekistan ;
khabibullo.kurbanov@mail.ru, ogiloy.bozorova@mail.ru

Quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lgan birkanalli xizmat ko‘rsatish sistemasini qaraymiz:

1) talablarning kelish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan va bir xil $B(x)[B(+0)=0]$ taqsimot funksiyasiga hamda μ^{-1} o‘rta qiymatga ega bo‘lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini tashkil etadi, ya’ni agar $t_0=0,t_1,t_2,...$ talablarning kelish momentlari va $z_n=t_n-t_{n-1},n\geq 1$ bo‘lsa, u holda

$$B(x)=P(z_n<x),n\geq 1;$$

2) sistema bitta xizmat ko‘rsatish qurilmasiga ega va talablarga xizmat ko‘rsatish vaqti uzunliklari o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, bir xil

$$A(x)=\begin{cases}0,x\leq 0,\\ 1-e^{-\lambda x},x>0,\lambda>0\end{cases}$$

taqsimot funksiyasiga ega;

3) kutish joylari soni k ga $(k=\overline{0,N-1})$ ga teng, ya’ni sistemada xizmat ko‘rsatilayotgan talab bilan birga ko‘pi bilan $k+1$ ta talab mavjud bo‘lishi mumkin. Agar talab kelgan momentda sistemada bo‘sh o‘rinlar bo‘lmasa, u qabul qilinmaydi va keying xizmat jarayoniga ta’sir ko‘rsatmaydi;

4) xizmat jarayoni $t_0=0$ momentda sistemaga $(k+1)$- talab kelib tushishi bilan boshlanadi.

Ushbu shartlar bajariladigan sistema $GJ|M|1|k$ deb belgilanadi. Agar bu yerda $A(x)$ va $B(x)$ taqsimotlarning o‘rni almashtirilsa va kutish joylar soni $k=\overline{1,N}$ga teng bo‘lib, xizmat jarayoni sistemaga birinchi talab kelib tushishi bilan boshlanadi deb faraz qilinsa, hosil bo‘ladigan sistema $M|G|1|k$ deb belgilanadi.

$GJ|M|1|k$ va $M|G|1|k$ sistemalar ikkilanma xizmat ko‘rsatish sistemalari deyiladi. Soddalik uchun $M|G|1|k$ va $GJ|M|1|k$ sistemalarni mos holda F_{1k} va F_{2k} deb belgilaymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

y_k- F_{2k} sistemada xizmat jarayoni boshlangan momentdan birinchi talab rad etilgan momentgacha bo‘lgan vaqt uzunligi, $k = \overline{0,N}$;

η_k- y_N davrda sistemada k ta talab bo‘lgan vaqt uzunliklarining jamlanmasi,$k = \overline{0,N}$;

ξ_k- F_{1k} sistema bandlik davri, ya’ni sistema uzluksiz xizmat bilan band bo‘lgan vaqt uzunligi,$k = \overline{0,N}$;

ν_k- ζ_N davrda talablar soni k ga teng bo‘lgan vaqt uzunliklarining jamlanmasi, $k = \overline{1,N+1}$;

ξ_{1N} va ξ_{2N} - mos holda F_{1N} va F_{2N} sistemalar statsionar navbat uzunliklari;

$$P_N(k) = P(\xi_{1N} = k), k = \overline{0,N+1};$$

$$Q_N(k) = P(\xi_{2N} = k), k = \overline{0,N}.$$

Ushbu ishda η_k va y_k lar tasodifiy miqdorlar hamda ν_k va η_k tasodifiy miqdorlar o‘rta qiymatlari, shuningdek, $Q_N(k)$ va My_k hamda $Q_N(k)$ va $P_N(k)$ taqsimotlar o‘rtasida ikkilanma munosabatlar o‘rnatiladi. Ushbu munosabatlar natijasi sifatida [2] ishda $Q(k)$ uchun o‘rnatilgan natija keltirib chiqariladi.

Teorema 1. Quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$M\eta_0 = \lambda^{-1}(1 + (\lambda - \mu)My_N) \tag{1}$$

$$M\eta_k = \lambda^{-1}\mu(My_{N-k+1} - My_{N-k}), k = \overline{1,N} \tag{2}$$

Teorema 2. $k = \overline{1,N+1}$ da ushbu munosabat o‘rinli:

$$M\nu_k = M\eta_{N-k+1}.$$

Teorema 3. Quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$Q_N(0) = \frac{1 - (\mu - \lambda)My_N}{\lambda My_N},$$

$$Q_N(k) = \frac{\mu(My_{N-k+1} - My_{N-k})}{\lambda My_N}, k = \overline{1,N}.$$

Teorema 4. Quyidagi munosabat o‘rinli:

$$P(\xi_{2N} = N - k + 1) = P(\xi_{1N} = k/\xi_{1N} > 0), k = \overline{1,N+1}.$$

ξ_{1N} va ξ mos holda $M|G|1|N$ va $M|G|1$ sistemalarning statsionar navbat uzunliklari bo‘lsin.

Teorema 5. $\rho = \lambda\mu^{-1} < 1$ da quyidagi tenglik o‘rinli:

$$P(\xi_{1N} = k) = \frac{P(\xi = k}{1 - \rho \cdot P(\xi > N)}.$$

Izoh. 1. Agar $M\zeta_k = My_k$ tenglikga asosan

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_k = \frac{v}{\mu[\overline{b}(\lambda - \lambda v) - v]} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k My_k \tag{3}$$

o‘rinli ekanligi e’tiborga olinsa, 3- teoremadan [4] ishda olingan natija bevosita kelib chiqadi. Bu yerda

$$\overline{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x), Res \geq 0.$$

(12) tenglikni [5] ishda Harris tomonidan

$$\overline{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_N < x)$$

uchun o‘rnatilgan munosabatdan keltirib chiqarish qiyin emas.

2. [5] ishda F_{1N} va F_{2N} sistemalar statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari uchun ikkilanma munosabat limiti F_{1N} sistemada xizmat tugash momentlari va F_{2N} da talablar kelish momentlari bo‘yicha olinganda o‘rnatilgan. 4-teoremada t bo‘yicha limitga o‘tilgan hol uchun ikkilanma munosabat o‘rnatiladi. Ma’lumki, bu hollarda limitik taqsimotlar mos tushmaydi.

Adabiyotlar

1. Курбанов Х.К. Об одном соотношении двойственности в системах массового обслуживания. Изв.АН УзССР, №3, 1988, 18-21.

2. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические вывода, Ташкент, Фан, 1974, 14.

3. Висков О.В., Исмоилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и сменные вопросы, науч. труды. ТашГУ, вып. 402, 1972, 17-31 стр.

4. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue. Oper.Res., v19, 1971, 219-233 pg.

5. Шахбазов А.А. Об одном соотношение двойственности в теории массового обслуживания. Изв.АН УзССР, 1975, №3.

6. Qurbonov H., Bozorova O‘. Qayta tiklanish jarayoninig kutish joylari soni cheklangan xizmat ko‘rsatish sistemalari statsionar navbat uzunliklari taqsimotini o‘rganishga tadbiqi. SamDU ilmiy axborotnomasi, 2023, 1-son.

Holatga Bog‘liq Immigratsiyali Tarmoqlanuvchi Jarayon Uchun Limit Teoremada Yaqinlashish Tezligi Bahosi Haqida

Sulaymonova E.M.

O‘zbekiston Milliy universiteti 2-bosqich magistri, O‘zbekiston;
ezozasulaymonova84@gmail.com

Holatga bog‘liq bo‘lgan immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonini ko‘rib chiqamiz. Aytaylik, μ_n – Galton-Vatson jarayonining n- vaqt momentidagi zarralar soni bo‘lsin (n=0, 1, 2,..., μ=1). Ma’lumki, Galton-Vatson jarayonini

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \qquad p_j = P\{\mu_1 = j\}, \ j = 0, 1, ..., \quad |x| \leq 1$$

hosil qilish funksiyasi yordamida aniqlash mumkin.

Agar biror musbat butun m soni uchun $\mu_n = k$, $0 \leq k \leq m$ bo‘lsa, u holda n -vaqt momentida populyatsiyaga ξ_n sondagi zarralar kelib qo‘shiladi, qo‘shilgan zarralar sonininig evolyutsiyasi keyinchalik $F(x)$ hosil qilish funksiyali odatdagi Galton-Vatson jarayoni qonuniga bo‘ysunadi. Shunday qilib, immigratsiya quyidagi

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{kj} x^j, \quad |x| \leq 1, \quad k = 0, 1, ..., m, \quad q_{kj} \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{kj} = 1, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

hosil qilish qunksiyasi orqali aniqlanadi.

Faraz qilaylik Z_n yuqorida keltirilgan bir nechta holatlarga bog‘liq, immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning n -vaqt momentidagi zarralar soni bo’lsin. $\{Z_n, \ n \geq 0\}$ jarayon m=0 bo‘lgan holda Foster [1], Peyks [2] va Sato [3] tomonidan o‘rganilgan, ixtiyoriy m uchun bunday jarayon [4], [5] ishlarda qaralgan. Ushbu ma’ruzada [4] ishda keltirilgan limit teoremada yaqinlashish tezligini bahosi keltirilgan.
Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_{ij} = P\left(Z_{n+1} = j / Z_n = i\right)$$

$$P_{oj}(n) = P\left(Z_n = j / Z_0 = 0\right) .$$

Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin:

$$F^{'}(1) = 1, \quad 0 < F^{''}(1) = 2b < \infty, \ \alpha_k = g_k^{\prime}(1) < \infty, \quad k = 0, 1, ..., m,$$

barcha j lar uchun $p_j < 1$, $\min\limits_{0 \leq k \leq m} (p_0, q_{k0}) > 0$, $\max\limits_{0 \leq k \leq m} (p_0 + p_1, q_{k0}) < 1$.
Endi limit teoremada yaqinlashish tezligi bahosi haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz:

Teorema. Agar $F'''(1) < \infty$, $g_k''(1) < \infty$, $k = 0, 1, ..., m$ bo‘lsa, u holda $n \to \infty$ da

$$P_{0r}(n) = \frac{B_r}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right), \quad r = 0, 1, 2, \ldots .$$

munosabat o‘rinli.

Adabiyotlar

1. Foster G. A limit theorem for a branching processes with state-dependent immigration. Ann.Math.Stat. 42, 5(1971), 1173-1176.

2. Pakes A. A brandung processes with state-dependent immigration component. Adv. Appl. Prob. 3, 2 (1971), 301-314.

3.Sato M. On a Galton-Watson processes with state-dependent immigration. Sci. Repts Nigata Univ. 12(1975), 43-45.

4. Форманова Т.А. Предельные теоремы для критических ветвящихся процессов с иммиграцией, зависящей от состояния. Изв. АН РУз, сер. Физ.-мат.н., 1984, 6, с.24-29.

5. Форманов Ш.К., Азимов Ж.Б. О предельных поведениях ветвящихся процессов Фостера-Пэйкса (случай бесконечной дисперсии). Узб. матем. журн., 1998, №4, 59-63.

СЕКЦИЯ 7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
SECTION 7. MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Кинетические Модели Для Решения Задач Механики Сплошной Среды

академик Б.Н. Четверушкин [1]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Существуют значительные трудности для решения задач гидро - и газовой динамики на высокопроизводительных вычислительных системах с экстрамассивным параллелизмом. Опираясь на хорошо известную связь между кинетическим и макроскопическим описанием сплошной среды, получена Квазигазодинамическая система уравнений (КГД), являющаяся альтернативой уравнениям Навье - Стокса.

КГД-система позволяет строить алгоритмы, хорошо адаптируемые к архитектуре параллельных вычислительных систем. Данный подход обобщается для решения задач магнитной газовой динамики и моделирования турбулентных течений. Приводятся примеры решения задач газовой динамики, астрофизики и ряда турбулентных течений.

Структурная Биология: От Математики К Физике И Обратно

Уржумцев А. Г.[1]

Институт Генетики и Молекулярной и Клеточной Биологии, (IGBMC) Страсбург, и Лотарингский Университет, Нанси, Франция
sacha@igbmc.fr

Знание пространственного расположения атомов макромолекул является результатом и фундаментальным, и имеющим множество промышленных и особенно медицинских применений. Основной метод, который позволил узнать пространственную структуру около 200 000 различных макромолекул и их комплексов, это рентгеновская кристаллография. Данный метод анализирует дифракцию рентгеновских лучей кристаллами интересующей нас молекулы, где кристалл играет роль мощнейшего усилителя сигнала, в $10^{20} - 10^{25}$ раз. Коэффициент преломления рентгеновских лучей практически неотличим от единицы, а фотоны не имеют ни заряда, ни массы. Поэтому не существует Çрентгеновских линзЎ, и результатом эксперимента является не увеличенное изображение объекта, как в оптике, а трехмерная дифракционная картина Ц набор пятен, наблюдаемых при том или ином положении детектора.

Рентгеновские лучи рассеиваются находящимися в кристалле электронами, плотность распределения которых описывается периодической функцией в трехмерном пространстве. Каждое из пятен идеальной дифракционной картины соотвествует комплекснозначному коэффициенту Фурье такой функции, а степень почернения пропорциональна квадрату амплитуды этого коэффициента. Аргументы коэффициентов Фурье, в кристаллографии называемые фазами, в дифракционном эксперименте безвозвратно теряются. Более того, не удается измерить амплитуду ни высокоча-

стотных коэффициентов Фурье, описывающих детали структуры, ни наиболее низкочастотных, описывающих форму молекулы. Таким образом, после решения сложных экспериментальных задач получения кристалла Çдышащейў макромолекулы и съемки дифракционных данных с такого кристалла, разрушаемого рентгеновскими лучами, требуется решить **две глобальные вычислительно-математические задачи**:

1) фазовая проблема кристаллографии : построить приближенное изображение (карту) трехмерной функции распределения электронной плотности по конечному набору амплитуд коэффициентов Фурье, не зная их фаз;

2) построение атомной модели : по такой зашумленной карте определить положение атомов в кристалле, их тип и степень неупорядоченности (в сумме до миллиона переменных), как можно лучше воспроизводящие экспериментальные данные.

Для определения неорганических и относительно простых органических структур долгое время использовались так называемые прямые методы восстановления фаз по амплитудам коэффициентов Фурье. Один из авторов этих методов, математик Герберт Хауптман, был удостоен Нобелевской премии по химии в 1985 году. Для более сложных структур был разработан вычислительный метод определения фаз из сравнения амплитуд, померянных с нескольких, близких между собой кристаллов. Однако практическое решение принесло сравнение наборов амплитуд, полученных с одного и того же кристалла, но при слегка разной длине волны рентгеновских лучей - это стало возможно в конце 90-х годов благодаря синхротронам, ставшим относительно доступными. Таким образом, фазовая проблема математически полностью в прямом смысле решена не была, но относительно недавно была обойдена физиками.

Однако в 2021 году, основываясь на огромной базе ранее решенных структур, математики-вычислители разработали Çчерный ящикў, использующий обучающиеся алгоритмы нейронных сетей для аккуратного предсказания пространственной модели белка по его аминокислотной последовательности. Этот вычислительный инструмент, отмеченный Нобелевской премией 2024 года, позволил радикально поменять методологию - не строить модель в зашумленных картах, атом за атомом, а искать в кристалле положение цельной приближенной модели, дающее оптимальное соотвествие экспериментальным данным, и уже затем уточнять значения параметров индивидуальных атомов. Такой метод использования приближенной модели был известен давно, но его применение затруднялось отсутствием моделей для поиска.

При любом из этих, и нескольких других, подходов еще более усилилась центральная роль уточнения атомных моделей. Прежде всего, требуется уметь быстро и точно решать прямую задачу, т.е. расчитывать по модели, описываемой сотнями тысяч параметров, данные для сравнения с экспериментальными, представленными сотнями тысяч чисел. Успех принес обходной путь вычисления коэффициентов Фурье по модели не напрямую, а через промежуточный обьект, распределение модельной электронной плотности. Интересно, что этот алгоритм был угадан сотрудником IBM, разработчиком языка FORTRAN Дэвидом Сейром за 15 лет до публикации метода быстрого преобразования Фурье, ключевого компонента такого подхода.

Затем для оптимизации грубо построенной модели требуется быстрый расчет градиента целевых функций, т.е. до миллиона их частных производных. Это препятствие было критичным до 1983 года, когда было доказано, что для любой вычисляемой на компьютере функции ее точный градиент может быть определен за время не

превосходящее время вычисления самой функции более чем в 4 раза, независимо от количества переменных. Мы смогли предложить соотвествующий алгоритм для макромолекулярного уточнения еще до формальной публикации математических статей.

Последние несколько лет стало возможным определять структуры методом электронной микроскопии, не требующим кристаллов и позволяющим напрямую получать увеличенные изображения макромолекулярных комплексов. Однако эти изображения очень зашумленные и имеют ограниченное разрешение, более того - меняющеся от одной области к другой. Соответственно, для уточнения атомной модели требуется расчитывать ее изображение при таком варьирующемся разрешении.

Рассеивающий электростатический потенциал атома, определяющий результат такого эксперимента, может быть описан суммой нескольких несмещенных Гауссовых функций, но его изображение на карте конечного разрешения становится функцией осциллирующей, где центральный пик окружен сферическими волнами обрыва ряда Фурье. Таким образом, учет случайного нормально распределеного шума через свертку с Гауссианом является тривиальным для самих атомов, но не для их изображений. Недавно нам удалось построить аналитическую функцию, сконцентрированную вокруг сферической поверхности заданного радиуса в трехмерном пространстве и такую, что ее свертка с Гауссовой функцией не меняет ее выражения, а только значение параметра ее Çразмазанностиў, как и для Гауссиана. Эта функция позволяет аналитически описать изображение атома любого типа, с любой величиной неопределенности его положения и при любом разрешении. Более того, удалось предложить аналогичную аналитическую функцию и для двумерного пространства, позволяющую обрабатывать изображения, например, в оптике или астрономии.

Shocks In Hele-Shaw Flow, Normal Random Matrices Ensembles And The Multiple Orthogonal Polynomials

Aptekarev A. I.

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences

Abstract. The classical 2-D free-boundary problems of hydrodynamics (Hele-Shaw flow of immiscible liquids, Bubble problem, Laplacian growth) are ill-defined at critical regimes of appearance of a cusp-like singularity. This type of singularities is a result of the evolution of the shocks - lines of discontinuity of the solutions. The important role to control these 1-D lines plays weak formulation of the solution.

Our main attention will be devoted to the normal matrices ensembles, which have many interesting applications, including mentioned above classical problems of hydrodynamics. These ensembles are an example of the orthogonal polynomials ensembles. For the normal matrices ensembles the corresponded polynomials are orthogonal with respect to an area measure. We show that for some special cases of the normal random matrices (related with discrete Painlevé equation) these polynomials are the multiple orthogonal polynomials. This fact makes their asymptotic analysis much easier.

Analysis of double nonlinear parabolic system with a time-dependent source

Aripov M.[1], **Bobokandov M.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
mirsaidaripov@mail.ru
Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
bmahmudbey@gmail.com

In the domain $Q = \left\{(t,x) : t > t_0 > 0, x \in R^N\right\}$, we consider the Cauchy problem to the double nonlinear parabolic system of equations with variable density, not in divergence form with time-dependent absorption

$$\begin{cases} \rho_1(x)u_t = v^{q_1}\nabla\left(\rho_2(x)u^{m_1-1}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) - d_1\rho_1(x)t^{\lambda_1}u^{1+\alpha_1}v^{\alpha_2} \\ \rho_1(x)v_t = u^{q_2}\nabla\left(\rho_2(x)v^{m_2-1}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right) - d_2\rho_1(x)t^{\lambda_2}u^{1+\alpha_3}v^{\alpha_4} \end{cases}, \quad (t,x) \in Q \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u(t,x)|_{t=t_0} = u_0(x) \geq 0, \\ v(t,x)|_{t=t_0} = v_0(x) \geq 0, \end{cases} \quad x \in R^N \qquad (2)$$

where $m_i \geq 1, p \geq 2, q_i < 1, \rho_1 = |x|^l, \rho_2 = |x|^n$, d_i, α_j, $\left(i = 1,2,\ j = \overline{1,4}\right)$ and nonnegative $n_i, l_i, \beta_i, p_i, i = 1,2-$ are given numerical parameters.

System (1) is widely used in physics, chemistry, biology, and other fields. For example, system (1) describes such processes as heat dissipation, diffusion processes, filtering problems, image processing, and biological population [2]-[3].

In this system, $u, v \geq 0$ - means the pressure, $\rho_2(x)u^{m_1-1}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u$, $\rho_2(x)v^{m_2-1}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v$ - filtration flow, $d_1\rho_1(x)t^{\lambda_1}u^{1+\alpha_1}v^{\alpha_2}$, $d_2\rho_1(x)t^{\lambda_2}u^{1+\alpha_3}v^{\alpha_4}$ - power of absorption.

In [4], in the case $n = d_1 = 0$, the authors established an upper bound and asymptotic representation of the solution to the system (1).

Definition. We will call a weak solution to the problem (1)-(2) in (t_0, T) with $0 < T \leq +\infty$ the function with property

$$0 \leq u, v,\ \rho_2(x)\, u^{m_1-1}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u,\ \rho_2(x)\, v^{m_2-1}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v \in C(Q),$$

and satisfying to equation (1) in a distributed sense

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{T}\int_{R^N}\left(\rho_1(x)u\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \rho_2(x)u^{m_1-1}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\left(\psi_1 v^{q}\right) + d_1\rho_1(x)t^{\lambda_1}u^{1+\alpha_1}v^{\alpha_2}\right)dxdt = 0, \\ \int_{t_0}^{T}\int_{R^N}\left(\rho_1(x)u\dfrac{\partial\psi}{\partial t} - \rho_2(x)v^{m_2-1}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\left(\psi_2 u^{q}\right) + d_2\rho_1(x)t^{\lambda_2}u^{1+\alpha_3}v^{\alpha_4}\right)dxdt = 0, \end{cases}$$

for any $\psi_{1,2} \in C_0^{\infty}\left(R^N \times (t_0, T)\right)$.

Here, we provide a method of nonlinear splitting [1] for the construction of self-similar equations for the system (1). We look for the solutions $u(t,x)$, $v(t,x)$ in the form

$$\begin{cases} u(t,x) = \bar{u}_1(t)\, w_1(\tau(t), r), \\ v(t,x) = \bar{u}_2(t)\, w_2(\tau(t), r). \end{cases} \qquad (4)$$

Then, we obtain $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ as $\bar{u}_i(t) = B_i t^{b_i}$, $(i = 1,2)$,

where $r = |x|$, $b_i = \dfrac{\alpha_{i+2}(1+\lambda_1) + \alpha_{3-i}(1+\lambda_2)}{\delta_b}$, $\delta_b = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 \neq 0$,
$B_i = \left[\left(\dfrac{b_i}{d_i}\right)^{\frac{\alpha_{5-2i}}{\alpha_{2i}}} \dfrac{d_{3-i}}{b_{3-i}}\right]^{\frac{\alpha_{2i}}{\delta_b}}$, $(i = 1, 2)$.
From systems (4) and (1), we obtain the following system of equations:

$$r^l \frac{\partial w_i}{\partial \tau} = r^{1-N} w_{3-i}^{q_i} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1+n} w_i^{m_i-1} \left|\frac{\partial w_i}{\partial r}\right|^{p-2} \frac{\partial w_i}{\partial r}\right) - \frac{K_i r^l}{\tau}\left(w_1^{1+\alpha_{2i-1}} w_2^{\alpha_{2i}} + w_i\right), \ (i = 1, 2), \tag{5}$$

where $\tau(t) = \begin{cases} C_i t^{c_i}, \ c_i \neq 0, \\ D_i \ln t, \ c_i = 0 \end{cases}$, $(i = 1, 2)$,
$c_i = c_{3-i} = 1 + b_i[m_i + p - 3]$, $D_i = D_{3-i} = B_{3-i}^{q_i} B_i^{m_i + k_i(p-2)-1}$, $C_i = \frac{D_i}{c_i}$,
$K_i = \frac{d_i B_i^{\alpha_{2i}+\alpha_{2i-1}}}{c_i}$, $(c_i \neq 0, \ i = 1, 2)$.

Lemma 1. A weak solution of the problem (1)-(2) has the following asymptotics

$$u_A(t, x) \approx e_1 A_1 B_1 t^{b_1}\left(a - C_1^{\frac{1}{p-1}} t^{\frac{c_1}{p-1}} r^{\frac{p+l-n}{p-1}}\right)_+^{\gamma_1},$$
$$v_A(t, x) \approx e_2 A_2 B_2 t^{b_2}\left(a - C_2^{\frac{1}{p-1}} t^{\frac{c_2}{p-1}} r^{\frac{p+l-n}{p-1}}\right)_+^{\gamma_2},$$

$at \ \ |x| \to a^{1/\gamma} \tau^{-\frac{1}{p+l-n}}$, where $\gamma = \frac{p+l-n}{p-1}$, $\gamma_i = \frac{(p-1)[m_{3-i}+p-3-q_i]}{\delta_\gamma}$,
$\delta_\gamma = [m_1 + p - 3][m_2 + p - 3] \neq 0$, $(b)_+ = \max\{b, 0\}$, e_i, A_i, $(i = 1, 2)$ - some constants.

REFERENCES

1. Aripov, M. and Sadullaeva, S. Computer simulation of nonlinear diffusion processes. National University of Uzbekistan Press, Tashkent, pp. 670, 2020.
2. Bobokandov M., Aripov M., and Uralov N. Analysis of Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with Time-Dependent Nonlinearity Absorption. In ICTEA: International Conference on Thermal Engineering, vol. 1, no. 1, Toronto Metropolitan University, 2024.
3. Bobokandov M. Analysis of a double nonlinear parabolic crosswise-diffusion system. Modern Problems and Prospects of Applied Mathematics, 2024.
4. Bobokandov M. Global solutions for double nonlinear parabolic crosswise-diffusion systems with time-dependent nonlinearity absorption. Acta NUUz (Exact Sciences Series), vol. 1(1), 2023, p. 226-235.

Mathematical Modeling Of Nonlinear Problem Of Reaction-Diffusion Processes With Variable Density

Aripov M. M.[1], Matyakubov A. S.[2], Mamatov A. U.[3]
National University of Uzbekistan[1,2,3], Tashkent, Uzbekistan;
almasa@list.ru
mmtovabrorjon1995@gmail.com

In this paper, we study the properties of reaction-diffusion system with a double nonlinearity variable density and source.

Consider in the domain $Q = \left\{(t,x):\ t>0,\ x\in R_+^2\right\}$ Cauchy problem for double nonlinear parabolic system

$$\begin{cases} |x|^l u_t = div\left(|x|^n u^{m_1-1}\left|\nabla u^{k_1}\right|^{p-2}\nabla u^{l_1}\right) + |x|^k \varepsilon_1 v^{k_1} \\ |x|^l v_t = div\left(|x|^n v^{m_2-1}\left|\nabla v^{k_2}\right|^{p-2}\nabla v^{l_2}\right) + |x|^k \varepsilon_2 u^{k_2} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \geq 0 \\ v(0,x) = v_0(x) \geq 0,\ x\in R_+^2 \end{cases} \tag{2}$$

where $k_1, k_2, \geq 1$, $k, l, n \geq 0$, $m_1, m_2 \geq 1$, $p \geq 2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \geq 1$, $l_1, l_2 \geq 1$ are given parameters, $\nabla(.) - \underset{x}{grad}(.)$.

The motivation for considering this problem it is a degenerate partial differential equation and therefore is a source for the emergence of new nonlinear effects such as finite velocity propagation of perturbation, a spatial localization of bounded and unbounded solutions to the emergence ([2-3]).

The system of equations (1) has been studied by several authors in different values and cases of the parameter p (see for example [1-4] and references therein).

The system (1) in the $m_i + k_{\,i} + l_i + p - 4 > 0$, $i = 1, 2$ is called slowly diffusion, when $m_i + k_{\,i} + l_i + p - 4 < 0$, $i = 1, 2$ it called the fast diffusion equation and the $m_i + k_{\,i} + l_i + p - 4 = 0$, $i = 1, 2$ we call a double critical case ([2-3]).

In this work the qualitative properties of solution of the problem (1)-(2) depending on value ofnumerical parameters and initial data are considered. First, the self-similar solution is found, asymptotic estimates are obtained, theorems are presented and proved through the obtained estimates, then based on the results, numerical solutions are found and a graph of the visual representation of the model is created.

References

1. Aripov M., Sadullaeva Sh., Nigmanova D. Properties of the mathematical model of reactiondiffusion processes with a double nonlinearity and source// AIP Conf. Proc. 3085, 020033 (2024).

2. Aripov M., Nigmanova D. Asymptotic behavior of solutions to the reaction-diffusion problem with double nonlinearity with variable density and source// AIP Conf. Proc. 3004, 060001 (2024).

3. Khaydarov A., Mamatov A. Modeling of double nonlinear thermal conductivity processes in twodimensional domains using solutions of an approximately self-similar// AIP Conference Proceedings 2781, 020067 (2023).

4. Mamatov A., Nurumova A. Modeling double nonlinearity of cross-diffusion system of equations// AIP Conf. Proc. 3147, 030001 (2024).

On The Accuracy Of Approximate Solution Scheme Based On The Taylor Formula For A Cauchy Problem For ODEs

Abdullaev A. Kh.[1], **Tilavov A. M.**[2]

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan;
abduganiax@mail.ru asliddintm@mail.ru

In many applications of mathematics, we face the problem of approximately solving the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f[x(t)], \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

The problem (1) is usually given for $x \in D \subset \mathbb{R}^d$, D where is a convex domain, $f : D \to \mathbb{R}^d$ is assumed to be smooth. In this work, we assume it is four times continuously differentiable. The effectiveness of an approximate solution scheme is defined by its accuracy. If $x_*(t)$ is the solution of problem (1) and $\tilde{x}(t)$ is the approximate solution in $(0 \le t \le T)$, then the level of accuracy is defined by

$$\sup_{0\le t\le T} |x_*(t) - \tilde{x}(t)| \le Ce^{LT}h^s \tag{2}$$

where L is the Lipschitz constant of f, h is the mesh size s is the accuracy of the approximate solution scheme. There is extensive literature devoted to this problem.

For a continuous function $f(x)$, a solution to problem (1) exists and is unique, but it is impossible to determine its domain of definition. With this in mind, we begin the discussion with the following assumption.

Assumption 1. The solution $x_*(t)$ of the Cauchy problem (1) exists on the interval $[0; T]$.

In numerical integration, the values of the solution $x_*(t)$ are usually sought on the grid $\{t_0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = T\}$. To focus on the essence of the analysis in this article, only the evenly spaced grid $t_n = nh$ will be considered, where $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{R}^+$.

In order to obtain higher order estimates for $|x_*(t) - \tilde{x}(t)|$ we use the following approximate solution

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{k=0}^{3} \frac{(s-\sigma_s)^k}{k!} F^k[\tilde{x}(\sigma_s)]ds. \tag{3}$$

where $\sigma_t = h\,[t/h]$ is the step function for the mesh under consideration.

Lemma. For every $n \ge 1$ the following equality holds $\tilde{x}(nh) = x_n$.

The is easily proved by induction on the intervals $[0,\ nh]$.

Assumption 2. Suppose that there exists $K \subset \mathbb{R}^d$ a compact and convex domain such that in the interval $[0; T]$ the solution $x_*(t)$ exists and $\tilde{x}(t) \in K$ for all $t \in [0; T]$.

Introduce the following constants:

$$\begin{aligned} M_0 =& \max_{x\in K} |f(x)|\,, \quad M_1 = \max_{x\in K} \|f'(x)\|\,, \quad M_2 = \max_{x\in K} \|f''(x)\| \\ & M_3 = \max_{x\in K} \|f'''(x)\|\,, \qquad M_4 = \max_{x\in K} \left\|f^{\mathrm{iv}}(x)\right\|. \end{aligned} \tag{4}$$

Below the arguments of the functions $f^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ will be either $\tilde{x}(t)$, or $\tilde{x}(\sigma_t)$. In the first case we write the argument completely, while in the second case we shorten it to $f_t^{(k)} = f^{(k)}[x(\sigma_t)]$. Likewise, $F^k[x(\sigma_t)] = F_t^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Further, we introduce the following constants:

$$l_0 = M_0,\ \ l_1 = M_1M_0,\ \ l_2 = M_2{M_0}^2 + {M_1}^2M_0,\ \ l_3 = M_3{M_0}^3 + 4M_2M_1{M_0}^2 + {M_1}^3M_0$$

and

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \frac{1}{24}M_1 l_3,\\
L_{2,3} &= \frac{1}{24}M_0 M_2 l_2 + \frac{1}{120}M_0 M_2 l_3 h,\\
L_{1,2,3} &= \frac{1}{8}M_2 {l_1}^2 + \frac{1}{30}M_2 l_1 l_2 h + \frac{1}{144}M_2 l_1 l_3 h^2,\\
{H^1}_{1,2,3} &= \frac{1}{24}{M_0}^2 M_3 l_1 + \frac{1}{120}{M_0}^2 M_3 l_2 h + \frac{1}{720}{M_0}^2 M_3 l_3 h^2,\\
{H^1}_{0,1,2,3} &= \frac{1}{8}{M_2}^2 {M_0}^3 + \frac{1}{20}{M_0}^2 {M_2}^2 l_1 h + \frac{1}{72}{M_0}^2 {M_2}^2 l_2 h^2 + \frac{1}{336}{M_0}^2 {M_2}^2 l_3 h^3,\\
{H^2}_{0,1,2,3} &= \frac{1}{8}M_2 {l_1}^2 + \frac{1}{20}M_1 M_2 {l_1}^2 h + \frac{1}{72}M_1 M_2 l_1 l_2 h^2 + \frac{1}{336}M_1 M_2 l_1 l_3 h^3,\\
{H^3}_{0,1,2,3} &= \frac{1}{12}M_3 {M_0}^2 l_1 + \frac{1}{40}M_0 M_3 {l_1}^2 h + \frac{1}{90}M_0 M_3 l_1 l_2 h^2 + \frac{1}{1008}M_0 M_3 l_1 l_3 h^3,\\
{H^4}_{0,1,2,3} &= \frac{1}{8}M_3 {M_0}^2 l_1 + \frac{1}{30}M_0 M_3 {l_1}^2 h + \frac{1}{144}M_0 M_3 l_1 l_2 h^2 + \frac{1}{840}M_0 M_3 l_1 l_3 h^3,\\
{H^5}_{0,1,2,3} &= \frac{1}{4!}{M_0}^4 M_4 + \frac{1}{5!}{M_0}^3 M_4 l_1 h + \frac{1}{6!}{M_0}^3 M_4 l_2 h^2 + \frac{1}{7!}{M_0}^3 M_4 l_3 h^3.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Theorem. Let $x_*(\cdot)$ be the solution of Cauchy problem (1) and $\tilde{x}(\cdot)$ be its approximate solution given by (3) defined on an interval $[0, T]$. The following inequality holds

$$|x_*(t) - \tilde{x}(t)| \leq Ch^4 \frac{e^{M_1 T} - 1}{M_1},$$

where

$$C = L_3 + L_{2,3} + L_{1,2,3} + {H^1}_{1,2,3} + {H^2}_{0,1,2,3} + {H^3}_{0,1,2,3} + {H^4}_{0,1,2,3} + {H^5}_{0,1,2,3}.$$

References

1. Azamov A.A., Akhmedov O.S. Existence of a complex closed trajectory in a three-dimensional dynamical system. Comput. Math. and Math. Phys. 51, 1353-1359 (2011).

2. A. Azamov., A. Abdullayev., M. Ruziboev. An explicit estimate for approximate solutions of ODEs based on the Taylor formula. Ural Mathematical Journal, Vol. 10, №. 1, 2024, pp. 18–27.

3. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley Sons, Ltd. - United Kingdom (2016).

4. Lambert J.D. Numerical methods for ordinary differential systems. The initial value problems. J.Wiley Sons (1993).

Control Problems For Discrete Linear Stochastic Systems

Akhmadjonova G.[1], Aminov B.,[2] Ruziboev M.[3]

Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan[1,2,3];

220243@centralasian.uz, b.aminov@centralasian.uz, m.ruziboyev@centralasian.uz

Many processes in real life ranging from Economic behaviour to Mechanical systems are modelled by differential games. The most realistic models are the ones that contain some "randomness since every measurement in real life is exposed to some error. There are two approaches to study random dynamical systems in the literature:

- Studying the dynamics averaged over all realisations of the random dynamical system. In this case, we call the corresponding properties **annealed** properties.
- Studying the dynamics for almost every realisation of the random dynamical system. In this case, we call the corresponding properties **quenched** properties.

In this work we consider control problems for discrete stochastic linear systems with geometric constraint. For the reference see [1,2] and references therein.

Let A_1, A_2 be two $d \times d$ matrices and let $p_1, p_2 \in \mathbb{R}+$ be such that $p_1 + p_2 = 1$. Consider a random linear system on $\mathbb{R}^d$

$$Ax = \{A_1x, A_2x, p_1, p_2\}$$

formed by applying the matrix A_1 with probability p_1 and A_2 with probability p_2 to a vector $x \in \mathbb{R}^d$. The random transformation A maybe viewed as a Markov process with transition function

$$\mathbb{P}(x, B) = p_1\mathbf{1}_B(A_1(x)) + p_2\mathbf{1}_B(A_2(x))$$

of a point $x \in \mathbb{R}^d$ into for any Borel set B. The literature devoted to the control theory of Markov process is huge, but our approach is different than that in the literature. Namely, we plan to study control problem for almost every realization, which is made precise below.

Define iterations of the random map A as follows. First let p be a probability measure on $\{1, 2\}$ with $p(i) = p_i$, $i = 1, 2$. Let

$$\Omega = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}} = \{\omega = \ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \cdots \mid \omega_i \in \{1, 2\}, i \in \mathbb{Z}\}.$$

and let $\mathbb{P} = p^{\mathbb{Z}}$ be the product measure on Ω. Now, for $\omega \in \Omega$ and $n \in \mathbb{N}$ let

$$A^0_\omega = Id, A^n_\omega = A_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ A_{\omega_0}.$$

We are interested in 0-control problem for the following random system: for almost every $\omega \in \Omega$ consider the system

$$x(t + 1, \omega) = A_{\omega_t}x(t, \omega) + u(t),\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

where

$$u(t) \in B^d_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq \rho\}.$$

Consequently if $\omega \in \Omega$, an initial condition $x_0 \in \mathbb{R}^d$ and control parameters $u(t)$, $t = 0, \ldots, n$ are fixed then the corresponding trajectory is defined as a sequence

$$x(n + 1, \omega) = A^n_\omega x_0 + \sum_{t=0}^{n} A^t_\omega u(t).$$

We say that system (1) is almost surely 0-controllable from an initial state $x_0 \in \mathbb{R}^d$, if for almost every $\omega \in \Omega$ there exists a random variable $N : \Omega \to \mathbb{N}$ with

$$\int N(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \leq +\infty$$

and control parameters $u(t, x_0, \omega)$, $t = 0, \ldots, N(\omega) - 1$ such that the corresponding trajectory satisfies $x(N(\omega), \omega) = 0$.

A system is called zero controllable in large if it zero controllable for every $x_0 \in \mathbb{R}^d$

Theorem. If for almost every $\omega \in \Omega$ the maximal Lyapunov exponent of the random matrix product A_ω^n is non-positive, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_\omega^n\| \leq 0.$$

Then (1) is controllable in large.

References

1. A. A. Azamov, A. Sh. Kuchkarov, Controllability and pursuit problems in linear discrete systems. Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr. (2010), №. 3, 21–26; translation in J. Comput. Syst. Sci. Int. 49 (2010), №. 3, 360–365.

2. G. Ibragimov, M. Ferrara, A. Kuchkarov, Atamurat, A. Pansera Bruno. Simple motion evasion differential game of many pursuers and evaders with integral constraints. Dyn. Games Appl. 8 (2018), №. 2, 352–378.

Error Functional Norm Of Hadamard-Type Hypersingular Integrals With High Oscillation In The Sobolev Space

Akhmedov D.M., Buvasherov D.S.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan;
dilshodbuvasherov@gmail.com

Hadamard-type hypersingular integrals and integrals with singular or oscillatory kernels play a vital role in various engineering and scientific applications, particularly in fields like fracture mechanics, aerodynamics, electromagnetics, elasticity, and fluid mechanics. Their significance in mathematical modeling and computational techniques underscores the need for continued research and development in their analysis and applications.

Consider the hypersingular integral

$$I = f.p. \int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx}{(x-t)^2}, \tag{1}$$

where φ is a smooth function on the interval $[0, 1]$, $t \in (0, 1)$ denotes the singularity and $e^{2\pi i\omega x} = \cos(2\pi\omega x) + i\sin(2\pi\omega x)$. The notation f.p. represents the finite part of the

integral. The definition [1] of hypersingular integral is

$$f.p.\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-t)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{t-\varepsilon}\frac{f(x)dx}{(x-t)^2} + \int_{t+\varepsilon}^b \frac{f(x)dx}{(x-t)^2} + \frac{\xi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]. \tag{2}$$

The quadrature formula for the integral is

$$\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx}{(x-t)^2} \cong \sum_{k=0}^N A_k\,\varphi(x_k), \tag{3}$$

where $0<t<1$, $\frac{e^{2\pi i\omega x}}{(x-t)^2}$ is the weight function, $h=\frac{1}{N}$, N is a natural number, $x_k=hk$, $k=\overline{0,N}$, and suppose that φ belongs to the Sobolev space $L_2^{(1)}(0,1)$, $i^2=-1$, $\omega h\in\mathbb{Z}$, $\omega\neq 0$. A_k are the coefficients of the quadrature formula (3). The space $L_2^{(1)}(0,1)$ is a Hilbert space and the inner product of two functions is defined as

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 \varphi'(x)\,\overline{\psi}'(x)dx, \tag{4}$$

where the function $\overline{\psi}$ is the complex conjugate function of the function ψ. The norm of the function is defined by the formula

$$\|\varphi\|^2_{L_2^{(1)}} = \langle\varphi,\varphi\rangle = \int_0^1 \varphi'(x)\overline{\varphi'(x)}\,dx. \tag{5}$$

The difference between the integral and the quadrature sum

$$(R_N,\varphi) = \int_0^1 \frac{e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx}{(x-t)^2} - \sum_{k=0}^N A_k\,\varphi(x_k), \tag{6}$$

is called the error of the quadrature formula (3). The rrror functional that corresponds to the error has the form

$$R_N(x) = \frac{\varepsilon_{[0,1]}e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)}{(x-t)^2} - \sum_{k=0}^N A_k\,\delta(x-x_k), \tag{7}$$

where $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator function of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function.

We can find the form of the norm of the error functional by using Riesz's theorem on the general form of a linear continuous functional in a Hilbert space and the definition of an extremal function introduced by S.L.Sobolev [2].

The following is valid.

Theorem 1. The norm of the error functional (7) of the quadrature formula (3) in the Sobolev space $L_2^{(1)}(0,1)$ has the form

$$\|R_n(x)\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)sign(x-y)\cos(2\pi\omega(x-y))dxdy}{2(x-t)^2(y-t)^2}$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\int_{0}^{1}\frac{\left(A_k^R\cos(2\pi\omega x)+A_k^I\sin(2\pi\omega x)\right)|x-x_k|}{(x-t)^2}dx$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{k'=0}^{N}\left(A_k^RA_{k'}^R+A_k^IA_{k'}^I\right)\frac{|x-x_k|}{2},$$

where $A_k=A_k^R+iA_k^I$

References

1. Boykov I., Roudnev V., Boykova A., Baulina O. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations, Appl. Numer. Math. 127 (2018) 280–305.

2. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, (in Russian) (1974).

An Upwind Difference Scheme For A Quasilinear Hyperbolic System

Aloev R. D.[1], Nematova D. E.[2], Alimova R. A.[3], Nishonova S. B.[4]

[1,2,3,4] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;

[1]aloevr@mail.ru, [2]nematova_dilfuza@mail.ru, [3]alimovarayhon14@gmail.com, [4]nishonovmuhammad625@gmail.com

Introduction. The paper considers a mixed problem for a quasilinear system of hyperbolic equations in Riemann invariants with dissipative nonlinear boundary conditions. To numerically solve the mixed problem, an initial-boundary difference problem based on an upwind difference scheme is proposed. A discrete Lyapunov function is constructed for the numerical solution of the initial-boundary difference problem for nonlinear problems. A theorem on the exponential stability of the stationary state of a quasilinear system is proven.

Statement of a quasilinear mixed problem. According to work Coron *et al.* (2007), in the region $\bar{\omega}\stackrel{\Delta}{=}\{(t,x):0\le t\le T,0\le x\le L\}$ we consider a mixed problem for the following quasilinear hyperbolic system

$$\xi_t+\varphi(\xi,\eta)\,\xi_x=0,\ \ \eta_t-\psi(\xi,\eta)\,\eta_x=0,\quad 0<t\le T,0<x<L \tag{1}$$

with boundary conditions at $x=0,L$:

$$\text{at}\ \ x=0:\quad \xi(t,0)=a(\eta(t,0)),\qquad\qquad \text{at}\ \ x=L:\quad \eta(t,L)=b(\xi(t,L)), \tag{2}$$

and with initial data

$$\xi(0,x)=\xi_0(x),\ \ \eta(0,x)=\eta_0(x),\quad 0<x<L \tag{3}$$

Here $\xi=\xi(t,x),\quad \eta=\eta(t,x)$ are unknown functions to be determined, and $\varphi=\varphi(\xi,\eta)$, $\psi=\psi(\xi,\eta)$ are given functions that have continuous derivatives up to the second order inclusive. We will assume that $a,b\in C^2(\mathrm{R})$.

Exponential stability of the numerical solution of a nonlinear initial-boundary difference problem. Here we establish the exponential stability of the numerical solution of the initial-boundary difference problem for the mixed problem (1), (2), (3).

To obtain the initial-boundary difference problem, we will use an upwind difference scheme for the numerical calculation of system (1). To do this, we cover the spatial region [0, 1] using a uniform grid $\Omega_{\Delta x} = \left\{x_j = j \cdot \Delta x,\ \ j = \overline{0, J}\right\}, \quad \Delta x - \text{step by } x.$
To numerically solve the mixed problem (1), (2), (3), we propose the following upwind explicit difference scheme

$$\begin{cases} \xi_j^{k+1} = \left(1 - [C_\varphi]_{j-1}^k\right) \xi_j^k + [C_\varphi]_{j-1}^k \xi_{j-1}^k, \quad k = \overline{0, K-1}, \qquad j = \overline{1, J}, \\ \eta_j^{k+1} = \left(1 - [C_\psi]_{j+1}^k\right) \eta_j^k + [C_\psi]_{j+1}^k \eta_{j+1}^k, \quad k = \overline{0, K-1}, \ \ j = \overline{0, J-1}, \end{cases} \tag{4}$$

with boundary conditions

$$\xi_0^k = a\left(\eta_0^k\right), \quad \eta_J^k = b\left(\xi_J^k\right), \tag{5}$$

and with initial data

$$\xi_j^0 = \phi_1\left(x_j\right), \ \ \eta_j^0 = \phi_2\left(x_j\right), \ \ j \in \{0, 1, 2, \cdots, J\}. \tag{6}$$

Here

$$[C_\varphi]_j^k = \varphi_j^k \frac{\Delta t}{\Delta x}, \ \ [C_\psi]_j^k = \psi_j^k \frac{\Delta t}{\Delta x}, \ \ C_j^k = \max\left([C_\varphi]_j^k, [C_\psi]_j^k\right).$$

Let us introduce the following vectors and matrices into consideration:

$$\mathbf{U}^k \triangleq \left(\eta_0^k, \xi_1^k, \eta_1^k, \cdots\cdots, \xi_{J-1}^k, \eta_{J-1}^k, \xi_J^k\right)^T, \qquad \mathbf{U}^* \triangleq \overbrace{\left(\eta^*, \xi^*, \eta^*, \cdots\cdots, \xi^*, \eta^*, \xi^*\right)^T}^{2J},$$
$$\mathbf{\Phi} \triangleq \left(\phi_2\left(x_0\right), \phi_1\left(x_1\right), \phi_2\left(x_1\right), \cdots\cdots, \phi_1\left(x_{J-1}\right), \phi_2\left(x_{J-1}\right), \phi_1\left(x_J\right)\right),$$
$$\mathsf{U}^k \triangleq diag\left(\eta_0^k, \xi_1^k, \eta_1^k, \cdots\cdots, \xi_{J-1}^k, \eta_{J-1}^k, \xi_J^k\right), \qquad \mathsf{U}^* \triangleq diag\left(\eta^*, \overbrace{\xi^*, \eta^*, \cdots\cdots, \xi^*, \eta^*}^{2J}, \vec{\xi^*}\right),$$
$$\mathsf{U}^0 \triangleq diag\left(\phi_2\left(x_0\right), \phi_1\left(x_1\right), \phi_2\left(x_1\right), \cdots\cdots, \phi_1\left(x_{J-1}\right), \phi_2\left(x_{J-1}\right), \phi_1\left(x_J\right)\right).$$

Theorem. Let us assume that the CFL type condition

$$C = \max\left(C_\varphi, C_\psi\right) < 1, \text{ where } C_\varphi = \bar{\varphi}\frac{\Delta t}{\Delta x}, \ C_\psi = \bar{\psi}\frac{\Delta t}{\Delta x}, \ \ \bar{\varphi} = \varphi\left(0, 0\right) > 0, \ \bar{\psi} = \psi\left(0, 0\right) > 0$$

is satisfied for (4). For each $\mathbf{U}^*$ satisfying the matrix inequality $\mathsf{U}^* \geq 0$, for each $\kappa_0 = a'\left(0\right)$, $\kappa_L = b'\left(0\right)$ satisfying the inequality $0 < |\kappa_0 \kappa_L| < 1$, for each $\mathcal{U} > 0$ and for any initial vector function $\mathbf{\Phi}$ satisfying the matrix inequality $\mathsf{U}^{\mathbf{0}} \geq \mathbf{0}$, and

$$\|\mathbf{\Phi} - \mathbf{U}^*\|_{l^2} < \mathcal{U} \tag{7}$$

the solution $\mathbf{U}^k$ of the initial-boundary difference problem (4), (5), (6) satisfies the matrix inequalities $\mathsf{U}^k \geq 0, \quad k \in \{0, 1, \cdots\}$, and the stationary state $\mathbf{U}^*$ of the initial-boundary difference problem (4), (5), (6) is stable in the l^2 -norm.

References

1. Aloev R., Berdyshev A., Bliyeva D., Dadabayev S. Baishemirov Z. Stability Analysis of an Upwind Difference Splitting Scheme for Two-Dimensional Saint–Venant Equations.// Symmetry. 2022. T.14, №10. P. 1–21.

2. Jean-Michel Coron, Brigitte d'Andrea-Novel, Georges Bastin. A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. //IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. T.52, №1. P. 2–11.

On the Reaction-Diffusion-Advection Epidemic Model in Spatially Variable Environments

Anvarjonov B. B.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail:@bunyodbek.anvarjonov@bk.ru;

Abstract. Understanding the spread of infectious diseases in environments with varying spatial characteristics is crucial for effective public health intervention and resource allocation. The reaction-diffusion-advection (RDA) model, when extended to incorporate spatial variability, offers a comprehensive framework to study how diseases propagate in heterogeneous environments. This article explores the theoretical underpinnings, practical applications, and current challenges associated with the RDA epidemic model in spatially variable settings. It highlights the modelвГЄs effectiveness in capturing complex spatial dynamics and its implications for public health strategies.

0.3 Introduction

Epidemiological modeling traditionally assumes homogeneity in space, which can oversimplify the dynamics of disease spread in real-world scenarios. To address this limitation, the reaction-diffusion-advection (RDA) model integrates reaction dynamics, diffusion processes, and advection effects to analyze disease transmission in environments with spatial variability. This extension provides a more accurate depiction of disease spread, accommodating variations in population density, movement patterns, and environmental factors.

0.4 The RDA Epidemic Model: A Comprehensive Framework

The RDA epidemic model combines three essential components:

1. Reaction Dynamics

The reaction component represents the interaction between different compartments of the population:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I$$

where S denotes susceptible individuals, I denotes infected individuals, β is the transmission rate, and γ is the recovery rate.

2. Diffusion

Diffusion models the random movement of individuals across space. The diffusion terms are described by:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D_S \Delta S - \beta SI$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D_I \Delta I + \beta SI - \gamma I$$

Here, D_S and D_I represent diffusion coefficients for susceptible and infected individuals, respectively.

3. Advection

Advection accounts for directed movement in specific directions due to factors such as wind or migration:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = D_S \Delta S - \beta SI$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I = D_I \Delta I + \beta SI - \gamma I$$

where $\mathbf{v}$ denotes the velocity field that directs the movement of individuals.

0.5 Challenges and Future Research Directions

1. Computational Demands

The inclusion of spatial variability increases the complexity of the RDA model, requiring advanced computational techniques for solving the model efficiently. High-performance computing and sophisticated numerical methods are essential for handling these complexities.

2. Parameter Estimation and Validation

Accurate estimation of spatially varying parameters is challenging but vital for reliable modeling. Advances in data collection, remote sensing, and geographic information systems (GIS) can improve parameter estimation and enhance model accuracy.

3. Integration with Other Models

Combining the RDA model with other epidemiological frameworks, such as agent-based models or network-based approaches, can provide a more comprehensive understanding of disease dynamics. Future research should explore these integrations to capture additional layers of complexity in disease spread.

References

1. Bai Z., Peng R. and Zhao X. A reaction-diffusion malaria model with seasonality and incubation period, J. Math. Biol. 2018. 77, 201–228.

2. Lou Y. and Zhao X. A reaction-diffusion malaria model with incubation period in the vector population, J. Math. Biol. 2011. 62, 543–568.

3. Inaida S., Shobugawa Y., Matsuno S., Saito R. and Suzuki H. The spatial diffusion of norovirus epidemics over three seasons in tokyo, Epidemiol. Infect. 2015. 143, 522–528.

4. Lin H. and Wang F. Global dynamics of a nonlocal reaction-diffusion system modeling the west nile virus transmission, Nonlinear Anal. 2019. RWA 46, 352–373.

Numerical Methods For Solving The Neumann Problem For The Wave Equation

Khudoyberganov M. U. [1], Anvarov D. U. [2], Abduxalilov F.T.

National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

mirzoali@mail.ru [1], dierbekanvarov20@gmail.com [2]

Introduction. Neumann problems posed on the wave propagation equation is applied to control of processes related to wave propagation, specifically controlling the gas or oil pressures in pipelines.

The existence of such type differential problem has investigated in [1-3], and their numerical solutions were studied in the articles [4,5].

In this note, the exponential stability of the mixed problem (8)-(10) are investigated, and a differential scheme is constructed as the numerical solution. Stability of the differential scheme is proven and numerical experiments are presented.

Differential mixed problem. Consider the numerical solution of the Neumann problem for the wave equation.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,, \quad 0 \le x \le l\,, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \gamma_1 u_t(t,0), \quad u_x(t,l) = -\gamma_2 u_t(t,l). \tag{3}$$

Here, $a, \gamma_1, \gamma_1 > 0$ are real numbers. This problem can be written as a system of first-order partial differential equations with specific derivatives.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

at $t = 0$

$$u_1(0,x) = \varphi(x), \quad u_2(0,x) \quad = \varphi_x(x). \tag{5}$$

Initial conditions at $x = 0$ and $x = l$ are of the form

$$u_2(t,0) - \gamma_1 u_1(t,0) = 0, \quad u_2(t,l) + \gamma_2 u_1(t,l) = 0. \tag{6}$$

We form a mixed problem posed on the system of symmetric t-hyperbolic equations satisfying the boundary conditions (4)-(6). Then, we perform the following substitution and reduce it into the canonical form:

$$\begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

and

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

we get the system (8). The initial conditions with respect to Riemann invariants are:

$$v_1(0,x) = \frac{1}{2}\varphi_x(x) - \frac{1}{2a}\psi(x), \quad v_2(0,x) = \frac{1}{2a}\psi(x) - \frac{1}{2}\varphi_x(x) \tag{9}$$

and boundary conditions are written in the form

$$v_1(t,0) = -\frac{1-\gamma_1 a}{1+\gamma_1 a} v_2(t,0), \quad v_2(t,l) = \frac{1-\gamma_2 a}{1+\gamma_2 a} v_2(t,l). \tag{10}$$

As a Lyapunov function, we consider the function:

$$L(t) = \int_0^l (\mu(x)v, v)\, dx, \tag{11}$$

where

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu x}\mu^+ & 0 \\ 0 & e^{\nu x}\mu^- \end{pmatrix}$$

became as a matrix, here ν, μ^+, μ^- are positive numbers.

In this paper, the exponential stability of the mixed problem (8)-(10) is investigated and a difference scheme for its numerical solution is constructed. The stability of the difference scheme is also proven and the results of a numerical experiment are presented.

References

1. М.Ф. Абдукаримов Устойчивость решения одной комбинированной смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Вестник МГУ, 2001, сер. 1., 2, стр. 3–10.

2. Dolgopolik, M., Fradkov, A.L., and Andrievsky, B. Two-point Output Feedback Boundary Control for Semilinear Hyperbolic Systems.IFAC-PapersOnLine. Volume 52, Issue 16, 2019, Pages 54-59.https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.755

3. Patrick Martinez. Stabilization for the wave equation with Neumann boundary condition by a locally distributed damping. ESAIM: Proc.,2000,Vol.8,p.119-136. https://doi.org/10.1051/proc:2000009

4. H.-O.Kreiss,N.A. Petersson and J.Yström.Difference approximations of the Neumann problem for the second order wave equation SIAM J.Numer.Anal.Vol.42 (2.3), pp. 12921323

5. A.H.Choudhury, R.K.Deka Wavelet Method for Numerical Solution of Wave Equation with Neumann Boundary Conditions. Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists.Vol II, IMEC, March 16-18,2011,Hong Kong

A New Quadrature Formula In The Classical Sense

Babaev S. S.[1,2,3], **Hayotov A. R.**[1], **Davronov J.R.**[2], **Kuklamova M.**[3]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, Uzbekistan;
bssamandar@gmail.com

[2] Tashkent International University, 7, Kichik khalka yoli str., Tashkent, Uzbekistan;

[3]Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara, Uzbekistan;

It is known that the problem of approximate integration of definite integrals with high accuracy is one of the urgent problems of computational mathematics. Most problems in science and technology are reduced to integral or differential equations, and their solutions are often expressed in terms of definite integrals, which cannot be calculated exactly.

We consider a quadrature formula of the form

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

where C_β are the coefficients, and x_β are the nodes of the quadrature formula (1). Functions $\varphi(x)$ are elements of the space $W_2^{(2,1)}(a,b)$. The space $W_2^{(2,1)}(a,b)$ is defined as follows

$$W_2^{(2,1)}(a,b) = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} | \varphi(x), \varphi'(x) \text{ is abs. cont }, \varphi''(x) \in L_2(a,b)\}.$$

The inner product of two arbitrary functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ belonging to the space $W_2^{(2,1)}(a,b)$ is introduced as follows

$$<\varphi,\psi>=\int_a^b (\varphi''(x)+\varphi'(x))(\psi''(x)+\psi'(x))\,dx$$

and since the considering space is a Hilbert space, the norm is defined using the inner product as follows

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_a^b (\varphi''(x)+\varphi'(x))^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

The error of this quadrature formula (1) is expressed as follows

$$R(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta). \tag{2}$$

The error functional corresponding to the error in form (2) has the form

$$R(x) = \varepsilon_{[a,b]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta)$$

The quadrature formula (1) is exact for 1 and e^{-x}, which means that we have the following conditions

$$(R(x), 1) = 0,$$
$$\left(R(x), e^{-x}\right) = 0.$$

From these conditions, we obtain the following system of equations

$$\int_a^b 1dx = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta,$$
$$\int_a^b e^{-x}dx = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta e^{-x_\beta}.$$

In the above equations, the coefficients $C_\beta(\beta = \overline{0, N})$ are unknowns. Let us construct a quadrature formula in the classical sense, with $N = 1$. We have the following result.

Theorem. The coefficients of the quadrature formula (1) in the space $W_2^{(2,1)}(a, b)$ with $N = 1$ are as follows

$$C_0 = \frac{e^a (a - b + 1) - e^b}{e^a - e^b},$$
$$C_1 = \frac{e^b (a - b - 1) + e^a}{e^b - e^a}$$

Now, we divide the interval $[a, b]$ into k equal parts, and apply the quadrature formula (1) to each interval, and we obtain a new composite quadrature formula

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \cong \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{(h+1) \cdot e^{x_i} - e^{x_{i+1}}}{e^{x_i} - e^{x_{i+1}}} \cdot f(x_i) + \frac{(h-1) \cdot e^{x_{i+1}} + e^{x_i}}{e^{x_{i+1}} - e^{x_i}} \cdot f(x_{i+1}) \right],$$

here, $h = (b - a)/k$, $k \in \mathbb{N}$, $x_i = a + ih$ and $i = 0, 1, \ldots, k$.

Numerical Solution Of Highly Oscillatory Integral Equations By An Optimal Quadrature Formula

Babaev S. S.[1,2,3], **Ganieva M. N.**[3]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, Uzbekistan;
bssamandar@gmail.com
[2] Tashkent International University, 7, Kichik khalka yoli str., Tashkent, Uzbekistan;
[3]Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara, Uzbekistan;

In radar systems the goal is to detect and characterize objects (e.g., aircraft, and ships) by transmitting a signal and analyzing the reflected echo [1]. The transmitted signal is often a modulated wave, such as $s(t) = a(t)e^{2\pi i f_0 t}$, where f_0 is the carrier frequency and $a(t)$ is a slowly varying envelope [2]. When this signal reflects off a moving target, the

echo is delayed by a time τ (proportional to the target's distance) and Doppler-shifted by a frequency ω due to the target's velocity. The received signal is a superposition of echoes from multiple scattering points on the target. The challenge is reconstructing the target's reflectivity profile $f(x)$, where x represents a range, from the noisy received signal $r(t)$. This problem leads to an integral equation with a highly oscillatory kernel, such as:

$$r(t) = \int_0^R f(x) e^{2\pi i(f_0+\omega)(t-2x/c)}\, dx,$$

where R is the maximum range, c is the speed of light, and the kernel $e^{2\pi i(f_0+\omega)(t-2x/c)}$ oscillates rapidly for large f_0 or ω (e.g., GHz frequencies in radar). Highly oscillatory integrals, such as $\int_0^1 f(x)e^{2\pi i\omega x}\, dx$ with large ω, are challenging for standard numerical integration methods due to rapid oscillations. This work develops and applies an optimal quadrature formula in the Hilbert space $W_2^{(1,0)}(0,1)$ to address this problem efficiently, focusing on the numerical calculation of such integrals in radar applications.

Optimal quadrature formula in $W_2^{(1,0)}(0,1)$ space.

We consider the quadrature formula [3]:

$$\int_0^1 \rho(x)\varphi(x)\, dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

where $\rho(x)$ is the weight function, $x_\beta = \beta h$ with $h = 1/N$ and $\beta = 0, 1, \ldots, N$, and C_β are the optimal coefficients. The coefficients C_β are derived to minimize the error functional in $W_2^{(1,0)}(0,1)$ [3]:

$$\begin{aligned} C_\beta &= \frac{1}{2(1-e^{2h})} \int_0^1 p(x) \big[\operatorname{sign}(x-h\beta+h)(e^{h\beta-x} - e^{x-h\beta+2h}) \\ &+ \operatorname{sign}(x-h\beta-h)(e^{h\beta-2h-x} - e^{x-h\beta}) + (1+e^{2h})\operatorname{sign}(x-h\beta)(e^{x-h\beta} - e^{h\beta-x})\big]\, dx. \end{aligned}$$

The space $W_2^{(1,0)}(0,1)$ is defined by functions φ with absolute continuity and $\varphi' \in L_2(0,1)$.

For highly oscillatory integrals, we set $\rho(x) = e^{2\pi i\omega x}$, with $\omega \in \mathbb{R}$ in our example.

Theorem. Coefficients of the optimal quadrature formulas of the form (1) in the sense of Sard for $\rho(x) = e^{2\pi i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$ with $\omega \neq 0$ in the space $W_2^{(1,0)}(0,1)$ have the form [4]

$$C_0 = \frac{1 + e^{2h} + 2\pi i\omega(e^{2h}-1) - 2e^{(2\pi i\omega+1)h}}{(e^{2h}-1)((2\pi\omega)^2+1)},$$

$$C_\beta = \frac{2(1+e^{2h}-2e^h\cos 2\pi\omega h)}{(e^{2h}-1)((2\pi\omega)^2+1)} \cdot e^{2\pi i\omega h\beta}, \quad \beta = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$C_N = \frac{e^{2\pi i\omega}(1 + e^{2h} - 2\pi i\omega(e^{2h}-1) - 2e^{(1-2\pi i\omega)h})}{(e^{2h}-1)((2\pi\omega)^2+1)}.$$

References

1. Skolnik M.I. Introduction to Radar Systems. 2001. 3rd ed., McGraw-Hill.
2. Richards M.A. Fundamentals of Radar Signal Processing. 2014. 2nd ed., McGraw-Hill.
3. Hayotov A.R., Babaev S.S. The numerical solution of a Fredholm integral equations of the second kind by the weighted optimal quadrature formula.// Results in Applied Mathematics. 2024. vol. 24, 100508.
4. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in $W_2^{(m,m-1)}$ space.// AIP Conf. Proc., 2021. 2365, 020021.

The Numerical Solution Of A Fredholm Integral Equation Using The Galerkin's Method Based On The Optimal Interpolation

Babaev S. S.[1,2,3], **Mirzaeva S. O.**[3]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, s9, University str., Tashkent, Uzbekistan;
bssamandar@gmail.com
[2] Tashkent International University, 7, Kichik khalka yoli str., Tashkent, Uzbekistan;
[3]Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara, Uzbekistan;

In this work, we discuss the Galerkin method for solving the integral equations

$$\int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{1}$$

and

$$u(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{2}$$

In these equations, u is an unknown function, the kernel of the integral equation K, and the function f on the right-hand side are given.

The term integral equation was first used by du Bois-Reymond in 1888. Equations (1) and (2) carry the name of Fredholm because of his contributions to the field and are called *Fredholm integral equations* of the *first* and *second kinds*, respectively. Here we consider equation (2) the case where the solution exists and is unique, and the kernel is sufficiently smooth.

We express the integral equation (2) in the operator form:

$$(1-K)u = f$$

where the operator K is assumed to be compact on the Banach space $\mathcal{X}$. The most common choices are $C(a,b)$ and $L^2(a,b)$. For Galerkin's method and its generalizations, the Sobolev space $H^r(a,b)$ is also frequently used, where $H^0(a,b) \equiv L^2(a,b)$.

In practice, we select a sequence of finite-dimensional subspaces $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ for $n \geq 1$, where each $\mathcal{X}_n$ has dimension d_n. Let $\mathcal{X}_n$ have a basis $\phi_1, \ldots, \phi_N$, where we set $N \equiv d_n$ for notational simplicity. We then seek a function $u_n \in \mathcal{X}_n$, which can be expressed as

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i(x), \quad x \in [a,b]. \tag{3}$$

This is substituted into (2), and the coefficients $(c_1, \ldots, c_N)$ are determined by ensuring the equation is nearly exact in a certain sense. And the error will be equal to the following

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - \int_a^b K(x,y)u_n(y)dy - f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\phi_i(x) - \int_a^b K(x,y)\phi_i(y)dy \right) - f(x), \quad x \in [a,b]. \end{aligned} \tag{4}$$

This is known as the residual in the equation's approximation when using $u \approx u_n$. To obtain the coefficients $(c_1, \ldots, c_N)$ required to $r_n(x)$ satisfy

$$(r_n, \phi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

To find $(c_1, \ldots, c_N)$, apply (5) to (4). This yields the system of linear equations

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \left\{ (\phi_i, \phi_j) - (K\phi_i, \phi_j) \right\} = (f, \phi_j), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

This is Galerkin's method for obtaining an approximate solution to (2). The system has a solution, and it is unique. The resulting sequence of approximate solutions u_n, converge to u in X (the proof is given in [1]).

For simplicity, we solve the problem for the interval $[0, 1]$ instead of the interval $[a, b]$. Piecewise linear splines are good basis functions due to their simplicity and ease of use. In this work, we use a different basis function with higher accuracy. We divide the interval $[0, 1]$ into N subintervals with nodes:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1.$$

Let $h = 1/N$ denote the mesh size.

The main goal of this work is to construct a set of new basis functions and find an approximate solution using these basis functions. In this case, an optimal interpolation formula is constructed in the Hilbert space $W_2^{(1,0)}(0, 1)$, and the coefficients of the constructed optimal interpolation formula are used as basis functions [2]:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{e^{hi-x} - e^{x-hi}e^{2h}}{1-e^{2h}}, & h(i-1) \le x < hi, \\ \frac{e^{x-hi} - e^{hi-x}e^{2h}}{1-e^{2h}}, & hi \le x < h(i+1), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

Each $\phi_i(x)$ is continuous, and satisfies $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker delta). Here, $i = \overline{1, N}$ and $j = \overline{1, N}$.

The Galerkin's method requires solving the linear system $\mathbf{Ac} = b$, where:

$$A_{ij} = (\phi_i, \phi_j) - (K\phi_i, \phi_j),$$

$$b_i = (f, \phi_j).$$

It is clear that ϕ_i and ϕ_j overlap only if $|i - j| \le 1$. Thus, A_{ij} is sparse (mostly tridiagonal for 1D problems).

References

1. Atkinson K.E. The numerical solution of integral equations of the second kind. Cambridge university press. 2009. P. 551 .

2. Babaev S.S., Hayotov A.R. Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$.// Calcolo. 2019. vol. 56, issue 3, 23.

Integration Of The Fractional Modified Korteweg De Vries-Sine-Gordon Equation By The Inverse Scattering Method

Babajanov B. A.[1], Abdukarimov F. B.

[1,2]Urgench State Univesity named after Abu Rayhon Beruniy, Urgench, Uzbekistan;
[1]a.murod@mail.ru, [2]goodluck_0714@mail.ru

The mKdV-SG equation

$$u_{xt} + p_1\left(\frac{3}{2}\left(u_x\right)^2 u_{xx} + u_{xxxx}\right) - p_2 \sin u = 0, \tag{1}$$

was proposed as a model for describing nonlinear oscillations in an atomic lattice and it was found that this equation is completely integrable and has multisoliton solutions [1]. Where $p_1, p_2 = const$.

Recently, mKdV-SG has attracted much attention in the research literature for both physical and mathematical reasons [2,3,4,5,6,7,8]. For instance, there is a strong interest in experimental and theoretical studies in the area of few-cycle-optical pulses, in the supersonic motion of a crowdion and so on [7,8].

In [9], it was shown that the inverse scattering transform method can also be used to obtain soliton solutions of a class of fractional nonlinear evolution equations which defined based on nonlinear extensions of Riesz fractional derivative $|-\partial_x^2|^{\varepsilon}$, $\epsilon \in (0,1)$. For further development of the study of fractional nonlinear soliton equations which are integrable in the sense of IST, we refer to the works and their citations [10,11,12].

In this paper we investigate the fractional version of the Eq. (1) and show that the inverse scattering transform method can also be used to obtain soliton solutions of fmKdV-SG. Namely, we show that the fractional mKdV-SG equation is also an important theoretical model as it is a completely integrable system. We have determined the time evolution of the scattering data for the AKNS system associated with the solution of the fractional mKdV-SG equation. Then, using the solution of the inverse scattering problem with respect to the time-dependent scattering data, we recover the desired solution of the fractional mKdV-SG equation. It is illustrated the relationship between the wave velocity and the ϵ parameter for fractional mKdV-SG equation in the case of one soliton solution, then this result was compared with fractional mKdV equation, fractional SG equation and mKdV-SG equation. This analysis shows that the absolute value of wave velocity becomes larger as ϵ increases.

References

1. Hirota, R. Exact solution of the Sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons // Journal of the Physical Society of Japan, 1972, 33(5), 1459-1463.

2. Khasanov, A. B., Normurodov, K. N., Khudaerov, U. O. Integrating the modified Korteweg-de Vries-sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions // Theoretical and Mathematical Physics, 2023, 214(2), 170-182.

3. Wazwaz A. Travelling wave solutions for the MKdV-sine-Gordon and the MKdV-sinh-Gordon equations by using a variable separated ODE method// Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(2), 1713-1719.

4. Leblond, H., Mihalache, D. Few-optical-cycle solitons: Modified Korteweg-de Vries sine-Gordon equation versus other non-slowly-varying-envelope-approximation models// Physical Review A, 2009, 79(6).

5. Hoitmetov, U. Integration of the loaded mKdV-Sine-Gordon equation with a source// Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, 20(2), 859-879.

6. Jia, M., Lin, J., Lou, S. Y. Soliton and breather molecules in few-cycle-pulse optical model // Nonlinear Dynamics, 2020, 100(4), 3745-3757.

7. Sutter, D., Gallmann, L., Matuschek, N., Morier-Genoud, F., Scheuer, V., Angelow, G., Tschudi, T., Steinmeyer, G., Keller, U. Sub-6-fs pulses from a SESAM-assisted Kerr-lens modelocked Ti:sapphire laser: at the frontiers of ultrashort pulse generation // Applied Physics B,2000, 70(S1), S5-S12.

8. Kosevich, A., Kovalev, A. The supersonic motion of a crowdion. The one-dimensional model with nonlinear interaction between the nearest neighbours// Solid State Communications, 1973, 12(8), 763-765.

9. Ablowitz, M. J., Been, J. B., Carr, L. D. Fractional integrable nonlinear soliton equations // Physical Review Letters, 2022, 128(18).

10. Ablowitz, M. J., Been, J. B., Carr, L. D. Integrable fractional modified Korteweg-de-Vries, sine-Gordon, and sinh-Gordon equations // Journal of Physics a Mathematical and Theoretical, 2022, 55(38), 384010.

11. Zhang, M., Weng, W., Yan, Z. Interactions of fractional N-solitons with anomalous dispersions for the integrable combined fractional higher-order mKdV hierarchy // Physica D Nonlinear Phenomena, 2022, 444, 133614.

12. An, L., Ling, L., & Zhang, X. Nondegenerate solitons in the integrable fractional coupled Hirota equation // Physics Letters A, 2023, 460, 128629.

An Efficient Computational Approach For The Time-Fractional Stochastic Stokes–Darcy Model

Berdyshev A. S.[1,2], **Baigereyev D. R.**[3]

[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Institute of Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan;
berdyshev@mail.ru
[3]Sarsen Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan;
dbaigereyev@gmail.com

This paper focuses on the efficient numerical implementation of a fractional-order extension of the stochastic Stokes–Darcy model proposed in [1]. This model is widely applicable in engineering, biomedical, and environmental contexts, including surface–subsurface filtration in coastal aquifers, blood flow, reservoir engineering, and flood dynamics.

The problem under study is defined as follows. Let D_f and D_p be two disjoint domains in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ separated by an interface $I = \overline{D}_f \cap \overline{D}_p$. Let $\Gamma_f = \partial D_f \backslash I$, $\Gamma_p = \partial D_p \backslash I$, $\Gamma_p = \Gamma_{pd} \cup \Gamma_{pn}$, $\Gamma_{pd} \cap \Gamma_{pn} = \emptyset$. Let $J = (0, T]$ be the time interval of interest. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ be a complete probability space, where Ω is the space of elementary events, $\mathcal{F}$ is the sigma-algebra of events, $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ is a probability measure. Let us model the hydraulic conductivity as [2]

$$K_N(x, \omega) = K_{\min} + \exp\left(\mathbb{E}[Z] + \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n} v_n(x) Y_n(\omega)\right), \qquad N \in \mathbb{N},$$

where $\omega \in \Omega$, $\{Y_n(\omega)\}$ are pairwise uncorrelated real random variables with zero expectation and unit variance, $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ and $\{v_n\}_{n=1}^N$ are its eigenvalues and corresponding eigenvectors. Further, let us denote by ϕ_N, $\mathbf{u}_N$, p_N the sought piezometric head, velocity and kinematic pressure of the fluid corresponding to K_N.

Problem 1. Find random variables $\phi_N : \overline{D}_p \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_N : \overline{D}_f \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ and $p_N : \overline{D}_f \times \overline{J} \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfying the following conditions almost certainly in Ω:

$$\begin{aligned}
&S\partial^{\gamma}_{0,t}\phi_N - \nabla \cdot (K_N \nabla \phi_N) = f_p && \text{in } D_p \times J \times \Omega,\\
&\phi_N = \phi_d && \text{on } \Gamma_{pd} \times J \times \Omega,\\
&-K_N \nabla \phi_N \cdot \mathbf{n}_p = 0 && \text{on } \Gamma_{pn} \times J \times \Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^{\gamma}_{0,t}\mathbf{u}_N - \nabla \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N) = \mathbf{f}_f && \text{in } D_f \times J \times \Omega,\\
&\nabla \cdot \mathbf{u}_N = 0 && \text{in } D_f \times J \times \Omega,\\
&\mathbf{u}_N = \mathbf{0} && \text{on } \Gamma_f \times J \times \Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}_f - K_N \nabla \phi_N \cdot \mathbf{n}_p = 0 && \text{on } I \times J \times \Omega,\\
&-\mathbf{n}_f \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N) \cdot \mathbf{n}_f = g\phi_N && \text{on } I \times J \times \Omega,\\
&-\mathbf{m}_i \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_N, p_N) \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\alpha_{\mathrm{BJS}}}{\sqrt{\mathbf{m}_i \cdot K_N \mathbf{m}_i}} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{m}_i && \text{on } I \times J \times \Omega,\ 1 \le i \le d-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_0 && \text{in } \overline{D}_f \times \{0\} \times \Omega,\\
&\phi_N = \phi_0 && \text{in } \overline{D}_p \times \{0\} \times \Omega,
\end{aligned}$$

where S is the water accumulation coefficient, $\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u})$ is the stress tensor, $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\top}\right)$ is the strain tensor, f_p and $\mathbf{f}_f$ are the source or sink terms, μ is the kinematic viscosity of the fluid, $\mathbf{n}_f$ and $\mathbf{n}_p$ denote the outer unit normal to the boundary ∂D_f and ∂D_p, respectively, $\{\mathbf{m}_1, ..., \mathbf{m}_{d-1}\}$ is the orthonormal system of unit tangent vectors to the interface I, and $\partial^{\gamma}_{0,t} f(\cdot, t)$ is the temporal fractional derivative in the sense of Caputo.

The sparse grid stochastic collocation method is applied to solve stochastic Problem 1. To this end, a higher-order deterministic numerical method is developed which integrates several advanced techniques, including finite element/finite difference discretization, a fast numerical algorithm for the Caputo fractional derivative [3], and a cost-effective ensemble strategy. The chosen approximation formula for the fractional derivative significantly

reduces computational time and memory usage, as it only requires storing the solution at the three most recent time layers. This advantage is particularly beneficial for stochastic simulations, where the problem must be solved repeatedly for different input data. Finally, by employing the ensemble strategy, the deterministic problem is solved once for all samples of the hydraulic conductivity, rather than separately for each sample, leading to a significant reduction in computational cost and memory usage. The stability and convergence of the proposed numerical method have been rigorously analyzed and validated through numerical experiments.

Further, this study examines the influence of fractional derivatives on fluid flow within the Stokes–Darcy model under uncertainty with a randomly generated conductivity. While prior research has explored the effects of fractional derivatives in the Darcy framework, this study focuses specifically on their impact within the coupled Stokes–Darcy model. To the best of our knowledge, this is the first work to analyze these effects while incorporating both memory and stochasticity. To this end, we compare the solutions of several stochastic test problems using different fractional derivative orders alongside the integer-order case.

Finally, CPU time benchmark analysis has been performed and compared with the numerical method of the original paper [1]. The analysis showed that our algorithm is 2–4 times faster than the parallel algorithm used in [1]. Moreover, the memory usage remained nearly constant across considered time step values when applying our algorithm. In contrast, the algorithm from [1] required significantly larger arrays to store the solution on all time layers.

Literature

1. Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Numerical method for fractional-order generalization of the stochastic Stokes–Darcy model // Mathematics. 2023. Vol. 11, №. 3763.

2. Baishemirov Z., Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Efficient numerical implementation of the time-fractional stochastic Stokes-Darcy model // Fractal and Fractional. 2024. Vol. 8, №. 476.

3. Zhu H., Xu C. A fast high order method for the time-fractional diffusion equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2019. Vol. 57, pp. 2829–2849.

Approximate Solution Of The Generalized Abel Integral Equation Using Derivative Quadrature Formula

Boytillayev B.A.

Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: bboytillayev@gmail.com

In this work, we deal with the problem of constructing a derivative optimal quadrature formula

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\varphi(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1}\varphi'(x_\beta), \;\; 0<\alpha<1 \tag{1}$$

for the approximate solution of the generalized Abel integral equations, here $x_\beta = h\beta,\ h = \frac{t}{N},\ t > 0,\ \varphi \in W_2^{(2,1)}(0,t)$ and $C_{\beta,0}$ are coefficients.

For this, it is first required to find the coefficients of the following quadrature formula in $L_2^{(1)}(0,t)$ space

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\varphi(x_\beta),\ \ 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

where $C_{\beta,0}$ and x_β are the coefficients and nodes of the quadrature formula (2), respectively. This problem was solved in [1], and we use the coefficients of the optimal quadrature formula (2) in construction of the optimal quadrature formula of the form (1).

We note that the coefficients of the optimal quadrature formula (2) are as follows [1]:

$$\begin{cases} C_{0,0} = \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left((t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right) \\ C_{\beta,0} = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right], \beta = 1,2,\ldots,N-1, \\ C_{N,0} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \end{cases}$$

The error of the quadrature formula (1) is as follows

$$(\ell,\varphi) = \int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\varphi\left(x_\beta\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1}\varphi'(x_\beta) \tag{3}$$

and the corresponding error functional has the form

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\delta\left(x-x_\beta\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1}\delta'(x-x_\beta), \tag{4}$$

here $\varepsilon_{[0,t]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0;t]$ and $\delta(x)$ is Dirac's delta function.

As a result, we have the explicit form of the norm for the error functional (4) to estimate the error of the quadrature formula (1). The following holds.

Theorem 1. In the space $W_2^{(2,1)}(0,t)$ the squared norm of the error functional $\ell(x)$ has the form

$$\|\ell\|^2_{W_2^{(2,1)^*}} = -\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_{\beta,1}C_{\gamma,1}G_1(x_\beta - x_\gamma) + 2\sum_{\gamma=0}^{N} C_{\gamma,1}\left[\int_0^t \frac{G_2'(x-x_\gamma)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\gamma,0}G_2'(x_\gamma - x_\beta)\right] -$$

$$- 2\sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\int_0^t \frac{G_2(x-x_\beta)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_{\beta,0}C_{\gamma,0}G_2(x_\beta - x_\gamma) + \int_0^t\int_0^t \frac{G_2(x-y)dxdy}{(t-x)^{1-\alpha}(t-y)^{1-\alpha}},$$

where $G_2(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\right)$.

References

1. Shadimetov Kh. M. and Daliev B. S., Optimal formulas for the approximate-analytical solution of the general Abel integral equation in the Sobolev space, Results in Applied Mathematics 15, 100276 (2022).

2. Hayotov A. R., Babaev S. S., Boytillayev B.A. The numerical solution of an Abel integral equation by the optimal quadrature formula, Results in Applied Mathematics 25, 100542 (2025) https://doi.org/10.1016/j.rinam.2025.100542

Fractional-Order Modeling of Corruption Dynamics

Jabborov N.M.,[1] Eshdavlatova S.E.,[2] Tuychiyev S.G‘.[3]

[1]Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
jabborov61@mail.ru
[2]The Belarussian-Uzbek Institute of joint inter-sectoral practical technical qualifications, Tashkent, Uzbekistan;
sevaraeshdavlatova@gmail.com
[3]Tashkent International University of Financial management and Technology(TIFT), Tashkent, Uzbekistan;
stuychev@gmail.com

This study presents a nonlinear deterministic mathematical model to analyze the dynamics of corruption within a population using fractional-order derivatives in the Caputo sense. Proposed model the construction of the suggested model is presented. Let us consider that, for any time $t \geq 0$, the population under study, say $N(t)$, is classified into five groups, such as susceptible individuals $S(t)$, exposed individuals $E(t)$, corrupted individuals $C(t)$, recovered individuals $R(t)$ and immune individuals $I(t)$. Total population:

$$N(t) = S(t) + E(t) + C(t) + R(t) + I(t).$$

In addition, the formulation of the model incorporates distinct parameters:
ρ : represents the likelihood of corruption being transmitted during each interaction;
σ : rate of change of corruption due to religious teaching
β : represents the rate at which susceptible individuals interact with exposed individuals;
δ : represents the rate at which individuals exposed to corruption transition into being corrupted;
ε : represents the rate at which individuals who have recovered transition back to being honest.
Π :is the rate at which susceptible individuals are recruited.
κ : It represents the fraction of individuals who move from the susceptible group to the honest population;
μ : denotes the mortality rate for the overall human population;
α : represents the fraction of individuals who transition from the exposed compartment to the corrupted sub-population;
θ : It refers to the fraction of individuals who transition from the recovered compartment to the immune sub-population. [1]
Corruption dynamic model is governed through a system of nonlinear differential

equations, such that:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi + (1-\theta)\,\varepsilon R - \rho\beta SC - (\kappa+\mu)\,S, \\ \frac{dE}{dt} = \rho\beta SC - (\delta+\mu)\,E, \\ \frac{dC}{dt} = \alpha\delta E - (\sigma+\mu)\,C, \\ \frac{dR}{dt} = \sigma C + (1-\alpha)\,\delta E - (\varepsilon+\mu)\,R, \\ \frac{dI}{dt} = \kappa S + \theta\varepsilon R - \mu I, \end{cases} \tag{1}$$

With initial conditions: $S(0) = S_0 \geq 0, E(0) = E_0 \geq 0, C(0) = C_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0$. In dynamic modeling, we use the Caputo fractional-order derivative instead of the classical integer-order time derivative. These fractional-order formulations allow for a better understanding of memory effects and enable a deeper exploration of corruption dynamics. Some important concepts and results related to fractional calculus are presented for fractional formulations. There are various types of fractional derivatives, but the ones commonly used in mathematical modeling are the Riemann-Liouville derivative and the Caputo derivative.

Definition. The Caputo derivative of a function f (t) of order α (in fractional form) for $0 < \alpha < 1$ is defined as follows:

$$D_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{1-\alpha} f'(\xi)\, d\xi,$$

such that the integral part on the right-hand side exists.

The formulation is initiated by incorporating the Caputo fractional-order time derivative into the system of equations presented in Eq. (1). To address the dimensional inconsistency, an auxiliary parameter ∇ is introduced, representing the fractional nature of the derivative[2]. The revised model, which describes the dynamics of corruption transmission for time $t > 0$ and step size $0 < n \leq 1$ is expressed as follows:

$$\begin{cases} \frac{1}{\nabla^{1-n}}\,{}^{C}D_t^n(S(t)) = \Pi + (1-\theta)\,\varepsilon R - \rho\beta SC - (\kappa+\mu)\,S, \\ \frac{1}{\nabla^{1-n}}\,{}^{C}D_t^n(E(t)) = \rho\beta SC - (\delta+\mu)\,E, \\ \frac{1}{\nabla^{1-n}}\,{}^{C}D_t^n(C(t)) = \alpha\delta E - (\sigma+\mu)\,C, \\ \frac{1}{\nabla^{1-n}}\,{}^{C}D_t^n(R(t)) = \sigma C + (1-\alpha)\,\delta E - (\varepsilon+\mu)\,R, \\ \frac{1}{\nabla^{1-n}}\,{}^{C}D_t^n(I(t)) = \kappa S + \theta\varepsilon R - \mu I. \end{cases} \tag{2}$$

The study of corruption dynamics using a system of fractional-order differential equations with the Caputo derivative is significantly more effective compared to integer-order derivatives, as it takes into account the memory effect. [3,4]

References

1. Athithan S, Mini Ghosh, and Xue-Zhi Li. Mathematical modeling and optimal control of corruption dynamics. // Asian-European Journal of Mathematics, 11(06): 1850090, 2018.

2. Muhammad A.N., Idris Ahmed, Muhammad J.I., Mujahid A., Abbas U. S. Modelling in fractional-order systems with applications in engineering. // Ptolemy Institute of Scientific Research and Technology (PISRT) Lahore, 54000, Pakistan. 182 pages.

3. Danford O, Kimathi M, and Mirau S. Mathematical modelling and analysis of corruption dynamics with control measures in Tanzania. // Journal of Mathematics and Informatics. 2020.

4. Жабборов Н.М., Туйчиев С.Г., Эшдавлатова С.Э. Влияния некоторых коэффициентов на уровень коррупции // Yosh olimlar axborotnomasi.4(4), 2024, pp.26-33.

Derivative Optimal Quadrature Formula With Atbitrary Fixed Nodes In Sobolev Space

[1,2]**Hayotov A. R,** [1]**Berdimuradova U. A.**

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,

[2]Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: hayotov@mail.ru, a.hayotov@cenralasian.uz,umidapulatova27@gmail.com

In this work, we construct a derivative optimal quadrature formula for arbitrary fixed nodes. To solve this problem, we use the phi-function method.

First we determine the expression for the coefficients of the quadrature formula using the phi function. Then, we find the general form of our phi-function for our derivative quadrature formula and calculate the values of the quadrature formula coefficients using the determined phi-function.

In particular, if the nodes are evenly distributed, then the Eyler-Macloren formula is obtained. The obtained quadrature formula is exact for the 1, x and all functions whose second derivative is equal to zero.

On this case, the coefficients in front of the function and its derivative in the quadrature formula are optimized together.

References

1. Shadimetov, Kh.M., Hayotov, A.R.: Optimal Approximation of Error Functionals of Quadrature and Interpolation Formulas in Spaces of Differentiable Functions. *MUHR PRESS*, **2022**, 246 pages.

2. Catinas, T., Coman, Gh.: Optimal Quadrature Formulas Based on the ϕ-Function Method. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, **2005**, *LII(6)*, January.

3. Hayotov, A.R., Babaev, S.S., Abduaxadov, A.A., Davronov, J.R.: An Optimal Quadrature Formula Exact to the Exponential Function by the Phi Function Method. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, **2024**, *69(3)*, 651–663.

Optimization Of Approximate Integration Formula For Rapidly Oscillating Functions In The Hilbert Space And Its Application

[1,2]**Hayotov A. R,** [1,3]**Kurbonnazarov A. I.**

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
[2]Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan,
[3]Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: hayotov@mail.ru, a.hayotov@cenralasian.uz, mumin_1974@inbox.ru

In this work, we construct an optimal quadrature formula in the Sard sense based on a functional approach for the numerical computation of integrals of rapidly oscillating functions. To solve this problem, we employ the Sobolev method.

To accomplish this, we first solve the boundary value problem for an extremal function. To solve the boundary value problem, we employ direct and inverse Fourier transforms and determine the fundamental solution of the given differential operator. Using the extremal function, we then find the norm of the error functional of the quadrature formula.

For the given nodes, we find the minimum value of the norm of the error functional for the quadrature formula by coefficients. The obtained quadrature formula is exact for the hyperbolic functions $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, and the polynomial of degree $(m-3)$. In this work, we consider the case $\omega h \notin \mathbb{Z}$ and $\omega \in \mathbb{R}$ in the Hilbert space $\mathrm{K}_2^{(m)}(0,1)$.

We apply the constructed optimal quadrature formula to the reconstruction of the computed tomography images.

We note that, particular cases $m = 2$ and $m = 3$, optimal quadrature formulas have been constructed in the works [1,2].

References

1. Hayotov, A.R., Kurbonnazarov, A.I.: An optimal quadrature formula for the approximate calculation of Fourier integrals in the space $K_2^{(3)}(0,1)$. *Problems of computational and applied mathematics.* Tashkent, **2023**, *50*, 183-196.

2. Hayotov, A.R., Kurbonnazarov, A.I., and Polvonov, S.: Numerical Integration of Fourier Integrals by the Optimal Quadrature Formula Exact for Hyperbolic Functions, *AIP Conf. Proc. 3004, 060049 (2024)* 10.1063/5.0199915.

Constructing An Optimal Quadrature Formula With Derivative By The Phi Function Method

Hayotov A. R.[1,2,3]**, Shomalikova M. Sh.**[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, University Street, 100174 Tashkent, Uzbekistan
[2] Central Asian University, 264, Milliy Bog Street, 111221 Tashkent, Uzbekistan
[3]Bukhara State University, 11, M. Ikbol Street, 200117 Bukhara, Uzbekistan
e-mail: hayotov@mail.ru , a.hayotov@centralasian.uz
e-mail: mshomalikova@gmail.com , mshomalikova@centralasian.uz

Numerical integration of definite integrals plays a crucial role in both fundamental and applied sciences. The precision of approximate integral calculations depends on the

initial data and specific conditions, which impose various requirements on the resulting computations. Traditional methods for numerical analysis of definite integrals, such as the quadrature formulas developed by Gregory, Newton-Cotes, Euler, Gauss, Markov, and others, are well-established. Since the mid-20th century, the theory of creating optimal formulas for numerical integration through variational methods has evolved. It is important to mention that optimal quadrature formulas exist in the sense defined by Nikolsky and Sard. This paper focuses on the challenge of constructing an optimal quadrature formula with the weight function $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ in the sense of Sard. In this process of obtaining of the optimal quadrature formula, the method of φ-functions is applied. The error of the formula is estimated by integrating the square of the φ function from a specific Hilbert space. Afterward, the appropriate φ function is chosen such that the integral of its square within this interval is minimized. Finally, the coefficients of the optimal quadrature formula are determined using the resulting φ function. It should be noted that the obtained optimal formula is exact for any linear functions.

A Simple Motion Evasion Differential Game With Exponential Integral Constraints

Ibragimov G. I.[1], **Tursunaliev T. G.** [2]

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;

ibragimov.math@gmail.com toychivoytursunaliyev@gmail.com

1. Statement of problem

We consider a simple motion evasion differential game of one evader y and m pursuers x_i, $i = 1, ..., m$, in R^n, $n \geq 2$. Game is described by the following equations:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\dot{y} = v, \qquad y(0) = y^0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_i, x_i^0, y, y^0, u_i, v \in R^n$, $x_i^0 \neq y^0$, $i = 1, ..., m$ and $u_1, \ldots, u_m$ are the control parameters of pursuers and v is that of evader.

Definition 1. Measurable functions $u_i(t)$ and $v(t)$, $t \geq 0$, are called admissible controls of the pursuer x_i and evader y, respectively, if

$$\int_0^t |u_i(s)|^2 ds \leq \rho_i^2 e^{2kt}, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2 e^{2kt}, \tag{2}$$

where $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$, σ and k are given positive numbers.

Definition 2. A function $V : [0, \infty) \times R^{(2m+1)n} \to R^n$,

$$(t, y, x_1, ..., x_m, u_1, ..., u_m) \mapsto V(t, y, x_1, ..., x_m, u_1, ..., u_m),$$

is called a strategy of evader if the following initial value problem

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &\dot{y} = V(t, y, x_1, ..., x_m, u_1, ..., u_m), \quad y(0) = y^0, \end{aligned} \tag{3}$$

has a unique solution $(x_1(t), \dots, x_m(t), y(t))$, $t \geq 0$, for any admissible controls $u_i = u_i(t)$, $i = 1, ..., m$, of the pursuers and along this solution

$$\int_0^t |V(s, y(s), x_1(s), \dots x_m(s), u_1(s), \dots, u_m(s))|^2 ds \leq \sigma^2 e^{2kt}.$$

Definition 3. If there exists a strategy V of evader such that for any admissible controls of pursuers $x_i(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and $i = 1, \dots, m$, then we say that evasion is possible.

Problem. Construct a strategy V for the evader y and find a condition for parameters ρ_i, $i = 1, ..., m$, σ, which guarantee the evasion in game (1)-(3).

2. The main result

The following is the main result of the present work.

Let $y_0 = (0, 0)$ and m_0 be the number of pursuers in the upper half-plane. We construct a strategy for the evader. Let $u_i(t)$, $i = 1, ..., m$, be arbitrary controls of pursuers. Set

$$v(t) = V_0(t) = \left(0, \alpha + \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2\right)^{1/2}\right), \quad t \in [0, T] \setminus I_1, \tag{4}$$

$$v(t) = V_r(t) = (V_{r1}(t), U(t)), \ t \in [0, T] \cap I_1, \tag{5}$$

where $r = r(t)$ is a given integer-valued function, $V_k(t) = (V_{k1}(t), U(t))$, $\tau_k \leq t < \tau_k'$, $k = 1, \dots, m_0$, is defined as follows

$$V_{k1}(t) = \begin{cases} \alpha + |u_{k1}(t)|, & y_1(\tau_k) \geq x_{k1}(\tau_k) \\ -(\alpha + |u_{k1}(t)|), & y_1(\tau_k) < x_{k1}(\tau_k) \end{cases}, \quad U(t) = \alpha + \left(\sum_{i=1}^{m} u_{i2}^2(t)\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Note that $U(t)$ doesn't depend on k. Finally, let

$$v(t) = \left(0, \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2\right)^{1/2}\right), \quad t > T. \tag{7}$$

Lemma 1. If the evader uses strategy (4)-(7), then

(a) For all $k \in J_0 = \{1, 2, ..., m_0\}$, we have (i) $\tau_k \leq T_0$ and (ii) $\tau_k' \leq T$.

(b) If $y_2^0 \geq x_{i2}^0$ for some $i \in \{1, ..., m\}$, then $y_2(t) > x_{i2}(t)$ for all $t > 0$.

Lemma 2. Let the pursuer x_p apply an arbitrary admissible control $u_p(t)$ on $[\tau_p, \tau_p']$. Then

$$|z_p(t) - x_p(t)| > \frac{\alpha a_p^2}{6\sigma^2 e^{2kT}}, \quad \tau_p \leq t \leq \tau_p', \quad \text{and} \quad y_2(t) - x_{p2}(t) \geq a_p, \quad t \geq \tau_p'.$$

Lemma 3. The following estimate holds

$$|y(t) - z_p(t)| \leq 6\sigma e^{2kT} \sqrt{\frac{a_{p+1}}{\alpha}}, \quad \tau_p \leq t \leq \tau_p'.$$

Theorem. If

$$\rho_1^2 + \dots + \rho_m^2 \leq \sigma^2,$$

then evasion is possible in game (1)-(3).

Literature

1. Azamov A., Ibaydullaev T., and Ibragimov G. Differential game with slow pursuers on the edge graphs of a simplex. Int. Game Theory Review. 2021. Vol. 23, pp. 2250006.

2. Ibragimov G., Salleh Y., Alias I.A., Pansera B.A., and Ferrara M. Evasion from Several Pursuers in the Game with Coordinate-wise Integral Constraints. Dynamic Games and Applications. 2023. Vol. 13, pp. 819–842.

3. Ibragimov G.I, Tursunaliev T.G and Luckraz S. Evasion in a linear differential game with many pursuers. Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. 2024. Vol.29, Issue 12, pp. 4929–4945.

Coeffitcients For Optimal Quadrature Formula Exact To Trigonometric Functions

Khaitov T. O.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan;
tojiboy.xaitov.77@mail.ru

In this work, we study how to find the coefficients of a quadrature formula with derivative using the φ - function method. The φ - function method allows for construction of optimal quadrature formulas in approximate. Also, the functional error was analyzed using the quadrature formula constructed using the φ-function, and the results were supported by precise mathematical expressions. With arbitrary fixed nodes the optimality conditions for the quadrature formula are analyzed and the method for determining the components of that formula are considered. The explicite forms for the coefficients of the optimal quadrature formula are obtained. In particular, for the equally spaced nodes the Euler-Maclaurin type formula is obtained. The definite integral is one of the fundamental concepts of mathematical analysis and, in particular, it can be used to get the area or volume of a solid under the graph of a function. However, in many cases, finding an antiderivative function of a integrand is difficult or even impossible. Therefore, several approximate calculation methods for numerical integration have been developed. It is known from the course of mathematical analysis that if the antiderivative function of the function under the integral is known, the integral can be calculated using the Newton - Leibnitz formula. For cases where it is difficult to find the antiderivative of the functions under the integral, the problem of approximating the value of the definite integral arises. To solve this problem, various formulas have been found in mathematics, which are generally called quadrature and cubature formulas [1,2,3]. In this work, we construct an optimal quadrature formula in the space $K_2^{(2,0)}$ using the φ - function method.

Here, we consider the following type of quadrature formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_{1k} f'(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

where A_{0k}, A_{1k}, and x_k are the coefficients and nodes of the quadrature formula (1), respectively. Let the nodal points be partitioned on the interval $[a, b]$ as follows,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

where $R_n(f)$ is the error of quadrature formula (1).

Let us assume that the function f under the integral we are looking at is taken from the space $K_2^{(2,0)}$, where
$K_2^{(2,0)} := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f' - \text{absolute continuous and } f'' \in L_2(a, b)\}$. In this space, the inner product for arbitrary functions f and g is defined as

$$\langle f, g \rangle_{K_2^{(2,0)}} = \int_a^b (f''(x) + f(x))(g''(x) + g(x))\, dx.$$

The corresponding norm in this space is determined using this formula

$$\|f\|_{K_2^{(2,0)}} = \left(\int_a^b (f''(x) + f(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

We consider the construction of a quadrature formula of the form with the smallest error for functions in the space $K_2^{(2,0)}$ considered in a certain form in the space of quadrature formulas. For convenience, we introduce the following designations

$$A_0 = (A_{00}, A_{01}, \ldots, A_{0n}), \quad A_1 = (A_{10}, A_{11}, \ldots, A_{1n})$$

and

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Below we give the definitions of optimality, of the quadrature formulas.

Definition. The quadrature formula (1) is called optimal in the sense Sard in the space $K_2^{(2,0)}$ if the quantity

$$F_n\left(K_2^{(2,0)}, A_0, A_1\right) = \sup_{f \in K_2^{(2,0)}} |R_n(f)|$$

reaches its smallest value relative to A_0, A_1 for fixed X, where A_0, A_1 and X are defined in (3).

We construct optimal quadrature formula in the sense of Sard exact for trigonometric functions $sin(x)$ and $cos(x)$, and have the following result.

Theorem 1 For fixed nodes $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ there exists a unique optimal quadrature formula of the form

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong \sum_{k=0}^{n} A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_{1k} f'(x_k),$$

in the sense of Sard in the space $K_2^{(2,0)}$ with coefficients. The formula is exact for trigonometric functions $\sin(x)$ and $\cos(x)$.

References

1. Hayotov A. R., Babayev S. S., Abduakhadov A. A., Davronov J. R. An optimal quadrature formula exact to the exponential function by the phi function method Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 69(2024), №. 3, 651-663 DOI: 10.24193/subbmath.2024.3.11).http://dx.doi.org/10.24193/subbmath.

2. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formula for numerical integration of fractional integrals in a Hilbert space, Journal of Mathematical Sciences, -Springer, 2023, -Vol. 277, no. 3, pp. 403-419, https://doi.org/10.1007/s10958-023-06844-w.

3. Hayotov A.R., Jeon S., Lee, C.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space L(1) 2 , J. Comput. Appl. Math., 372(2020), 112713.

Explicit Transparent Boundary Conditions To The The Limits Of Interval For The Second Order Partial Differential Equations

Sabirov K.[1], **Kholboev B.**[2]

University of Tashkent for Applied Sciences 1- Gavkhar street, 100149 Tashkent, Uzbekistan

karimjonsabirov80@gmail.com

Tashkent Branch of Russian University of Economics named after G.V. Plekhanov

bakhodir.kholboev@gmail.com

We consider the problem finding explicit transparent boundary conditions for the the following second order partial differential equation with constant coefficients on R^2 to the limits of interval $[0; L]$ by the first coordinate

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0,\ (x, y) \in R^2. \tag{1}$$

We make the following inverse Fourier transformation

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} e^{ikx+i\omega y} \hat{u}(k,\omega) dk d\omega, \tag{2}$$

then we can get

$$A(ik)^2 + 2Biki\omega + C(i\omega)^2 + Dik + Ei\omega + F = 0. \tag{3}$$

Using $\sqrt{1+z} = 1+O(z)$ and $\sqrt{1+z} = 1+\frac{1}{2}z+O(z^2)$ when $B^2-AC > 0$ and $BD-AE \neq 0$ we have the following first and second order approximations of explicit transparent boundary conditions

$$\begin{aligned} 2A\partial_x u|_{x=0} &= -Du|_{x=0} + 2(-B + \sqrt{B^2 - AC})\partial_y u|_{x=0}, \\ 2A\partial_x u|_{x=L} &= -Du|_{x=L} + 2(-B - \sqrt{B^2 - AC})\partial_y u|_{x=L}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2A(B^2 - AC)\partial^2_{xy} u|_{x=0} &= [-D(B^2 - AC) + \sqrt{B^2 - AC}(BD - AE)]\partial_y u|_{x=0} + \\ &+2(-B + \sqrt{B^2 - AC})\partial^2_y u|_{x=0}, \\ 2A(B^2 - AC)\partial^2_{xy} u|_{x=L} &= [-D(B^2 - AC) - \sqrt{B^2 - AC}(BD - AE)]\partial_y u|_{x=L} + \\ &+2(-B - \sqrt{B^2 - AC})\partial^2_y u|_{x=L}, \end{aligned} \tag{5}$$

Literature

1. Treves F. Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. New York: Springer Science+Business Media, 1980.

2. Engquist B., Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves //Mathematics of Computation., 1977., Vol.31, №139. Page. 629–651.

Extremal Function For In The Space $\widetilde{S_2(P_2)}$

Azamov S.S.[1], **Kobilov Kh.M.**[1,2]

Tashkent State Transport University;
azamovs@mail.ru
Tashkent State Transport University, Tashkent International University;
khoji1997@mail.ru

This paper is devoted to the process of constructing an optimal quadrature formula in the Hilbert space of real-valued, periodic functions. Here, in order to obtain the upper bound for the absolute error of the considered quadrature formula, the norm of the error functional is calculated. In the calculation of the norm of the error functional the extremal function of the quadrature formula is used. In this paper, in a specific Hilbert space, we consider finding the extremal function of the error functional of quadrature formulas.

Let's look at the quadrature formula below

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(hk). \tag{1}$$

where C_k are the coefficients of the (1) quadrature formula $N \in \mathbb{N}$ and $h = \frac{1}{N}$

The error corresponding to the (1) quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(hk) = (\ell, \varphi) \tag{2}$$

there $(\ell, \varphi) = \int\limits_0^1 \ell(x)\varphi(x)dx$

The error functional corresponding to error (2) is as follows

$$\ell(x) = (\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - hk)) * \phi_0(x) \tag{3}$$

There $\varepsilon_{(0,1]}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1] \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$, $\phi_0(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-\beta)$, $\delta(x)$- Dirac's delta function.

Our goal is to evaluate the quadrature formula from above. For this, we use the Cauchy-Schwartz inequality.

$$|(\ell, \varphi)| \le \|\ell\|_{\widetilde{S_2(P_m)}} \cdot \|\varphi\|_{\widetilde{S_2(P_m)}^*} \tag{4}$$

It can be seen from the above inequality that it is enough to calculate the norm of the (3) error functional to get the above estimate of (2) errors. This leads to the following two issues.

Theorem. The extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ, expressed as

$$\psi_\ell(x) = d_0 - \sum_{k=1}^{N} G_3(x - hk) \tag{5}$$

where

$$G_3(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\beta x}}{(2\pi\beta)^6 - 2(2\pi\beta)^4 + (2\pi\beta)^2} \tag{6}$$

References

1. Shadimetov M.Kh. Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space. Uzbek Math. Zh., №. 2, 1998, 76-86.

2. S.S. Azamov, H.M.Qobilov Optimal quadrature formulas in the space of periodic functions journal of International Scientific Journal Of Computing Technologies And Mathematical Modeling.

Numerical Solution Of Korteweg-De Vries Equation With Moving Boundaries

Koshkarbayev N. M.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
koshkarbayev@math.kz

Abstract. Let

$$\widehat{\Omega} = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha(t) < y < \beta(t),\ 0 < t < T\}$$

represent the non-cylindrical domain with its lateral boundary indicated by

$$\widehat{E} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\},$$

where $Q_t = \{y \in \mathbb{R};\ \alpha(t) < y < \beta(t),\ 0 < t < T\}$ and Γ_t denotes the boundary of Q_t. Consider the following nonlinear problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) + v(y,t)\dfrac{\partial v}{\partial y}(y,t) + \dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}(y,t) = 0,\ (y,t) \in Q_t, \\ v(\alpha(t),t) = v(\beta(t),t) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y}(\beta(t),t) = 0, \qquad t \in [0,T), \\ v(y,0) = v_0(y), \qquad y \in Q_0, \end{cases} \tag{1}$$

where prime denotes the time derivative and $Q_0 = [\alpha(0), \beta(0)]$.

In this paper, numerical solutions are presented for a mathematical model related to the Korteweg-de Vries equation in a domain with moving boundaries. Numerous numerical experiments are presented to illustrate the effectiveness and accuracy of the theoretical results.

References

1. D.J. Korteweg, G.de Vries, On the change of form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. 36, (1895), 422–443.

2. G.G. Doronin, N.A. Larkin, KdV equation in domains with moving boundaries, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 503–517.

Linear Evasion Differential Game Of One Faster Evader With Bounded Maneuverability From Multiple Pursuers

Kurbanov A. A.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
kurbanovakmal92@gmail.com

Abstract. We study a differential game of one evader and m pursuers on $\mathbb{R}^n$, where the control sets are given by the unit ball for the pursuers and the ball of radius σ, where $\sigma > 1$, for the evader. Evasion is said to be possible if the state of the evader doesnвГЄt coincide with that of any pursuer for all t. We propose a new evasion strategy which guarantees evasion from any initial positions of the players. We use the strategy to show that the number of approach times is bounded above by $m(m+1)/2$.

We consider an evasion linear differential game of n pursuers $x_1, \dots, x_n$ and an evader y that move in space $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. We use the notation $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ for the team of pursuers and $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ for their control parameters, whose dynamics are described by the following equations

$$\dot{x}_i = -\lambda x_i + u_i,\ x_i(0) = x_{i0}, \quad |u_i| \leq 1,$$

$$\dot{y} = -\lambda y + v, \qquad y(0) = y_0, \qquad |v| \leq \sigma, \tag{1}$$

where $x_i, x_{i0}, y, y_0, u_i, v \in \mathbb{R}^d$, $v \in D$, $\lambda > 0$; $x(0) = x_{i0}$ and $y(0) = y_0$ are the initial positions, it is assumed that $x_{i0} \neq y_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, and σ, $\sigma > 1$ is a given number, where u_i is the control parameter of pursuer x_i, and v is that of evader y. The area D is defined as follows:

$$D = \{(v_1, v_2)|\ v_1^2 + v_2^2 \leq \sigma^2,\ |v_1| \leq v_2 \tan\varphi,\ v_2 \geq 0\}$$

is the control set of the evader, and $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ is a given angle. Note that D is a sector of radius σ and central angle 2φ. Also, D does not contain the control sets of the pursuers, the unit circle centered at the origin.

Definition 1. Borel measurable functions $u_i(t) = (u_{i1}(t), u_{i2}(t))$, $|u_i(t)| \leq 1$, $t \geq 0$, and $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $v(t) \in D$, $t \geq 0$, are called admissible controls of the pursuer x_i and evader y, respectively.

Let $H(0, \rho)$ be a circle of radius ρ and centered at the origin of $\mathbb{R}^2$.

Definition 2. A function

$$V(t, \psi_1, \psi_2, y, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_n), \quad V : [0, \infty)^3 \times \mathbb{R}^{2(n+1)} \times H(0, \rho) \times \cdots \times H(0, \rho) \to D,$$

is called strategy of the evader, if, for any admissible controls $u_1 = u_1(t), ..., u_n = u_n(t)$ of pursuers and at $\psi_1 = \psi_1(t),\ \psi_2 = \psi_2(t)$, the following initial value problem

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u_1,\ x_1(0) = x_{10},\\
&\vdots\\
&\dot{x}_n = u_n,\ x_n(0) = x_{n0},\\
&\dot{y} = V(t, \psi_1, \psi_2, y, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_n),\ y(0) = y_0,
\end{aligned}$$

has a unique solution $(x_1(t), ..., x_n(t), y(t))$, $t \geq 0$, with absolutely continuous components $x_1(t), ..., x_n(t)$, and $y(t)$.

Definition 3. We say that evasion is possible in game (1) if there exists a strategy V of the evader y such that for any admissible controls of the pursuers $x_i(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$ and $i = 1, ..., n$.

During the game, the evader applies a strategy, and the pursuers use arbitrary admissible controls. However, the evader has an advantage in speed since $\sigma > 1$, and we want to show that in game (1) evasion is possible.

Problem. Find a condition to the angle φ to guarantee that evasion is possible in game (1).

Theorem 1. For any initial positions of players, evasion is possible in the game (1).

References

1. Chernous'ko F.L., A problem of many pursuers. PMM 1976, Vol. 40, №.1,
2. Ibragimov G.I. Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers. Dynamic games and applications, 2024, Vol.14, Issue 3, pp. 665-685.
3. Isaacs R. Differential games. John Wiley & Sons 1965, New York, NY, USA

Differential Game Of Multiple Pursuers And One Evader With Integral Constraints Of Special Form

Ibragimov G.[1], Inomiddinov S.[2], Kurbonbekova O.[3]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
Ibragimov.math@gmail.com
[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
sn.inomiddinov@gmail.com
[3]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
odinaofficial@gmail.com

We study pursuit and evasion differential games involving multiple pursuers and single evader with integral constraints on the control functions of the players. By definition pursuit is completed in the game if the state of a pursuer coincides with that of the evader, and evasion is possible in the game if the state of the evader never coincides with that of any pursuer. We obtain sufficient conditions of completion of pursuit and evasion. We construct pursuit strategies and an evasion strategy in pursuit and evasion games, respectively.

Let the dynamics of pursuers z_i and y be described by the following equations:

$$\begin{array}{ll} \dot{z}_i = u_i, & z_i(0) = z_{i0}, \quad i = 1, ..., m, \\ \dot{y} = v, & y(0) = y_0, \end{array} \tag{1}$$

where $z_i, y, z_{i0}, y_0, u_i, v \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $z_{i0} \neq y_0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Definition 1. Borel measurable functions $u_i(t)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $t \geq 0$, and $v(t)$, $t \geq 0$, that satisfy the following integral constraints

$$\int_0^t |u_i(s)|^2 ds \leq \alpha_i^2 t, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \beta^2 t, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

are called admissible controls of the pursuer z_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, and evader y, respectively, where α_i, β are given positive numbers.

Definition 2. We call the functions $(t, z_i, y, v) \to U_i(t, z_i, y, v)$ strategies of pursuers z_i if, for $u_i = U_i(t, z_i, y, v)$ and for any admissible control $v = v(t)$ of the evader, the initial value problem (1) has a unique solution $(z_i(t), y(t))$, $t \geq 0$, and along this solution the following inequality holds:

$$\int_0^t |U_i(s, z_i(s), y(s), v(s))|^2 ds \leq \alpha_i^2 t, \quad t \geq 0.$$

Definition 3. If, for some number $T > 0$ and any initial states of players z_{10}, z_{20},..., z_{m0}, y_0, there exist strategies of pursuers such that, for any control of evader, we have $z_i(\tau) = y(\tau)$ at some $0 < \tau \leq T$ and $i \in \{1, 2, ..., m\}$, then we say that pursuit can be completed in the game (1)-(3) for the time T. Also the time T is called a guaranteed pursuit time.

Definition 4. We call the function $(t, z_1, z_2, ..., z_m, y) \to V(t, z_1, z_2, ..., z_m, y)$ strategy of evader y if, for $v = V(t, z_1, z_2, ..., z_m, y)$ and for any admissible controls $u_i = u_i(t)$ of the pursuers, the initial value problem (1) has a unique solution $(z_1(t), z_2(t), ..., z_m(t), y(t))$, $t \geq 0$, and along this solution the following inequality holds:

$$\int_0^t |V(s, z_1(s), z_2(s), ..., z_m(s), y(s))|^2 ds \leq \beta^2 t, \quad t \geq 0.$$

Definition 5. If there exists a strategy of evader such that, for any controls of pursuers, $z_i(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$ and $i = 1, 2, ..., m$, then we say that evasion is possible in differential game (1)-(3).

Proposition 1. The point y_0 belongs to the set $intconv\{z_{10}, z_{20}, ..z_{m0}\}$ if and only if, for any vector p, $|p| = 1$, there is a number $i \in \{1, 2, ..., m\}$ such that $(p, e_i) < 0$.

Proposition 2. The point y_0 does not belong to the set $intconv\{z_{10}, z_{20}, ..z_{m0}\}$ if and only if there is a vector p_0, $|p_0| = 1$, such that $(p_0, e_i) \geq 0$, for all $i = 1, 2, ..., m$.

Theorem 1. If one of the inequalities $\alpha_i \geq \beta$, $i = 1, 2, ..., m$, is strict, then pursuit can be completed in game (1)-(3).

Theorem 2. Let $\alpha_i = \beta$, $i = 1, 2, ..., m$, and ε, $\varepsilon \leq \beta$, be any fixed positive number. If $y_0 \in intconv\{z_{10}, z_{20}, ..., z_{m0}\}$ and $|v| \geq \varepsilon$, then pursuit can be completed in differential game (1)-(3).

Theorem 3. If $\alpha_i \leq \beta$ for all $i = 1, 2, ..., m$, and $y_0 \notin intconv\{z_{10}, z_{20}, ..., z_{m0}\}$, then evasion is possible in differential game (1)-(3).

References

1. Azamov A.A. (1986). On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulg. Math. Publ. Sofia 12, 38–43.

2. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. (2019). Simultaneous Multiple Capture of Rigidly Coordinated Evaders. Dynamic Games and Applications 9: 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8.

3. Ibragimov G.I. (2023). Evasion Differential Game of One Evader and Many Slow Pursuers. Dynamic games and applications. https://doi.org/10.1007/s13235-023-00501-2.

4. Ibragimov G.I., Salleh Y. (2012). Simple motion evasion differential game of many pursuers and one evader with integral constraints on control functions of players. Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 748096, doi:10.1155/2012/748096.

5. Zhou P., Chen B.M. (2023). Distributed Optimal Solutions for Multiagent Pursuit-Evasion Games for Capture and Formation Control. IEEE Trans. Ind. Electron. 71, 5224–5234.

Optimal Quadrature Formula With Derivative

Nuraliev F. A.[1,2], **Kuziev Sh. S.**[3], **Djurayeva K. A.**[4]

[1]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[3] Kokand University, Kokand, Uzbekistan
[4] University of exact and social sciences, Tashkent, Uzbekistan
shaxobiddin.qoziyev.89@gmail.com

Currently, there are various approaches to constructing quadrature formulas. One of them is the classical approach to constructing quadrature formulas, which requires the accuracy of the polynomial formula for the highest possible order. Another of them is the functional approach to constructing quadrature formulas. In this case, the quadrature formula is designed to minimize the error functional norm in a given Banach space [1,2,3,4].

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} K_0[\beta]f(h\beta) + \frac{h^2}{12}(f'(0) - f'(1)) + \sum_{\beta=0}^{N} K_1[\beta]f''(h\beta), \tag{1}$$

where

$$K_0[\beta] = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \beta = 0, N, \\ h, & \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

and $K_1[\beta]$ are the unknown coefficients of the quadrature formula (1), $f \in L_2^{(m)}(0,1)$, where $L_2^{(m)}(0,1)$ is the space of functions which are square integrable with m-th generalized derivative.

The difference between the exact value and the approximated value obtained from the quadrature formula is referred to as the error of the formula:

$$\int_0^1 f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} K_0[\beta]f(h\beta) - \frac{h^2}{12}(f'(0) - f'(1)) - \sum_{\beta=0}^{N} K_1[\beta]f''(h\beta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ell_N(x)f(x)dx = (\ell_N, f). \tag{2}$$

From difference (2) it follows that quadrature formula (1) corresponds to the following error functional:

$$\ell_N(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} K_0[\beta]\delta(x-h\beta) + \frac{h^2}{12}(\delta'(x) - \delta'(x-1)) - \sum_{\beta=0}^{N} K_1[\beta]\delta''(x-h\beta), \tag{3}$$

where $\delta(x)$ is the Dirac's delta-function, and $\chi_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$.

The norm in $L_2^{(m)}(0,1)$ space is defined by the following form:

$$\|f\|^2_{L_2^{(m)}(0,1)} = \int_0^1 (f^{(m)}(x))^2 dx.$$

In addition, the error functional (3) is required to satisfy the following conditions:

$$(\ell_N(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Error (2) based on the Cauchy-Schwartz inequality is estimated as follows:

$$|(\ell_N, f)| \le \|f\|_{L_2^{(m)}(0,1)} \cdot \|\ell_N\|_{L_2^{(m)*}(0,1)}. \tag{5}$$

Thus, we have been receiving the following problems:

1. Find the norm of the error functional (3) of the quadrature formula (1).

2. Finding the coefficients $K_1[\beta], \quad \beta = \overline{0, N}$, which give the smallest value to the norm $\|\ell_N\|_{L_2^{(m)*}}$ of the error functional (3), that is, calculating the value

$$\|\overset{\circ}{\ell}_N\|_{L_2^{(m)*}} = \inf_{K_1[\beta]} \|\ell_N\|_{L_2^{(m)*}}.$$

References

1. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. M: Nauka, 1974.

2. Shadimetov Kh, Hayotov A., Nuraliev F. Construction of Optimal Interpolation Formulas in the Sobolev Space, Journal of Mathematical Sciences (United States), 2022, 264(6), pp. 782–793.

3. Shadimetov Kh, Nuraliev F., Kuziev Sh. Coefficients and errors of the optimal quadrature formula of the Hermite type, AIP Conference Proceedings 3147 (1), 2024, pp. 1–12.

4. Shadimetov Kh, Nuraliev F., Kuziev Sh. Optimal Quadrature Formula of Hermite Type in the Space of Differentiable Functions, International Journal of Analysis and Applications, 2024, pp. 1–19.

Functional Physiology By Energy: "Grounding"Axiomatic Functional Biodynamics in Biology

Mau Jochen

Medical Faculty and University Hospital, Heinrich Heine University Düsseldorf, Düsseldorf, Germany;
e - mail j.mau@hhu.de, Moorenstr. 5, 40225 Düsseldorf, Germany

Functional physiology represents the integrative study of how biological structures and systems operate dynamically to maintain homeostasis, adapt to environmental challenges (allostasis), and enable complex organismal behaviors.

This field synthesizes molecular, cellular, and systemic perspectives to unravel the mechanisms underlying physiological processes, emphasizing the interplay between form and function. By examining how genetic, biochemical, and biomechanical factors coalesce to produce observable physiological outcomes, functional physiology provides critical insights into health, disease, and evolutionary adaptation.

Based on a recent axiomatic functional biodynamics, that distinguishes three canonical functions - vital functions for maintaining energy, physical task-solving tools, and cognitive task-solving in the sense of an operational mind -, the connection with biological evidence is explored.

This report provides insights into the cellular composition and energy demands of the body's vital functions. To gather the biological information, an AI tool (Perplexity.AI Pro) was engaged.

Specifically, for the Energy Subsystem (Vital Functions Subsystem) of the human body with its six main components:

- Respiratory System
- Circulatory System
- Alimentary/Ingestive System
- Egestive System
- Lymphatic System
- Immune System

the approximate number of cells in each subsystem and their relative energy demands are considered. By strict functional hierarchy within the subsystem of vital functions, energy demands in all cellular aggregates, i.e. cellular tissue, organs, and higher functional ensembles, are implied according to functional tasks requirements.

While the present report is a pilot exploration in the sense of a proof-of-concept, feasibility for wider and more comprehensive application mandates formation of work groups of many scientists from mathematical and biological sciences.

Literature

1. Mau, Jochen. Axiomatic bipolar dynamics and their control: A holistic mathematical theory of a functional physiology. In: Biokybernetika. Mathematics for Theory and Control

in the Human and in Society. Edited by Jochen Mau, Sergey Mukhin, Guanyu Wang and Shuhua Xu, De Gruyter Series in Mathematics and Life Sciences vol. 9, Boston, Berlin: De Gruyter, 2025, pp. 45-73.

Determination Of Coefficient For The Optimal Interpolation Formula With Derivative

[1,4]**Nafasov A. Y.,** [1,3]**Boltaev N. D.,** [1,2]**Hayotov A. R.**

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent Uzbekistan,
[2]Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan,
[3]Angren University, Tashkent region, Uzbekistan,
[4]Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: nafasov.azam@list.ru, hayotov@mail.ru

Interpolation is a fundamental tool in numerical analysis for approximating unknown function values from known data. Traditional interpolation methods that use only function values may be insufficient when dealing with functions exhibiting steep gradients or complex behaviour [1]. To overcome these limitations, we consider interpolation formulas that also include derivative information. In our work, the interpolation formula is expressed as

$$\varphi(x) \approx P(\varphi, x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\, \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1}\, \varphi'(h\beta).$$

Here, the objective is for known $C_{\beta,0}$ to find the coefficients $C_{\beta,1}$ that give the minimum error for the formula in the Hilbert space [2]

$$W_2^{(2,1)}(0,1) = \{\varphi | \varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi' \text{ is absolute cont. }, \varphi'' \in L_2(0,1)\}.$$

The interpolation error is defined as the difference between the true function and its approximation:

$$(R, \varphi) = \varphi(x) - P(\varphi, x),$$

where R is the error functional of the formula.

An explicit expression for the squared norm $\|R\|^2_{W_2^{(2,1)}}$ of the error functional R is derived in the original work [3], incorporating both the function values and the derivative data. The challenge then is to find the coefficients $C_{\beta,1}$ so they give the minimum to the norm of the functional R. Then that coefficients are called optimal and the corresponding interpolation formula is said to be an optimal interpolation formula.

To obtain the optimal coefficients, we reformulate the problem as one of constrained optimization. In addition to minimizing $\|R\|^2_{W_2^{(2,1)}}$, we require that the interpolation formula exactly reproduces certain specific functions (the constant function and e^{-x}). These exactness conditions are written as

$$(R, 1) = 0 \quad \text{and} \quad (R, e^{-x}) = 0.$$

Incorporating these constraints, we define the Lagrangian functional [4]

$$\mathcal{L} = \|R\|^2_{W_2^{(2,1)}} + \lambda_1(R,1) + \lambda_2(R, e^{-x}),$$

where λ_1 and λ_2 are the Lagrange multipliers that enforce reproduction conditions.

By differentiating $\mathcal{L}$ with respect to unknown coefficients $C_{\beta,1}$ and setting the derivatives to zero, we derive a system of linear equations.

The derived system of equations, although formulated in an abstract setting, provides a clear path for numerical implementation. Solving this system yields the optimal coefficients, which are crucial for achieving a minimal error norm.

So, in this work, we have presented a variational approach to determine the optimal coefficients for derivative-enhanced interpolation formulas in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}$. By minimizing the error norm and simultaneously enforcing the exactness conditions through Lagrange multipliers, we have constructed the optimal interpolation formula.

References

1. Lunardi A. Interpolation theory. Springer, 2018.

2. Shadimetov K. M., Nuraliev F. A. Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space // Journal of the Siberian Federal University.2018. Series "Mathematics and Physics."11(6), 764-775.

3. Hayotov A.R., Nafasov A.Y., Berdimuradova U.A. Optimal Interpolation Formulas with Derivative in the Space $W_2^{(2,1)}$. // Problems of computational and applied mathematics, - Tashkent, 2024. 4/2(60), 90–98.

4. Dhingra N. K., Khong S. Z., Jovanovi M.R. The proximal augmented Lagrangian method for nonsmooth composite optimization//IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. 64(7), 2861-2868.

Optimal Quadrature Formulas In The $L_2^{(m)}(0,1)$ Space

Nuraliev F. A.[1,2], Kuziev Sh. S.[3], Edilbekova R.[2]

[1]Tashkent International University, Tashkent, Uzbekistan;
[2]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;
[3] Kokand University, Kokand, Uzbekistan
shaxobiddin.qoziyev.89@gmail.com

As is generally known, numerical integration formulae, or quadrature formulae, are methods for the approximate evaluation of definite integrals. They are needed for the computation of those integrals for which either the antiderivative of the integrand cannot be expressed in terms of elementary functions or for which the integrand is available only at discrete points, for example from experimental data. In addition and even more important, quadrature formulae provide a basic and important tool for the numerical solution of differential and integral equations (see [1])

Consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12}\left(\varphi'(0) - \varphi'(1)\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi'''(h\beta) \qquad (1)$$

with the error functional

$$l(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta\left(x - h\beta\right) + \frac{h^2}{12}\left(\delta''(x) - \delta''(x-1)\right) + \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta'''\left(x - h\beta\right) \qquad (2)$$

in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ for $m \geq 4$. For the error functional (2) to be defined on the space $L_2^{(m)}(0,1)$ it is necessary to impose the following conditions (see [2,3,4])

$$(\ell(x), x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, ..., m-1. \qquad (3)$$

As was noted above by the Cauchy-Schwarz inequality, the error of the formula (1) is estimated by the norm $\| \ell_N | L_2^{(m)*}(0,1) \|$ of the error functional (2). Furthermore the norm of the error functional (2) depends on the coefficients $C_1[\beta]$. We minimize the norm of the error functional (2) by the coefficients $C_1[\beta]$, i.e., we find

$$\left\| \ell_N | L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C_1[\beta]} \left\| \ell_N | L_2^{(m)*} \right\| \qquad (4)$$

Teorem. The norm of the error functional (2) of the quadrature formula of the form (1) in the space $L_2^{(m)*}(0,1)$ are following

$$\|l\|^2 = (-1)^m \left\{ -\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\beta]C_1[\gamma]\frac{|h\gamma - h\beta|^{2m-7}}{2(2m-7)!} + 2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma]\frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-4}}{2(2m-4)!} \right.$$

$$+2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma]\frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-4}}{2(2m-4)!} + 2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\int_0^1 \frac{|x - h\beta|^{2m-4}}{2(2m-4)!}dx$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\left(\frac{(h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!} - \frac{(1-h\beta)^{2m-5}}{2(2m-5)!}\right)$$

$$+\frac{h^2}{6}\int_0^1 \left(\frac{x^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-x)^{2m-2}}{2(2m-2)!}\right)dx + \int_0^1\int_0^1 \frac{|x-y|^{2m-1}}{2(2m-1)!}dydx$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\left(\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!} + \frac{(1-h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}\right) +$$

$$\left. +\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\gamma]C_0[\beta]\frac{|h\gamma - h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\int_0^1 \frac{|x - h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!}dx \right\}.$$

References

1. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York – London (1967).

2. Shadimetov Kh, Hayotov A., Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ space, J. Comput. Appl. Math. 235, (2011), 1114 – 1128.

3. Shadimetov Kh, Nuraliev F., Kuziev Sh. Coefficients and errors of the optimal quadrature formula of the Hermite type, AIP Conference Proceedings 3147 (1), 2024, pp. 1–12.

4. Shadimetov Kh, Nuraliev F., Kuziev Sh. Optimal Quadrature Formula of Hermite Type in the Space of Differentiable Functions, International Journal of Analysis and Applications, 2024, pp. 1–19.

Free Vibration Of Layered Cylindrical Shells Filled With Fluid Using Exponential And Sinusoidal Thickness Variations

Omonova D.F.[1], **Viswanathan K.K.**[1,2]

[1,2] Professor, Department of Mathematical Modeling , Faculty of Mathematics, Samarkand State University, 15 , University Boulevard, Samarkand, 140104 , Uzbekistan. visu20@yahoo.com

[1] Student,Department of Mathematical Modeling , Faculty of Mathematics, Samarkand State University, 15 , University Boulevard, Samarkand, 140104 , Uzbekistan. dilnozaomonova0211@gmail.com

Vibrational behavior of structural elements is broadly analyzed by many researchers. Free vibration of cylindrical shells which filled with fluid is studied in this paper including the thickness variations along axial directions under clamped-clamped (C-C) boundary conditions on both the ends. The equilibrium equation of cylindrical shell with fluid using Love's [1] approximation theory is expressed as

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{N_\theta}{r} = \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{p}{\rho h}\right) \end{cases} \tag{1}$$

The displacement field for the layered cylindrical shell maybe defined as

$$\begin{gathered} u\left(r,\theta,z,t\right) = \ u_0\left(r,\theta,t\right) + z\psi_x(r,\theta,t) \\ labeleq2v\left(r,\theta,z,t\right) = \ v_0\left(r,\theta,t\right) + z\psi_\theta(r,\theta,t) \\ w\left(r,\theta,z,t\right) = \ w_0\left(r,\theta,t\right) \end{gathered} \tag{2}$$

Here u_0,v_0 and w_0 are the displacements of corresponding point in the reference surface in the r,θ and z-directions and are the rotation of the normal to the reference surface. Substituting eqn. (2) in the equilibrium eqn. (1) using stress-strain relations and strain-displacement relations resulting into the differential equations. Thickness variations of cylindrical shell is considered in terms of exponential and sinusoidal functions along axial direction [2]. The equation of motion of the fluid can be written in the cylindrical coordinate system (x,θ,r)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{c^2 \partial t^2} \tag{3}$$

where t is the time, p is the pressure, and c is the sound speed of the fluid. Combining the eqn. (3) in (1), which comes as a Coupled differential equation in terms of displacement

functions u, v and w. These functions are approximated using Bickley type splines [4] and applying the collocation procedure to bring a system of eigenvalue problem by including the S-S boundary conditions. This system is solved using numerical technique to find the eigen parameter and the corresponding eigen vectors which are the spline coefficients.

The results are analyzed for eigen parameter with respect to the length ratio, thickness ratio, thickness variation parameter, number of layers and different material properties.

Keywords: Free vibration; Bickley-type; Splines, cylindrical shells, variable thickness

References

1. A.E.H. Love, The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell, Phil.Trans.R.Soc.London Series, 1988, Vol. A 179 , pp.491-546

2. A.K.Nor Hafizah, J.H.Lee, Z.A.Aziz and K.K.Viswanathan , Vibration of antisymmetric angle-ply laminated plate of higher-order theory with variable thickness, Mathematical problems in Engineering, 2018, Vol.2018, Article id:73236228,14 pages.

3. X. Zhang, G. Liv, and K. Lam, Coupled vibration analysis of Fluid filled cylindrical shells using the wave propagation approach , Applied Acoustics , 2001, Vol. 62, pp.229-243.

4. M.D.Nurulizyan , K.K.Viswanathan , Z.A.Aziz and K.Prabakan , Free Vibration Of Layer cylindrical shells filler with fluid , Applied Mathematics and Mechanics, 2016, Vol . 37(6) , pp.803-820.

Linear Response For Random Dyanmical Systems

Ruziboev M.,[1] Tilavov A.[2]

Central Asian University, Tashkent, Uzbekistan[1];
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbek Academy of Sciences[1,2]

m.ruziboyev@centralasian.uz, asliddintm@mail.ru

In this talk, we describe spectral methods that are used to linear response for random dynamical systems. The random system is formed by compositions of maps, chosen independently according to a distribution P. We are interested in the following question: how does an absolutely continuous stationary measure (acsm) of a random system change when P changes smoothly to P_ε? For a wide class of one dimensional random maps, we prove the differentiability of acsm with respect to ε; moreover, we obtain a linear response formula. Our results cover random maps whose transfer operator does not necessarily admit a spectral gap. We apply our results to iid compositions for various distributions P_ε, of uniformly expanding circle maps, Gauss-Rényi maps (random continued fractions) and Pomeau-Manneville maps. Our results yield an exact formula for the invariant density of random continued fractions, while for Pomeau-Manneville maps, our results show that the linear response under certain random perturbations is half of their linear response under deterministic perturbations from [2]. This is a result of joint work [1]

References

1. Bahsoun W., Ruziboev M., Saussol B., Linear response for random dynamical systems Advances in Mathematics 364, 107011.

2. Bahsoun W., Saussol B., Linear response in the intermittent family: Differentiation in a weighted C^0-norm. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 36(12), pp.6657-6668.

On the Time-Optimal Control Problem for the SIR Model with Financial Resources Management

Ruzimuradova D. Kh.[1], Bekimov M. A.[2],
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
drozimuradova@gmail.com
Tashkent State University of Economics, Tashkent, Uzbekistan;
twms2020@gmail.com

We consider the problem of controlling the daily distribution of financial resources between prevention and treatment with the goal of completely overcoming (non-lethal) epidemics. The aim of the control strategy is to achieve this goal in the shortest possible time. This formulation is known as the time-optimal problem. It is well known that the time-optimal control problem is one of the most complex problems in optimal control theory. The primary tool for solving the time-optimal control problem is PontryaginвЃ Єs maximum principle. Therefore, we study the simplified SIR model [1], [2], which is described by a nonlinear system of differential equations. Applying PontryaginвЃ Єs maximum principle leads to a boundary value problem for a nonlinear fourth-order system that cannot be explicitly integrated. On the other hand, the first two equations of the SIR model

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\alpha SI,\\ \dot{I} &= \alpha SI - \beta I,\\ \dot{R} &= \beta I,\end{aligned}$$

form an independent system for the variables S and I, while the third variable is related to them by the integral equation $S + I + R = N$. This allows us to reduce the problem to a two-dimensional system, which facilitates the synthesis of optimal controls.

In this case, the control parameter is defined as the allocation of financial resources between prevention, which aims to slow the spread of the epidemic, and treatment, which focuses on isolating and accelerating the recovery of infected individuals. If these fractions are denoted u and v, respectively, then the dynamics of the controlled SIR model are described by the system:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\left(\alpha - pu\right) SI,\\ \dot{I} &= \left(\alpha - pu\right) SI - \beta I - qv,\\ \dot{R} &= \beta I + qv,\end{aligned}$$

where $u \geq 0, v \geq 0$, and $u + v = 1$. Here, p is the effectiveness coefficient of preventive measures, $p < \alpha$ and q is the effectiveness coefficient of treatment measures (such as

vaccination). The aim of the control is to achieve equality $I(T) = 0$ in the shortest possible time T. In our case, the class of admissible control functions $u(t), v(t)$ can be considered as piecewise continuous functions. Applying Pontryagin's maximum principle shows that the optimal control satisfies the *bang-bang* property: $u(t) = 1$ on some interval $[0, \tau]$ and $u_{\text{opt}} = 0$ for $[\tau, T]$. This property enables the synthesis of the optimal control.

References

1. Kermack W. O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Contain. Pap. Math. Phys. Charact. 115(772), 700–721 (1927).

2. Elisa Paparelli, Roberto Giamb, and Helmut Maurer. Optimal control of an epidemiological Covid-19 model with state constraint. Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 2024.

The Pursuit Problem for Inertial Objects in a Gravitational Field

Samatov B. T.[1], **Azimov D. M.**[2]

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan;
samatov57@gmail.com
University of Hawaii at Manoa, Honolulu, USA;
azimov@hawaii.edu

Let two inertial objects **P** (Pursuer) and **E** (Escaper) be specified in the space $\mathbb{R}^n$, which move in a uniform gravitational field, and let their movements be described by the equations

$$\mathbf{P}: \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{c_P m_P(t)}{M(t)} \mathbf{e}_P(t) + \mathbf{g}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{01}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_{02}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \quad \ddot{\mathbf{y}} = \frac{c_E m_E(t)}{N(t)} \mathbf{e}_E(t) + \mathbf{g}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_{01}, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_{02}, \tag{2}$$

where $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ are the current states of objects in the space $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{x}_{01}, \mathbf{y}_{01} \in \mathbb{R}^n$ are the initial states of objects; $\mathbf{x}_{02}, \mathbf{y}_{02} \in \mathbb{R}^n$ are the initial accelerations of objects; $\mathbf{e}_P(t), \mathbf{e}_E(t) \in \mathbb{R}^n$ are the unit vectors of objects engine thrusts; $\mathbf{g} = \mathbf{g_0}$ is the constant gravitational acceleration vector.

Lawden's physical constraints (see [1]): $|m_P(t)| \leq \alpha$, $M(t) = M_0 - \int_0^t m_P(s)ds$, $|m_E(t)| \leq \beta, t \geq 0$, $N(t) = N_0 - \int_0^t m_E(s)ds$, where $m_P(t), m_E(t)$ are quantities indicating the power of the objects' engines; $M(t), N(t)$ are the current masses of objects; M_0, N_0 are the initial masses of objects, and α, β are non-negative parametric numbers indicating the maximum power values of the objects' engines. Constant parameters c_P, c_E determine the fuel quality of each object.

In works [1]-[2], the movement of a controlled aircraft in three-dimensional space is described by an equation of the form (1) (or (2)). This work mainly considers the Pursuit

Problem: In the pursuit problem, conditions are determined under which from some points in space it is possible to realize the equality $x(t) = y(t)$ at some time $t > 0$, under an arbitrary action of the evader.

Scheme for solving the Pursuit Problem. To simplify the solution of the pursuit problem, similarly to work [1], we reduce equations (1) and (2) to the form

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_{01}, \ \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_{02}, \tag{3}$$

where $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z}_{01} = \mathbf{x}_{01} - \mathbf{y}_{01}, \mathbf{z}_{02} = \mathbf{x}_{02} - \mathbf{y}_{02}$; $\mathbf{u}(t) = \frac{c_P m_P(t)}{M(t)} \mathbf{e}_P(t)$ is the control of the pursuer $\mathbf{P}$, $\mathbf{v}(t) = \frac{c_E m_E(t)}{N(t)} \mathbf{e}_E(t)$ is the control of the evader $\mathbf{E}$, and we obtain Lawden-type constraints in the following forms:

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \gamma(t), \text{ for almost all } t < p, \tag{4}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq \delta(t), \text{ for almost all } t < q, \tag{5}$$

where $\gamma(t) = \frac{c_P}{p-t}$, $\delta(t) = \frac{c_E}{q-t}$ and $p = \frac{M_0}{\alpha}$, $q = \frac{N_0}{\beta}$. Note that the norms of the control vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ we will consider the usual Euclidean norm in the space $\mathbb{R}^n$. A measurable function $\mathbf{u}(\cdot)$ satisfying condition (4) will be called an admissible Pursuer's control, and the set of all such controls will be denoted by $\mathcal{U}$. A measurable function $\mathbf{v}(\cdot)$ satisfying condition (5) will be called admissible Evader's control, and the set of all such controls will be denoted by $\mathcal{V}$.

Using the new notation introduced above, we consider the pursuit problem, where the pursuer seeks to realize the equality $\mathbf{z}(t) = 0$ from given initial states $\mathbf{z}_{01}$ and $\mathbf{z}_{02}$ in the shortest time t.

Case 1. *The vectors* $\mathbf{z}_{01}$ *and* $\mathbf{z}_{02}$ *are collinear, that is, there exists a finite number* k *such that* $\mathbf{z}_{02} = k\mathbf{z}_{01}$.

Case 2. *The vectors* $\mathbf{z}_{01}$ *and* $\mathbf{z}_{02}$ *are non-collinear, that is, are linearly independent.*

Definition 1. *Let the inequality* $\gamma(t) \geq \delta(t)$ *be satisfied in the time interval* $[0, t^*]$. *Then in the game (3)-(5) in case 1, the function*

$$\mathbf{U}(\mathbf{v}(t), t) = \mathbf{v}(t) - \pi(\mathbf{v}(t), t)\mathbf{e}_{01}, \quad \mathbf{e}_{01} = \mathbf{z}_{01}/\|\mathbf{z}_{01}\|,$$

is called the Π*-strategy of the Pursuer, where*

$$\pi(\mathbf{v}(t), t) = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{e}_{01} \rangle + \sqrt{\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{e}_{01} \rangle^2 + \gamma^2(t) - \|\mathbf{v}(t)\|^2},$$

and $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{e}_{01} \rangle$ *denotes the inner product of vectors* $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{e}_{01}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *and* $\|\mathbf{z}_{01}\|$ *is the Euclidean norm of the vector* $\mathbf{z}_{01}$ *in the space* $\mathbb{R}^n$.

Definition 2. *In the game (3)-(5) in case 1, the* Π*-strategy is called winning for the Pursuer from initial states* $\mathbf{z}_{01}, \mathbf{z}_{02} \in \mathbb{R}^n$ *in the time interval* $[0, T_0]$ *if for any* $\mathbf{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$:

(1) there exists such a time $t^* \in [0, T_0]$ *such that* $\mathbf{z}(t^*) = 0$;

(2) $\mathbf{U}(\cdot) \in \mathcal{U}$ *in the time interval* $[0, t^*]$.

In this case, the number T_0 is usually called *a guaranteed pursuit or capture time.*

Theorem. *Assume that the equation*

$$(c_P - c_E)t - c_P(p-t)\ln\frac{p}{p-t} + c_E(q-t)\ln\frac{q}{q-t} = \|\mathbf{z}_{01}\|(1+kt)$$

has a first positive root $T_0 = T(\mathbf{z}_0) < p$. *Then in the game (3)-(5) in case 1 the* Π*-strategy is winning for initial states* $\mathbf{z}_{01}, \mathbf{z}_{02} \in \mathbb{R}^n$ *on the time interval* $[0, T_0]$.

To solve the Pursuit Problem (3)-(5) in case 2, one can use the solution method proposed in work [3].

Literature

1. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Spase Navigation. London: Butterworths, 1963.

2. Azimov D.M. Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories. Cambridge(USA): Butterworth-Heinemann, 2018.

3. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Applications of the Π-Strategy When Players Move with Acceleration, Proceedings of the IUTAM Symposium on Optimal Guidance and Control for Autonomous Systems, 2023, Vol.40, No. 10, P. 167–181.

Non-Stationary Pursuit Game With Langenhop-Type Constraints On Controls

Samatov B. T.[1], **Uralova S. I.**[2]

[1]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
samatov57@inbox.ru
[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
saboxat.17@inbox.ru

Abstract. We examine a non-stationary pursuit problem involving players whose control functions are constrained by the Langenhop-type constraints. We establish sufficient conditions for solving the pursuit problem using the given parameters. These conditions are realized through the pursuer's Π-strategy.

Problems statement. We consider the following non-stationary differential games in the space R^n involving players: the pursuer $\boldsymbol{P}$ and the evader $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{P}: \dot{x} = a(t)u, \qquad x(0) = x_0, \quad \boldsymbol{E}: \dot{y} = b(t)u, \qquad y(0) = y_0, \tag{1}$$

where x_0,y_0 are initial positions of players respectively and we always assume that $x_0 \neq y_0$; $u(\cdot), v(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ are control functions of players respectively and we always assume that they are measurable functions; $a(t)$, $b(t)$ are scalar, measurable, positive functions for all $t \geq 0$.

We introduce the following classes for the admissible controls of players $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

1) The Langenhop type constraint (LT-constraint):

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq \rho^2 - 2k_1 \int_0^t k(s)\,|u(s)|^2\,ds, \quad t \geq 0, \\ |v(t)|^2 &\leq \sigma^2 - 2k_1 \int_0^t k(s)\,|v(s)|^2\,ds, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$\rho, \sigma > 0$, $k(t)$ is a scalar, positive, monotonically increasing and Lebesgue integrable function on $[0, t]$,

$$K(t) = \int_0^t k(s)ds,$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{LT}$ and $\mathbf{V}_{LT}$;

2) The Geometric constraint (in short $\bar{G}$- constraint) for $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

$$|u(t)| \leq \rho e^{-k_1 K(t)}, \quad t \geq 0, \quad |v(t)| \leq \sigma e^{-k_1 K(t)}, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{\bar{G}}$ and $\mathbf{V}_{\bar{G}}$;

3) The Integral constraint (in short $\bar{I}$- constraint) for $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned} &\int_0^t k(s) \left|u(s)\right|^2 ds \leq \rho^2 \left(1 - e^{-2k_1 K(t)}\right)/2k_1, \ t \geq 0, \\ &\int_0^t k(s) \left|v(s)\right|^2 ds \leq \sigma^2 \left(1 - e^{-2k_1 K(t)}\right)/2k_1, \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

and we denote such classes $\mathbf{U}_{\bar{I}}$ and $\mathbf{V}_{\bar{I}}$.

If $\mathbf{U}$ ($\mathbf{V}$) is one of $\mathbf{U}_{\bar{G}}$, $\mathbf{U}_{LT}$, $\mathbf{U}_{\bar{I}}$ ($\mathbf{V}_{\bar{G}}$, $\mathbf{V}_{LT}$, $\mathbf{V}_{\bar{I}}$), then for $u(\cdot) \in \mathbf{U}$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s)u(s)ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t b(s)v(s)ds.$$

Lemma. $\mathbf{U}_{\bar{G}} \subset \mathbf{U}_{LT} \subset \mathbf{U}_{\bar{I}}, \quad \mathbf{V}_{\bar{G}} \subset \mathbf{V}_{LT} \subset \mathbf{V}_{\bar{I}}$.

We call game (1) with LT-constraints on controls the LT-Game.

Assumption. Let $\rho > \sigma$, and $\Lambda_{LT}(t) = 0$,

$$\Lambda_{LT}(t) = 1 - \frac{1}{|z_0|}\left[\sqrt{\Upsilon_P(t) + \Omega_P(t)} - \sqrt{\Upsilon_P(t)}\right],$$

$$\Upsilon_P(t) = \frac{\sigma^2}{2k_1} K(t)\left(1 - e^{-2k_1 K(t)}\right), \ \Omega_P(t) = \frac{\delta}{k_1^2}\left(1 - e^{-k_1 K(t)}\right)^2.$$

We call the smallest root of $\Lambda_{LT}(t) = 0$ a guaranteed pursuit time and denote it by T_{LT}.

Theorem 1. If $b(t) \leq k(t) \leq a(t)$, a.e $t \geq 0$ and *Assumption* holds in the LT-Game, then the completion of pursuit is guPѳrPѳnteed on $[0, \mathbf{T}_{LT}]$ by the $\mathbf{\Pi_{LT}}$-strategy:

$$\boldsymbol{u}_{LT}(t, v) = \frac{b(t)}{a(t)} v - \lambda_{LT}(t, v)\xi_0,$$

$$\lambda_{LT}(t, v) = \frac{b(t)}{a(t)}\langle v, \xi_0\rangle + \sqrt{\left(\frac{b(t)}{a(t)}\langle v, \xi_0\rangle\right)^2 + \delta e^{-2k_1 K(t)}}.$$

Theorem 2. If $a(t) = b(t) \geq k(t)$, a.e $t \geq 0$ and *Assumption* holds in the LT-Game, then the completion of pursuit is guPѳrPѳnteed on $[0, \mathbf{T}_{LT}]$, by the $\mathbf{\Pi^*_{LT}}$-strategy

$$\boldsymbol{u}^*_{LT}(t, v) = v - \lambda^*_{LT}(t, v)\xi_0, \quad \lambda^*_{LT}(t, v) = \langle v, \xi_0\rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0\rangle^2 + \delta e^{-2k_1 K(t)}}.$$

Literature

1. Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

2. Petrosjan L.A. Differential Games of Pursuit. Series on Optimization 2. Singapore: World Scientific, Singapore, 1993.

3. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint//Serdica Bulgariacae math. 1986. Vol. 12, Issue 1. pp. 38–43.

4. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications//Contributions to Game Theory and Management. 2011. Vol. 4. pp. 33–46.

5. Samatov B.T., Umaraliyeva N.T., Uralova S.I. Differential games with the Langenhop type constrains on controls//Lobachevskii Journal Mathematics. 2021. Vol. 42, Issue 12, pp. 2942–2951.

6. Samatov B.T, Uralova S.I. Differential games with the Langenhop type constrains on controls//Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol.44, Issue 10, pp.4363–4373.

7. Uralova S.I. Non-stationary problems of pursuit-evasion with Langenhop- type // Uzbek Mathematical Journal. (2024), Issue 4, pp.60-67.

System For The Coefficients Of The Optimal Interpolation Formula

Shadimetov Kh. M.[1,2], **Olimov N. N.**[2,3]

Tashkent State Transport University, 1 Temiryolchilar, Tashkent 100167, Uzbekistan;
kholmatshadimetov@mail.ru
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan;
olimovnurali8@gmail.com
Tashkent International Unniversity, 7, Kichik khalka yoli str., Tashkent 100084, Uzbekistan.

Interpolation splines play a crucial role in modern technological advancements across various fields. They are essential in numerical analysis, computer graphics, data fitting, and solving partial differential equations.

In numerical analysis, spline interpolation involves fitting low-degree polynomials to subsets of data points, ensuring a smooth and accurate approximation of complex functions. This method is often preferred over high-degree polynomial interpolation due to its stability and precision. Splines are particularly effective in scattered data fitting, where they provide smooth curves and surfaces that pass through or near given data points. This capability is invaluable in fields like geospatial analysis and computer-aided design.

Let functions φ belong to the Sobolev space $L_2^{(4)}(0,1)$. Here $L_2^{(4)}(0,1)$ is the Hilbert space of functions that are square integrable with fourth derivative in the interval [0,1]. The space is equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{L_2^{(4)}} = \sqrt{\int_0^1 (f^{IV}(x))^2 dx}.$$

Let a grid $\Delta: \ 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ be given on the interval $[0,1]$. Assume that on this grid, the following values of the function and its derivatives are given:

$$\varphi(x_\beta),\ \varphi'(x_\beta),\ \varphi''(x_\beta),\ \varphi'''(x_\beta), \quad \beta = 0,1,\ldots,N. \tag{1}$$

In this work, we consider the problem of optimal interpolation of functions $\varphi(x)$ given by values (1) at nodes $x_\beta,\ \beta = 0,1,\ldots,N$ in the space $L_2^{(4)}(0,1)$.

For this, we consider the problem of interpolation of the functions $\varphi(x)$ with a more straightforward function of the form

$$P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}(x)\varphi(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1}(x)\varphi'(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,2}(x)\varphi''(x_\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,3}(x)\varphi'''(x_\beta). \tag{2}$$

In this case, we get the approximate equality

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x). \tag{3}$$

The error associated with the approximate equality (3) takes the form of a difference expressed as

$$(R,\varphi) = \varphi(x) - P_\varphi(x), \tag{4}$$

where R is a error functional of the approximation (3).

According to the Cauchy-Schwarz inequality, the upper bound of the error functional looks like this:

$$|(R,\varphi)| = |\varphi(x) - P_\varphi(x)| \le \|R\|_{L_2^{(4)*}} \cdot \|\varphi\|_{L_2^{(4)}} \tag{5}$$

In order to construct an optimal interpolation formula of the form (2), it is necessary to calculate $\|R\|$, then we find the smallest value of this quantity in the given $C_{\beta,0}$, $C_{\beta,1}$ and $C_{\beta,2}$ [1],[2]by the coefficients $C_{\beta,3}$. That is, we calculate the quantity

$$\inf_{C_{\beta,3}} \|R\| \tag{6}$$

So, we get an explicit expression for the norm of the error functional R of the interpolation formula (2).

We find the quantity (6). For this, we come to the problem of finding the conditional minimum of a multivariable Lagrange function.

Definition. If we find coefficients $C_{\beta,3}$ that minimize the squared norm of the error functional R, then these coefficients are called *optimal coefficients*, and interpolation formula (2) is called *the optimal interpolation formula* [3].

The following holds.

Theorem. The system of linear equations for the coefficients of the optimal interpolation formula has the following form:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_{\gamma,3}\frac{|x_\beta - x_\gamma|}{2} + \lambda = f(x_\beta, z), \quad \beta = 0,1,...,N, \tag{7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_{\gamma,3} = 0, \tag{8}$$

here,

$$f(x_\beta, z) = -\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma)(x_\beta - x_\gamma)^4}{48} + \sum_{\gamma=0}^{N} C_{\gamma,1} \frac{|x_\beta - x_\gamma|^3}{12}$$

$$- \sum_{\gamma=0}^{N} C_{\gamma,2} \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - x_\gamma)(x_\beta - x_\gamma)^2}{4} + \frac{\operatorname{sgn}(x_\beta - z)(x_\beta - z)^4}{24}. \tag{9}$$

References

1. Babaev S.S., Mamatova N.Kh., Hayotov A.R. Optimal interpolation formula in $L_2^{(m)}(0,1)$ space. Uzbek Mathematical Journal. 2017. Vol. 2. pp. 23–31.

2. Hayotov A.R., Babaev S.S., Olimov N.N. An optimal interpolation formula of Hermite type in the Sobolev space. Filomat. 2024. Vol. 23. pp. 8305–8322.

3. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Nauka, Moscow, 1974.

Pursuit-Evasion Game For Players With Linear Motion Dynamics Under Exponential Velocities

Soyibboev U. B.[1], Abdurakhimova Sh. A.[2], Husanboeva K. A.[3]

[1]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
ulmasjonsoyibboev@gamil.com

[2]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
abdurahimovashahnoza90@gmail.com

[3]Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
komilahusanboyeva3@gmail.com

Abstract. We address linear pursuit-evasion game problems for players whose motions are governed by linear differential equations of constant coefficients and whose control functions meet exponential geometric restrictions, in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. For solving the pursuit game, the $\Pi-$*strategy* (known as the *parallel pursuit strategy* [2–5]) is constructed, and sufficient pursuit conditions are obtained. For solving the evasion game, a directional control function is devised, and sufficient evasion conditions are derived.

Problems statement. Assume that a player P (the pursuer) with a control u, $u \in \mathbb{R}^n$, follows another player E (the evader) with a control v, $v \in \mathbb{R}^n$. Write by x, $x \in \mathbb{R}^n$, the position of the pursuer and by y, $y \in \mathbb{R}^n$, that of the evader. Let their motions be respectively given as follows:

$$P: \ \dot{x} = bx + u, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \ \dot{y} = by + v, \ y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $b \in \mathbb{R}/\{0\}$; x_0, y_0 are the players' initial positions and it is supposed that $x_0 \neq y_0$ at $t = 0$.

The control parameters u and v are considered as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ meeting the exponential inequalities

$$|u(t)| \leq \alpha_0 a^{-rt} \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta_0 a^{-rt} \text{ for almost every } t \geq 0 \tag{4}$$

appropriately, where $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 \geq 0$, $r > 0$, $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, and $|\cdot|$ means the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$. According to the physical meaning, if $0 < a < 1$ ($a > 1$), then α_0 and β_0 mean the minimal (maximal) speed of players P and E. Denote by $\mathbb{U}_{exp}$ (by $\mathbb{V}_{exp}$) the family of all measurable functions $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) meeting condition (3) ((4)).

For $r = 0$, linear differential game (1)–(4) was comprehensively investigated in [1–4].

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}_{exp}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}_{exp}$, then from (1)–(2) it proceeds the following players' motion trajectories

$$x(t) = e^{bt}x_0 + \int\limits_0^t e^{b(t-s)}u(s)ds,\ y(t) = e^{bt}y_0 + \int\limits_0^t e^{b(t-s)}v(s)ds.$$

The target of player P is to capture player E, i.e. to realize the equality $x\big(T\big) = y\big(T\big)$ at a finite time T, $T > 0$. The aim of player E is to avoid from meeting player P, i.e. to hold the relation $x(t) \neq y(t)$ for any t, $t \geq 0$, or if this is not possible, then it struggles to delay the meeting time T as far as possible.

Main results. Here are the obtained results for linear differential game (1)–(4).

Definition 1. *For $\alpha_0 \geq \beta_0$, we call the function*

$$\boldsymbol{u}(z_0, v, t) = v - \delta(z_0, v, t)\zeta_0 \tag{5}$$

the Π*-strategy of Pursuer P, where $\zeta_0 = \frac{z_0}{|z_0|}$, $z_0 = x_0 - y_0$,*

$$\delta(z_0, v, t) = \langle v, \zeta_0\rangle + \sqrt{\langle v, \zeta_0\rangle^2 + \alpha_0^2 a^{-2rt} - |v|^2},$$

and $\langle v, \zeta_0\rangle$ implies the scalar product of the vectors v and ζ_0 in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1. *Let:*

1) $\alpha_0 > \beta_0$, $e^b \geq a^r$, $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$;

2) $\alpha_0 > \beta_0$, $e^b < a^r$, $a \in (1,+\infty)$, $|z_0| < \big(\alpha_0 - \beta_0\big)/\ln\big(a^r/e^b\big)$. Then Pursuer P, with the help of Π-strategy (5), captures Evader E on the time interval $\big[0, T_P\big]$, where $T_P = \frac{1}{\ln\left(a^r/e^b\right)} \ln\left(\frac{\alpha_0-\beta_0}{\alpha_0-\beta_0+|z_0|\ln\left(a^r/e^b\right)}\right)$ if $e^b \neq a^r$; $T_P = \frac{|z_0|}{\alpha_0-\beta_0}$ if $e^b = a^r$.

In linear differential game (1)–(4), we call T_P a *guaranteed pursuit time.*

Definition 2. *The control function*

$$\boldsymbol{v}(t) = -\beta_0 a^{-rt}\zeta_0 \tag{6}$$

is called the evasion strategy of Evader E.

Theorem 2. *Let:*

1) $\beta_0 \geq \alpha_0$, $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$;

2) $\alpha_0 > \beta_0$, $e^b < a^r$, $a \in (0,1)$;

3) $\alpha_0 > \beta_0$, $e^b < a^r$, $a \in (1,+\infty)$, $|z_0| \geq \big(\alpha_0 - \beta_0\big)/\ln\big(a^r/e^b\big)$. *Then Evader E, using evasion strategy (6), can escape from Pursuer P in the time interval $[0,+\infty)$.*

Literature

1. Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

2. Petrosjan L.A. Differential Games of Pursuit. Series on Optimization 2. Singapore: World Scientific, Singapore, 1993.

3. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint//Serdica Bulgariacae math. 1986. Vol. 12, №. 1. P. 38–43.

4. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Applications//Contributions to Game Theory and Management. 2011. Vol. 4. P. 33–46.

5. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players// Ural Mathematical Journal. 2021. Vol. 7, №. 2. P. 94–109.

Application Of Dynamic Systems To Economic Problems

Tishabayev DJ. K.[1], **Suyunova Z. B.**[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
jura@rambler.ru
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
suyunovazamira021@gmail.com

This thesis deals with analytic methods for solving planning problems in continuous time, namely the dynamic optimization techniques of the calculus of variations and of optimal control theory. The solution to a continuous time dynamic problem is a continuous function (or a set of functions) indicating the optimal path to be followed by the variables through time (or space).

In a static problem, one seeks an optimal number or finite set of numbers. For instance, a firm may seek the production level x^* that maximizes the profit $F(x)$ generated by producing and selling x units:

$$\max_{x\geq 0} F(x). \tag{1}$$

The answer to this problem is a number, x^*. If $F(x)$ has a particular functional form, then the number x^* can be determined precisely. Otherwise, x^* is characterized in terms of the function F. If F is continuously differentiable and production is worthwhile, x^* typically satisfies the first order necessary condition $F'(x^*) = 0$.

In another case, several variables may be selected simultaneously:

$$\max F(x_1, , x_n) \ \text{ subject to } \ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., n,$$

where $F(x_1, ..., x_n)$ is the profit function[1]. This is a different function than in (1). We use the name F for profit in several places, but the particular form of the function may be different in each case. and x_i is the amount of the ith good,
$i = 1, 2, ..., n$. The solution is a set of n numbers, $x_1^*, ..., x_n^*$, representing the amounts of each good to produce and sell for maximum profit.

A multiperiod discrete time generalization of (1) involves choosing the amount x_t, of the good to be produced and sold in each period t:

$$\max \sum_{t=1}^{T} F(t, x_t) \ \text{ subject to } \ x_t \geq 0, \ t = 1, , T \tag{2}$$

The optimal solution is a set of T numbers, $x_1^*, ..., x_T^*$. Since the output in any period affects the profit in that period only, problem (2) is reduced to a sequence of static problems,

namely, to choose a production level in each period to maximize current profit. Thus the T first order conditions satisfied by the T variables separate into T separate conditions, each in a single variable. The extension to n goods should be apparent.

The problem becomes truly dynamic if the current production level affects not only present profit but also profit in a later period. For example, current profit may depend on both current and past output due to costs of changing the production rate (e.g., costs of hiring or firing):

$$\max \sum_{t=1}^{T} F(t, x_t, x_{t-1}) \text{ subject to } x_i \geq 0,\ t = 1, , T \tag{3}$$

with a production level x_0 at the moment of planning, $t = 0$. Note x_0 must be specified since it affects the profit available in period 1. The T first order conditions satisfied by an optimal solution do not separate; they must be solved simultaneously.

The continuous time analog to (2) is

$$\max \int_0^T F(t, x(t))dt \text{ subject to } x(t) \geq 0. \tag{4}$$

The solution will be a function $x*(t),\ 0 \leq t \leq T$, that gives the firm's optimal output rate at each point in time over its planning period. As in (2), this is not really a dynamic problem since the output at any t affects only current profit. The optimal solution is to choose $x(t)$ to maximize profit $F(t, x(t))$ for each t.

The continuous time analog of (3) is less immediate. Since time is continuous, the meaning of "previous period"is not clear. It relates to the idea that current profit depends on both current output and the rate at which output changes with respect to time. The rate output changes over time is $x'(t)$. Thus, the problem may be written

$$\max \int_0^T F(t, x(t), x(t))dt \text{ subject to } x(t) \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Continuous dynamic optimization problem is given.

From a stock of capital equal at time t to $K(t)$ an output can be produced at rate $F(K)$. The production function F is assumed to be twice continuously differentiable, increasing, and concave. This output can be consumed, yielding immediate satisfaction, or it can be invested to augment the capital stock and hence future productive capacity. Output $F(K)$ is therefore the sum of consumption $C(t)$ and investment $K' = dK/dt$ (the change in capital stock). The problem is to maximize utility from consumption over some specified period by choosing the portion of output to be invested at each moment t. This amounts to selecting the rate of growth K' of the capital stock to

$$\max \int_0^T U(C(t))dt, \quad \text{or} \quad \max \int_0^T U\left[F(K(t)) - K'(t)\right] dt$$

$$\text{subject to } K(0) = K_0,\ K(T) \geq 0,$$

where the utility function U of consumption is twice continuously differentiable, increasing, and concave.

Bibliography

1. Morton I.K, Nancy L.S. Dynamic Optimization, second ed., Netherlands,1991.
2. Devaney, Robert L., Am Introduction to Chaotic Dynamicsl Systems, second ed., USA and Canada, 1989

On A Free-Boundary Mathematical Model Of Infection Dynamics With Immune Response

Takhirov J. O.[1]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent Uzbekistan;
prof.takhirov@yahoo.com

It is known that outbreaks of viral infections have become a serious global health problem. Various types of viruses, such as hepatitis B virus (HBV), hepatitis C virus (HCV), human immunodeficiency virus (HIV), and Ebola virus, are associated with severe consequences. Much effort has been made to understand the life cycle of this virus. With the advancement of biomedical research, mathematical models are also playing an increasingly important role in providing insight into viral infection and its dynamics.

To elucidate the pathogenesis of diseases and find effective treatments, viral dynamics have become a modern research topic (see [1]), which usually cannot be answered using only biological experimental methods, but requires the help of mathematical models. For example, regarding HBV infection, Nowak et al. [2] proposed a basic three-dimensional model of viral infection within a host, consisting of three ODEs.

To investigate the influence of spatial dynamics on this model, Stantsevich et al. [3] extended this model to include spatially random diffusion and spatially directed chemotaxis.

It is known that nonlinear infection rates can arise due to saturation at high virus concentrations, when the infectious fraction is so high that the likelihood of infection is high. Moreover, as the concentration of the virus increases, the living environment of the cells becomes worse and worse. Therefore, in paper [4] the authors put forward a model of virus spread with a nonlinear infection rate and free boundaries.

And in this note we will try to develop the known results. We are studying the following problem

$$
\begin{gathered}
d_1(u)u_t = u_{xx} + \theta - au - buw/(1+w), t > 0, -l < x < l, \\
d_2(v)v_t = v_{xx} + buw/(1+w) - cv, t > 0, g(t) < x < h(t), \\
d_3(w)w_t = w_{xx} + w_x - kv/(1+w) - qw, t > 0, g(t) < x < h(t), \\
v(t,x) = w(t,x) = 0, t > 0, x \in (g(t) < x < h(t)), \\
g'(t) = -\mu w_x(t, g(t)), h'(t) = -\beta w_x(t, h(t)), t > 0, \\
u(0,x) = u_0(x), -l < x < l, \\
v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), -h_0 < x < h_0 = h(0) = -g(0) < l,
\end{gathered}
$$

where u, v and w represent populations of uninfected cells, infected cells and viruses, respectively, $x = g(t)$ and $x = h(t)$ are moving unknown boundaries that are defined together with $u(t,x)$, $v(t,x)$ and $w(t,x)$; d, θ, a, b, c, k, q, μ, β, l, h_0 are positive constants.

The existence, uniqueness and uniform estimates of the global solution are proved, as well as the behavior of the solution components u, v and w over large time intervals. With the help of the basic reproductive number R_0, sufficient conditions are created for the spread or disappearance of the virus.

References

1. Wei X.P. et al. Viral dynamics in human immunodeficiency virus type 1 infection // Nature. 1995. V.373, pp. 117–122.

2. Nowak M.A, Bangham C.R. Population dynamics of immune responses to persistent viruses // Science. 1996. V.272, pp. 74–79.

3. Stancevic O. et al. Turing patterns from dynamics of early HIV infection // Bulletin of Mathematical Biology. 2013. V.75, pp. 774–795.

4. Li L., Lui S.Y., Wang M.X. A viral propagation model with a nonlinear infection rate and free boundaries // Science China Mathematics. 2020. V.64, pp. 1971–1992.

Mathematical Description Of The Transition Part Of A Railway Line Plan

Toshmatova M.M.[1], Ergashaliyev M.Y.[2]

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan;
magrurbekergashaliyev@gmail.com Independent Researcher;
toshmatova_mm@mail.ru

It is known [1] that a railway consists of straight sections connected by a curved section that joins two differently oriented consecutive segments. The necessity of curved sections in railways is associated with the requirement of an accessible route between two points connected by the railway [2],[3].

In straight sections of the railway, the track can be considered as two parallel lines with a constant distance between them, equal to the width of the track gauge [4], [5].

In this work, we present a method for calculating the length of the transition section for a given specific curve. Various methods exist to construct transition sections [6], but the most widely used is the curve known as the clothoid [7],[8].

A clothoid is a mathematical function widely used in the design of railway and highway curves. Its equation ensures a linear variation in curvature (from zero curvature to maximum curvature). The parametric equation of the clothoid is expressed as follows:

$$x = \int_0^s \cos\left(\frac{m}{2}t^2\right) dt, \quad y = \int_0^s \sin\left(\frac{m}{2}t^2\right) dt$$

where: s - arc length (distance along the clothoid); m - curvature parameter, that is, $\frac{1}{R(s)}$, where $R(s)$ is the radius of curvature of the clothoid; t - integration variable.

Since its curvature is inversely proportional to the length of the arc,he arc,

$$k = \frac{m}{s}, \quad s = \frac{m}{R}$$

where m is the proportionality coefficient.

For the point $\{X(S_1), Y(S_1)\}$, the curvature should be equal to the curvature of the circular arc, that is,is, $\frac{1}{R}$. Given that the curvature of the clothoid is proportional to the length of the arc, we obtain:

$$ms_1 = \frac{1}{R}$$

Thus, the length of the clothoid can be determined by the formula:

$$s_1 = \frac{1}{mR}$$

The length of the arc is inversely proportional to the radius of the curve and the coefficient of the clothoid.

A technical requirement states that the length of the transition section should not be less than the length of two wagons. Since the length of two wagons is approximately 50 m [9],[10], this condition must be considered.

$$Y - Y(s_1) = tg\frac{1}{2mR^2}\left(X - X(s_1)\right)$$

To determine the distance by which the circular arc should be shifted parallelly, we compose the equation of the tangent at the given point.

$$d = \left|Y(s_1) - tg\frac{1}{2mR^2}X(s_1) - R\right| \cos\frac{1}{2mr^2}$$

By subtracting the radius from this distance, we obtain the amount by which the circular arc should be shifted parallel to each other. each other.

$$\delta = d - R$$

Since the transition section must symmetrically rise towards the arc, after obtaining the equation of the inner rail curve, the equation of the outer rail is determined relative to the inner one. Here, the spatial nature of the curve representing the outer section is considered. The transition curve of the outer rail section will be analogous to that of the inner rail section.

References

1. Kochetkov V.V. "Railway Geometry: Fundamentals of Design". Moscow: Transport, 2015.

2. Profillidis, V. A. "Railway Management and Engineering". CRC Press, 2016.

3. Yakunin A.N., Lisin D.N. "Fundamentals of Railway Design". St. Petersburg: Polytechnic, 2014.

4. Esveld, C. "Modern Railway Track". MRT-Productions, 2001.

5. Hansen, I. A., Pachl, J. "Railway Timetable and Traffic: Analysis, Modelling, Simulation". Eurailpress, 2014.

6. Wickens, A. H. "Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics". CRC Press, 2003.

7. Anokhin A. N. "Fundamentals of Railway Tracing and Design". Moscow: Transport, 2008.

8. Belyakov Y.P., Vyazemsky N.A. "Mathematical Modeling in Railway Line Design". Moscow: Transport, 2009.

9. A Artykbaev, M.M. Toshmatova. "Geometric approach to define a railway plan model."Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, №. 3(115), 2024, pp. 26–33.

10. Lugovenko V.N. "Railway Geometry and Mathematical Modeling". St. Petersburg: Energoatomizdat, 2013.

The ℓ-catch Problem In The Differential Games With Inertial Players And Non-Stationary Geometric Constraints On Controls

Turgunboeva M. A.

Namangan state university, Namangan, Uzbekistan;
turgunboyevamohisanam95@gmail.com

We study the ℓ-catch problem of the differential game between two inertial players, Pursuer P and Evader E, whose objectives are diametrically opposed, in the space $\mathbb{R}^n$.

Let a parameter $x \in \mathbb{R}^n$ (a parameter $y \in \mathbb{R}^n$) designate the position of the Pursuer (the Evader). Then, given initial states $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n$ and $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^n$, the following system of differential equations describes the motions of players:

$$\ddot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \tag{2}$$

where x, y, u, $v \in \mathbb{R}^n$; x_0 and y_0 are the initial positions of the players which are regarded as $|x_0 - y_0| > \ell$ for some $\ell > 0$ at the time $t = 0$; x_1 and y_1 are their initial velocity vectors. The controls u and v are considered as the acceleration vectors of the players, which are required to become measurable functions $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, obeying the *geometric constraints* (for brevity, the *G-constraints* [1-2]).

$$|u(t)| \leq \alpha(t) \ \text{ for almost all } \ t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta(t) \ \text{ for almost all } \ t \geq 0, \tag{4}$$

where $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are non-negative integrable functions representing the maximum acceleration values of players P and E at each current time $t \geq 0$.

Let the class of all admissible controls $u(\cdot)$ (resp., $v(\cdot)$) corresponding to (3) (resp., (4) be denoted by $\mathbf{U}_P$ for the Pursuer (resp., by $\mathbf{V}_E$ for the Evader).

By equations (1) and (2), for controls $u(\cdot) \in \mathbf{U}_P$ and $v(\cdot) \in \mathbf{V}_E$, every triplet $(x_0, x_1, u(\cdot))$ and $(y_0, y_1, v(\cdot))$ generates the trajectories

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s)u(s)ds, \qquad y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t-s)v(s)ds,$$

of the Pursuer and the Evader, respectively.

The Pursuer's primary goal is to get inside an ℓ-radius vicinity of the Evader, that is, to achieve the relation $|x(t^*) - y(t^*)| \leq \ell$ at some finite time $t^* > 0$. The Evader's goal,

on the other hand, is to prevent the Pursuer from getting to this ℓ-radius zone, i.e., to maintain the inequality $|x(t) - y(t)| > \ell$ for all $t \geq 0$.

If new denotations $z = x - y$, $z_0 = x_0 - y_0$, $z_1 = x_1 - y_1$ are used in order to make our calculations convenient, then systems (1) and (2) reduce to the following form:

$$\ddot{z} = u - v, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = z_1.$$

In the current work, we focus on discussing the ℓ-catch problems with the dynamics of players (1)–(2) under the constraints (3)–(4) in the following two cases:

Case 1. The vectors z_0 and z_1 are linearly dependent, so there exists a specific finite scalar k, $k \in \mathbb{R}$, for which $z_1 = kz_0$.

Case 2. The vectors z_0 and z_1 are linearly independent.

Let

$$\gamma_\ell(z_0, t, v) = \frac{1}{h} \cdot \left[\langle v, z_0\rangle + \alpha(t)\ell + \sqrt{(\langle v, z_0\rangle + \alpha(t)\ell)^2 + h(\alpha^2(t) - |v|^2)}\right],$$

where $\langle v, z_0\rangle$ is referred as the scalar product of v and z_0 in $\mathbb{R}^n$, and let

$$\mu(z_0, t, v) = -\ell(v - \gamma_\ell(z_0, t, v)z_0)/\big|v - \gamma_\ell(z_0, t, v)z_0\big|, \;\; h = |z_0|^2 - \ell^2.$$

Definition 1. *The control function* $\mathbf{u}_\ell(z_0, t, v) = v + \gamma_\ell(z_0, t, v)\big(\mu(z_0, t, v) - z_0\big)$ *is said to be Pursuer's strategy or for brevity,* Π_ℓ*-strategy.*

Assumption 1 *Let one of the conditions be valid: a)* $\alpha(t) > \beta(t)$ *and* $k \in \mathbb{R}$*; b)* $\alpha(t) = \beta(t)$ *and* $k < 0$ *for all* $t \geq 0$*. Then the equation* $\Gamma(t) = 0$ *has the least one positive root with respect to* t *that will be denoted by* T_ℓ*, where*

$$\Gamma(t) = 1 - \frac{1}{|z_0| - \ell}\int\limits_0^t (t - s)(\alpha(s) - \beta(s))ds + \frac{|z_0|k}{|z_0| - \ell}t.$$

Theorem 1. *Let Assumption 1 be satisfied. Then* Π_ℓ*-strategy guarantees a win for the Pursuer in the* ℓ*-catch problem of Case 1 on the time interval* $[0, T_\ell]$*.*

Theorem 2. *Let* $\alpha(t) \geq \beta(t)$*. Then* Π_ℓ*-strategy provides to win for the Pursuer in the* ℓ*-catch game of Case 2 on the time interval* $[\theta, \overline{T}_\ell]$*, where* $\overline{T}_\ell = \overline{t}^*(z_0^*) + \theta$ *and* $\overline{t}^*(z_0^*)$ *is the first positive root of the equation*

$$\int\limits_0^t (t - s)\left(\alpha(s) - \beta(s)\right)ds = z_0^* - \ell.$$

Here θ *is the coincident time of velocities of the players and* $\theta \in [T_1, T_2]$*, where* T_1 *is the first positive root of equation*

$$\Lambda_1(z_1, t) = 1 - \int\limits_0^t \left(\alpha(s) + \beta(s)\right)/|z_1|ds = 0$$

and T_2 *is the first positive root of equation*

$$\Lambda_2(z_1, t) = 1 - \int\limits_0^t \left(\alpha(s) - \beta(s)\right)/|z_1|ds = 0$$

.

Literature

1. Bannikov A.S., Differential game: A Non-stationary problem of group pursuit. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2019, Vol.48, P. 527–532.

2. Samatov B.T., Horilov M.A., Akbarov A.Kh., Differential game: "Life-line"for non-stationary geometric constraints on controls. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, №. 1, P. 237–248.

Pursuit Evasion Differential Games In Hilbert Space

Zaynabiddinov I. S.

Andijan State Pedagogical istitute, Andijan, Uzbekistan;
ibroximjon@adu.uz

Abstract. This paper investigates linear optimal pursuit-evasion games in a Hilbert space. We examine the existence and uniqueness of mild solutions for linear differential equations. Subsequently, we analyze a linear differential game subject to integral constraints on the players' control parameters. The optimal strategy for the pursuer is formulated to minimize the time required to bring the state of the system to the origin within the space. Conversely, the optimal strategy for the evader is designed to maximize the time required to prevent the system from reaching the origin. We construct the players' strategies using the Gramian operators, which serve as the primary tool for achieving optimal pursuit time.

Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ be a sequence of positive real numbers, and let p be a fixed real number. We consider the following Hilbert space on real numbers $\mathbb{R}$,

$$\ell_\alpha^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p x_i^2 < \infty \right\}.$$

Define the inner product and the norm as follows:

$$\langle x, y \rangle_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p x_i y_i, \quad x, y \in \ell_\alpha^2, \quad \|x\|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^p x_i^2 \right)^{1/2}.$$

In this paper we study differential game described by the infinite system of binary differential equations in the Hilbert space ℓ_α^2

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_i = -\alpha_i x_i + y_i + u_{i1} - v_{i1}, & x_i(0) = x_{io}, \\ \dot{y}_i = -\alpha_i y_i + u_{i2} - v_{i2}, & y_i(0) = y_{io}, \quad i = 1, 2, \dots \end{array} \tag{1}$$

where α_i, $i = 1, 2, \dots$ are given positive real numbers, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots)$, $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots) \in \ell_\alpha^2$, $u = (u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, \dots)$ is the control parameter of the pursuer, and $v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}, \dots)$ is the control parameter of the evader.
For abbreviation, we let

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots), \quad z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))^*, \ i = 1, 2, \dots,$$

$$A_i = \begin{pmatrix} -\alpha_i & 1 \\ 0 & -\alpha_i \end{pmatrix},$$

where * denotes the transpose operation. We begin by justifying the existence of the solution to the following Cauchy problem in ℓ_α^2

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \omega_i, \quad z_{i0} = z_i(0), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

where $z(0) = (z_{10}, z_{20}, \ldots) \neq 0$.

We will first show that system (2) has a unique solution in space ℓ_α^2 and that this solution is continuous. Following this, we will address the optimal control problem for the differential game represented by the system (1).

Literature

1. M. Ruziboev, G. Ibragimov, K. Mamayusupov, A. Khaitmetov, and B. A. Pansera, "On a linear differential game in the Hilbert Space ℓ^2", Mathematics 11, 49–87 (2023). https://doi.org/10.3390/math11244987

2. I. Zaynabiddinov, M. Ruziboev, G. Ibragimov, and T. Ciano, "On a linear differential game of pursuit with integral constraints in ℓ^2", Mathematics **12** (2), ID 195 (2024).

3. G. Ibragimov, M. Ruziboev, I. Zaynabiddinov, and B. A. Pansera, "Evasion differential game of multiple pursuers and a single evader with geometric constraints in ℓ^2", Games **14** (4), ID 52, 1–6 (2023). https://doi.org/10.3390/g14040052

4. A. A. Azamov, J. A. Bakhramov, and O. S. Akhmedov, "On the Chernousko time-optimal problem for the equation of heat conductivity in a rod", Ural Math. J. **5** (1), 13–23 (2019).

Плоско-Радиальная Аномальная Фильтрация Жидкости В Однородной Пористой Среде

Хужаёров Б.Х.[1,2], **Акрамов Ш.Б.**[1], **Абдувахобов М.Б.**[1]

[1] Самаркандский государственный университет им.Шарофа Рашидова,Самарканд,Узбекистан;

[1,2] Институт математики имени В.И.Романовского, Академия наук РУз, Ташкент, Узбекистан;

[1,2] b.khuzhayorov@mail.ru

[1] sh.baxromovich@gmail.com

В данной работе изучается радиальная аномальная фильтрация однородной жидкости в однородной пористой среде. Математическая модель аномальной фильтрации в радиальном режиме построена с использованием аппарата дробного дифференцирования. Для уравнения пьезопроводности рассматривается задача в одномерной среде при постоянном давлении на границе. Оценено влияние аномальности на распределение поля давления и скорости фильтрации.

Аномальный закон фильтрации принимается в виде

$$\vec{v} = -\frac{k_f}{\mu} \nabla \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right), \tag{1}$$

где $\vec{v}$ - скорость фильтрации, k_f-псевдопроницаемость, т.е. фрактальная проницаемость с размерностью L^2T^α, L - размерность длины, T - размерность времени,

μ-вязкость жидкости, $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$-порядок производной, ∇ - оператор Гамильтона, p - давление, t - время.

Уравнение фильтрации в радиальном пласте в одномерном случае для (1) имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \frac{1\partial}{r\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^{\alpha} p}{\partial t^{\alpha}}\right)\right] \tag{2}$$

где $\chi = \frac{k_f}{\mu\beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности, β^*- коэффициент упругоемкости среды.

Для этого уравнения достаточно задать одно начальное и два граничных условия. Начальное условие принимаем в виде

$$p(0, r) = p_0 = \text{ const }, \tag{3}$$

Граничные условия следующие:

$$p\left(t, r_c\right) = p_c = \text{ const }, \quad p(t, \infty) = p_0, \quad p_c < p_0, \tag{4}$$

где r_c - радиус скважины.

Уравнение (2) при условиях (3)-(4) решается методом конечных разностей [2-4]. В области $\{0 \leq t \leq T_{\max}, r_c \leq r < \infty\}$ введем сетку $\bar{\omega}_h = \{r = r_c + i \cdot h, i = 0, 1, \ldots, \}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_i = j \cdot \tau, j = 0, 1, 2, \ldots, M, \tau = T_{\max}/T\}$, где h - шаг сетки в направлении r, τ - шаг сетки по времени. Из этих двух сеток построим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau-$ двумерную сетку. Его узлы состоят из точек $\left(t_j, r_i\right), i = 0, 1, \ldots, ; j = 0, 1, 2, \ldots, M$.

На этой сетке уравнение (2) аппроксимируется как

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \chi \frac{\tau^{1-\alpha}}{\mathrm{r_i} \cdot h^2 \cdot \Gamma(2-\alpha)} \left(r_{i-1/2} \cdot \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{\tau} + r_{i-1/2} \cdot (S_1)_i^j - \left(r_{i-1/2} + r_{i+1/2}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} - \left(r_{i-1/2} + r_{i+1/2}\right) \cdot (S_2)_i^j + r_{i+1/2} \cdot \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} + r_{i+1/2} \cdot (S_3)_i^j \right),$$

$$i = \overline{1, N-1}; j = \overline{0, M-1}, \tag{5}$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма функция, $r_{i-1/2} = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}, r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1}+r_i}{2}, N$ - достаточно большое целое число, выбирается так, чтобы r_N входил в область изменения давления для заданного времени t_j.

Вводим следующие обозначения

$$(S_1)_i^j = \sum_{k=0}^{j-1} \left(p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k\right) \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right), \tag{6}$$

$$(S_2)_i^j = \sum_{k=0}^{j-1} \left(p_i^{k+1} - p_i^k\right) \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right), \tag{7}$$

$$(S_3)_i^j = \sum_{k=0}^{j-1} \left(p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k\right) \cdot \left((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}\right). \tag{8}$$

$$(k_p)_i = \frac{\tau^{1-\alpha}\chi}{\Gamma(2-\alpha) r_i h^2}.$$

Начальное условие аппроксимируется как

$$p_i^0 = p_0, \quad i = \overline{0, N}. \tag{9}$$

Граничные условия (4) в разностной форме имеют вид

$$p_0^{j+1} = p_c, \quad p_N^{j+1} = p_0, \quad j = 0, 1, \ldots, T-1 \tag{10}$$

Задача была решена методом конечных разностей и получены следующие выводы. При аномальном процессе фильтрации в плоскорадиальном случае увеличение порядка локальной дробной произведной в (1) приводит к уменьшению темпа изменения распределения давления в среде и замедлению скорости фильтрации. Чем больше , тем сильнее эффект замедления развития давления и скорости фильтрации

Литература

1. Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999. 28. Pp. 113-130.

2. Xia Y., Wu J.C. and Zhou L.Y. Numerical Solutions of Time-Space Fractional AdvectionDispersion Equations // ICCES. 2009. 9(2). Pp. 117-126.

3. Xiao-jun Yang, General Fractional Derivatives. Theory, Methods and Applications. Taylor & francis Group, LLC. 2019.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.:Наука. 1989. - 616 с.

Бифуркационные Диаграммы Дробного Осциллятора Фитцхью-Нагумо С Переменными Коэффициентами И Памятью

Алимова Н.Б. [1], **Паровик Р. И.**[2]

[1] Ташкентский государственный университет экономики, Ташкент, Узбекистан
[2]Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия;
parovik@ikir.ru

В работах 60-ых годов Р. ФитцХью [1] и Дж. Нагумо [2] была предложена математическая модель (осциллятор ФитцХью-Нагумо) для описания возбуждения нервного импульса в мембране. Модель описывает быструю и медленную динамику двух переменных — "возбуждающей" переменной (автоколебания), характеризующей мембранный потенциал в биологической возбудимой ткани и "восстанавливающей" переменной, отвечающей за ток восстановления. Модель являлась упрощенной версией ранее известной модели Ходжкина-Хаскли [3] и широко используются в нейробиологии для описания активации и деактивации нейронов.

В работе мы будем рассматривать обобщение осциллятора ФитцХью-Нагумо на случай учета наследственности. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - c\left(x^2(t) + p\right)\partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) + qx(t) + gx^3(t) = a + bz(t), x(0) = k_1, \dot{x}(0) = k_2, \tag{1}$$

здесь q – коэффициент трения, $g > 0$ – коэффициент, соответствующий жесткой упругой силе, он отвечает за неизохронность колебаний; a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1, 0 < b < 1, b < c^2$, $x(t) \in C^2[0, T]$ - мембранный

потенциал, $z(t) \in C[0,T]$ - функция внешнего воздействия, которая отвечает за интенсивность раздражителя, $t \in [0,T]$ - время рассматриваемого процесса, $T > 0$ - время моделирования, k_1, k_2 - константы, которые определяют начальные условия, операторы дробных производных переменных порядков имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t))} \int\limits_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)-1}}, \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta(t))} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta(t)}},$$

понимаются в смысле типа Герасимова-Капуто [4,5], порядки которых $1 < \alpha(t) < 2$, $0 < \beta(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0,T]$. Свойства производных дробных переменных порядков можно изучить в обзорных статьях [6,7].

Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором ФицХью-Нагумо. Она описывает нелинейные автоколебания колебания с учетом переменной наследственности.

Отметим, что в случае, когда $z(t)$ является константой, то мы приходим к результам, полученным в статье [8], если еще и $\alpha(t), \beta(t)$ являются константами мы приходим к результатам, полученным в работах [9, 10]. В случае, когда $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ и $z(t)$ является константой, то мы переходим к классическому осциллятору ФитцХью-Нагумо [1,2].

В работе далее с помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона строится решение задачи Коши (1), проводится визуализация результатов строятся: осциллограммы и фазовые траектории. Далее строятся бифуркационные диаграммы зависимости решения от значений параметров модельного уравнения (1) и дается их интерпретация.

Работа выполнена в рамках Соглашения между Национальным университетом Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Федеральным государственным бюджетным научным учреждением кИнститут космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАНь о сотрудничестве в области математических исследований (№1118 от 28 апреля 2022 г.), а также в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (регистрационный номер темы 124012300245-2).

Литература

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. №. 1. 446–446

2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. №. 50, 2061–2070.

3. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J Physiol. 1952. №. 117(4), 500-544. doi: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.

4. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. vol. 20. P. 790Ц809.

5. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. 2017. vol. 52. P. 3043Ц3052.

6. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review // Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ. 2020. №. 476. 20190498.

7. Sun, H., Chang, A., Zhang, Y. et al. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications. FCAA 22, 27–59 (2019). doi: 10.1515/fca-2019-0003.

8. Алимова Н. Б. Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2024. Т. 48, №3. С. 56-69. DOI 10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69.

9. Липко О. Д. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. №3(23). С. 116-123. DOI 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123.

10. Lipko O.D., Parovik R.I. Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 012125.

Элемент Рисса Одной Интерполяционной Формулы

Атамурадова Б. М.

Республиканское специализированное техническое училище для людей с ограниченными возможностями, Ташкент, Узбекистан;
bahsandatamuradova@gmail.com

В настоящей работе с помощью метода Соболева решена первая часть задачи, т.е. найдено явное выражение квадрата нормы функционала погрешности оптимальной интерполяционной формулы.

Рассмотрим следующую интерполяционную формулу:

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi\left(x_\beta\right) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta(x)-$ коэффициенты, $x_\beta(\in[0,1])-$ узлы формулы (1), $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(2,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2,0)}} = \left(\int_0^1 \left(\varphi''\left(x\right) - \varphi\left(x\right)\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Погрешностью интерполяционной формулы (1) называется разность

$$(\ell,\varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi\left(x_\beta\right).$$

Задача построения оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)-$ это вычисление следующей величины:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{W_2^{(2,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(2,0)*}}. \tag{3}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $W_2^{(2,0)*}(0,1)$, где $W_2^{(2,0)*}(0,1)-$ сопряженное пространство к пространству $W_2^{(2,0)}(0,1)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму функционала погрешности (2) в пространстве $W_2^{(2,0)*}(0,1)$, а затем нахождение минимума нормы (3) по коэффициентам $C_\beta(z)$ для фиксированных узлов x_β.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы $\|\ell\|_{W_2^{(2,0)*}}$ функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л.Соболевым [1,2].

Функция ψ_ℓ, для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(2,0)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(2,0)}}$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ.

Имеет место

Теорема 1. Экстремальная функция ψ_ℓ функционала погрешности ℓ интерполяционной формулы (1) и имеет вид:

$$\psi_\ell(x) = (\ell * G_2)(x) + r_1 e^x + r_2 e^{-x}$$

где r_1 и r_2 Ц произвольные действительные числа,

$$G_2(x) = \frac{\text{sign}x}{4}\left(x\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\right).$$

Кроме того, функционал погрешности (2), как показано в [3], удовлетворяет следующим условиям

$$(\ell, e^x) = 0, \;\; (\ell, e^{-x}) = 0. \tag{4}$$

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение (ℓ, ψ_ℓ) с учетом условий ортогональности (4). Таким образом

$$\|\ell\|^2_{W_2^{(2,0)*}} = \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta(z)C_\gamma(z)G_2(x_\beta - x_\gamma) - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)G_2(z - x_\beta),$$

где $G_2(x)$ определено в теореме 1.

Таким образом, первая часть задачи о построении оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(2,0)}(0,1)$ решена.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Н.: ИМ СО РАН, 1996.
3. Шадиметов Х.М., Атамурадова Б.М. Дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов интерполяционных формул. //Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2024. Т.59, №. 4/1, С. 64–73.

Об одном отимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в Гильбертовом пространстве

Азамов С.С., Бекмуродова Д.Б.
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
azamovss2018@gmail.com

На практике очень важно построить квадратурную формулу в гильбертовом пространстве для приближенного вычисления интегралов. Полученные результаты построения квадратурных формул позволяют разрабатывать совершенные математические модели различных природных процессов.

В периодических функций в гильбертовом пространстве $\widetilde{S_2(P_m)}$ построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления коэффициентов Фурье.

$$\int_0^1 \varphi(x)e^{2\pi i\omega x}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta\varphi(x_\beta). \tag{1}$$

где $\omega h \in Z, \omega \neq 0$ C_β неизвестные коэффициенты квадратурной формулы вида (1) $h = 1/N, N-$ натуральное число, функции φ принадлежат пространству $\widetilde{S_2(P_m)}$.

В данной работе рассматривается построение оптимальной квадратурной формулы на основе функционального подхода для численного расчета коэффициентов Фурье. При этом сначала решим краевую задачу для экстремальной функции квадратурной формулы. С помощью экстремальной функции находится вид нормы функционала погрешности. Норма функционала погрешности зависит от коэффициентов и узлов. Находим минимальное значение нормы функционала по коэффициентам с заданными узлами. Таким образом, мы построим оптимальную квадратурную формулу с в гильбертовом пространстве. Полную библиографию по этой тематике можно найти, например, в книгах [1,2].

Литература

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967. - 500 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.- 808 с.

Вычисление Нормы Функционала Погрешности Оптимальных Квадратурных Формул В Пространстве $S_2(P_2)$

Azamov S. S., Tursunmuratov S. T.
Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан
azamovss2018@gmail.com

Оптимальные формулы численного интегрирования играют важную роль в вычислительной математике. Поэтому многие математики занимались задачами построения таких формул. Этим задачам посвящены много работ. Полную библиографию по этой тематике можно найти, например, в книгах [1,2].

В работах [3,4] в пространстве $S_2(P_2)$ была рассмотрена задача построения оптимальных квадратурных формул вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где C_β и x_β *коэффициенты* и *узлы* квадратурной формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка [0,1], $\delta(x)$ – дельта - функция Дирака, а $\varphi(x)$ подынтегральные функции и принадлежат в гильбертово пространство $S_2(P_2)$. В пространстве $S_2(P_2)$ норма функций определяется формулой

$$\|\varphi|S_2(P_2)\| = \left\{ \int_0^1 \left(\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x)\right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

и от функций $\varphi(x)$ требуются, чтобы $\int_0^1 \left(\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x)\right)^2 dx < \infty$.

Отметим, что в работе [3,4] для квадрата нормы функционала погрешности (2) получено следующее представление:

$$\|\ell\|^2 = \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\beta'=0}^{N} C_\beta C_{\beta'} G_2(x_\beta - x_{\beta'}) - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \int_0^1 G_2(x - x_\beta)dx + \int_0^1\int_0^1 G_2(x-y)dxdy, \tag{3}$$

где

$$G_2(x) = \frac{sgnx}{8}\left(x \cdot (\exp(x) + \exp(-x)) - \exp(x) + \exp(-x)\right). \tag{4}$$

Теорема 1. *Для квадрата нормы (3) функционала погрешности (2) оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $S_2(P_2)^*$ справедливо следующее равенство*

$$\|\ell\|^2 = 1 + \frac{2 - e^1 - e^{-1}}{2} + \frac{2h(e^1 + e^{-1} - 2)}{2h + e^h - e^{-h}} - \frac{2(e^h + e^{-h} - 2)}{h(2h + e^h - e^{-h})} +$$

$$+\frac{(e^{2h} - 2he^h - 1)(e^{2h} - 1)(e^h - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^N - 1)}{2h^2 e^{2h}(e^{2h} + 2he^h + 1)(\lambda^N + 1)(\lambda - 1)} + \frac{(e^{2h} - 2he^h - 1)(e^1 + e^{-1} - 2)}{2(e^{2h} + 2he^h + 1)},$$

где

$$\lambda = \frac{4he^{2h} - e^{4h} + 1 + (e^{2h} - 1)\sqrt{(1 - e^{2h})^2 - 4h^2e^{2h}}}{2e^{2h}(h(e^h + e^{-h}) + e^{-h} - e^h)},$$

$|\lambda| < 1$.

Литература

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967. - 500 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.- 808 с.
3. Азамов С.С. О построении оптимальной квадратурной формулы с равно отстоящими узлами. Бюллетень Института Математики 2024, Vol.7, №1.
4. Shadimetov Kh.M., Azamov S.S. On the construction of optimal quadrature formulas with equally spaced nodes. Filomat Vol 38, №29, 2024.

Численный Метод Решения Дробно-Дифференциальной Задачи Фильтрации С Переменными Порядками Дробных Производных

Бакишев А. К.[1], Алимбекова Н. Б.[1], Бердышев А. С.[2], Мадияров М. Н.[1]

[1]Восточно-Казахстанский университет имени Сарсена Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан;
b.aibek86@mail.ru, nalimbekova@vku.edu.kz, madiyarov_mur@mail.ru

[2]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан;
berdyshev@mail.ru

В данной работе исследуется применение конечно-элементного метода для решения дробно-дифференциальной задачи фильтрации в гетерогенных трещиноватых пористых средах с переменными порядками дробных производных. Разработан конечно-элементный метод для численного решения начально-краевой задачи, а также проведен теоретический анализ их устойчивости и сходимости с использованием априорных оценок и численных экспериментов. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнительным анализом эмпирического и теоретического порядков сходимости на основе вычислительных экспериментов. Дополнительно изучено влияние переменных порядков дробных производных на процесс фильтрации жидкости в гетерогенной среде, что позволяет получить новые научные и практические результаты в области моделирования пористых сред и фильтрационных процессов.

Формально заменяя дробные производные постоянного порядка в нелинейном дробном дифференциальном уравнении для фильтрации вязкоупругой жидкости их аналогами переменного порядка, мы получаем следующую задачу фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах.

Задача 1. В области $\bar{Q}_T$, где $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times J$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1,2,3$, $J = (0,T]$, $\alpha(t)$,$\beta(t)$,$\gamma(t) \in (0,1)$ для всех $t \in \overline{J}$, найти p, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{cases} \partial_t p + c_\phi \partial_t^{\alpha(t)} p + c_f \partial_t^{\beta(t)} p - \kappa \partial_t^{\gamma(t)} \nabla^2 p = f, & x \in \Omega,\ t \in J, \\ p(x,0) = p_0(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ p(x,t) = \eta(x,t), & x \in \partial\Omega,\ t \in J, \end{cases}$$

где c_ϕ , c_f Ц обобщенные дробно-дифференциальные коэффициенты изотермической сжимаемости жидкости и пористой среды соответственно, а дробная производная Капуто переменного порядка определяется следующим образом:

$$\partial_t^{v(t)} p(\cdot,t) = \frac{1}{\Gamma(1-v(t))} \int_0^t \frac{\partial_t p(\cdot,s)}{(t-s)^{v(t)}} ds.$$

Определим слабую постановку задачи 1.

Задача 2. Найти $p : J \to H_0^1(\Omega)$, такое что для любого $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_t p, v) + c_\phi \left(\partial_t^{\alpha(t)} p, v\right) + c_f \left(\partial_t^{\beta(t)} p, v\right) + \left(\kappa \partial_t^{\gamma(t)} \nabla p, \nabla v\right) = (f, v), \tag{1}$$

где $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in (0,1)$ для всех $t \in \overline{J}$.

Введем разбиение временного отрезка $[0,T]$ точками $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $n = 0, 1, ..., N$, так что $N\tau = T$ и определим конечно-элементное пространство V_h. Обозначим $p^n = p(\cdot, t_n)$. Для дискретизации дробной производной переменного порядка использована формула из работы [1]. В результате построена следующая численная схема.

Задача 3. Пусть известны $\left\{p_h^k\right\}_{k=0}^n$, $p_h^k \in V_h$. Найти $p_h^{n+1} \in V_h$, $n = 1, 2, ..., N$, удовлетворяющее следующему тождеству для любого $v_h \in V_h$:

$$\left(\tilde{\Delta}_t p_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h\right) + c_\phi \left(\Delta_\tau^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}} p_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h\right) + c_f \left(\Delta_\tau^{\beta_{n+\frac{1}{2}}} p_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h\right) + \kappa \left(\Delta_\tau^{\gamma_{n+\frac{1}{2}}} \nabla p_h^{n+\frac{1}{2}}, \nabla v_h\right) = (f, v_h),$$

где $\alpha_{n+\frac{1}{2}}, \beta_{n+\frac{1}{2}}, \gamma_{n+\frac{1}{2}} \in (0,1)$, $t_{n+1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$, $\nu_{n+1/2} = \nu\left(t_{n+1/2}\right)$, $n = 0, 1, ..., N-1$,

$$p_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(p_h^{n+1} + p_h^n\right), \quad \tilde{\Delta}_t p_h^{n+1/2} = \frac{1}{\tau}\left(p_h^{n+1} - p_h^n\right).$$

Проведено исследование устойчивости и сходимости предлагаемой схемы.

Теорема 1. Дискретная схема (1) безусловно устойчива по начальным данным и правой части, и справедлива следующая оценка:

$$\left\|p_h^{n+1}\right\|^2 + 2\tau^{1-\nu_{n+\frac{1}{2}}} \Theta_{n+1} \le C\left(\left\|p_h^0\right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|f\|^2\right),$$

где $\nu_{n+\frac{1}{2}} \equiv \min\limits_{1 \le k \le n} \left\{\alpha_{n+\frac{1}{2}}, \beta_{n+\frac{1}{2}}, \gamma_{n+\frac{1}{2}}\right\}$,

$$\Theta_{n+1} = \frac{c_\phi}{2\Gamma\left(2 - \alpha_{n+\frac{1}{2}}\right)} \Theta_{n+1}^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{c_f}{2\Gamma\left(2 - \beta_{n+\frac{1}{2}}\right)} \Theta_{n+1}^{\beta_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\kappa}{2\Gamma\left(2 - \gamma_{n+\frac{1}{2}}\right)} \Theta_{n+1}^{\gamma_{n+\frac{1}{2}}},$$

$$\Theta_{n+1}^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}} \left\|p_h^{k+1}\right\|^2, \quad \Theta_{n+1}^{\beta_{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}^{\beta_{n+\frac{1}{2}}} \left\|p_h^{k+1}\right\|^2, \quad \Theta_{n+1}^{\gamma_{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{n} d_{n-k}^{\gamma_{n+\frac{1}{2}}} \left\|\nabla p_h^{k+1}\right\|^2.$$

Теорема 2. Пусть $\left\{p_h^i\right\}_{i=0}^N$, $p_h^i \in V_h$ Ц решение задачи 3. Тогда при $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in (0,1)$ для $p_h^{n+1} \in V_h$ и достаточно малых τ справедливо неравенство

$$\left\|p^{n+1} - p_h^{n+1}\right\| + \tau \sqrt{\frac{c_0}{T\Gamma\left(2 - \nu_{n+\frac{1}{2}}\right)}} \sum_{k=0}^{n} \left\|p^{n+1} - p_h^{n+1}\right\|_{H^1(\Omega)} \le C\left(h^2 + \tau^2\right).$$

где $c_0 = \min\limits_{1 \le k \le n} \left\{c_\phi d_{n-k}^{\alpha_{n+\frac{1}{2}}}, c_f d_{n-k}^{\beta_{n+\frac{1}{2}}}, \kappa d_{n-k}^{\gamma_{n+\frac{1}{2}}}\right\}$.

Выполнены вычислительные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты. Проведенный сравнительный анализ эмпирического и теоретического порядков сходимости показал эффективность предложенного подхода. Кроме того, изучено влияние переменных порядков дробных производных на поведение решения, что позволяет глубже понять физические процессы, моделируемые такими уравнениями.

Данное исследование выполнено при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант №AP19679550).

Литература

1. Zhao X., Zhong S.Z., Karniadakis G.E. Second-order approximations for variable order fractional derivatives: Algorithms and applications // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 293. pp. 184–200.

Элемент Рисса Одной Квадратурной Формулы

Болтаев А. К.

Международный Университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
boltaevaziz55@gmail.com

В настоящей работе с помощью метода Соболева решена первая часть задачи, т.е. найдено явное выражение квадрата нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi\left(x_\beta\right) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta-$ коэффициенты, $x_\beta(\in [0,1])-$ узлы формулы (1), $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(5,0)}(0,1)$. Норма функций в этом пространстве определяется следующим образом

$$\|\varphi\|_{W_2^{(5,0)}} = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(5)}\left(x\right) + \varphi\left(x\right)\right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi\left(x_\beta\right).$$

Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(5,0)}(0,1)-$ это вычисление следующей величины:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{W_2^{(5,0)*}} = \inf_{C_\beta} \|\ell\|_{W_2^{(5,0)*}}. \tag{3}$$

Погрешность формулы (1) является линейным функционалом в $W_2^{(5,0)*}(0,1)$, где $W_2^{(5,0)*}(0,1)-$ сопряженное пространство к пространству $W_2^{(5,0)}(0,1)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму функционала погрешности (2) в пространстве $W_2^{(5,0)*}(0,1)$, а затем нахождение минимума нормы (3) по коэффициентам C_β для фиксированных узлов x_β.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы $\|\ell\|_{W_2^{(5,0)*}}$ функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л.Соболевым [1,2].

Функция ψ_ℓ, для которой выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(5,0)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(5,0)}}$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности ℓ.

Имеет место

Теорема 1. Экстремальная функция ψ_ℓ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид:

$$\psi_\ell(x) = -\left(\ell * G_5\right)(x) + d_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{2} e^{-x\cos\frac{2\pi k}{5}} \left[d_{1,k} \cos\left(x \sin\frac{2\pi k}{5} \right) + d_{2,k} \sin\left(x \sin\frac{2\pi k}{5} \right) \right]$$

где $d_0, d_{1,k}$ и $d_{2,k}$ Ц произвольные действительные числа,

$$G_5(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{10} \cdot \left[\mathrm{sh(x)} + \sum_{k=1}^{4} e^{x\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{5}\right)} \cdot \cos\left(x \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) + \frac{\pi k}{5} \right) \right].$$

Кроме того, функционал погрешности (2), как показано в [3], удовлетворяет следующим условиям

$$(\ell, e^{-x}) = 0,\ \left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{5}} \cos\left(x \sin\frac{2\pi k}{5} \right)\right) = 0,\ \left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{5}} \sin\left(x \sin\frac{2\pi k}{5} \right)\right) = 0, \tag{4}$$

где $k = 1, 2$.

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение (ℓ, ψ_ℓ) с учетом условий ортогональности (4). Таким образом

$$\|\ell\|^2_{W_2^{(5,0)*}} = 2\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \int_0^1 G_5(x - x_\beta)dx -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta C_\gamma G_5(x_\beta - x_\gamma) - \int_0^1\int_0^1 G_5(x-y)dxdy,$$

где $G_5(x)$ определено в теореме 1.

Таким образом, первая часть задачи о построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(5,0)}(0,1)$ решена.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Н.: ИМ СО РАН, 1996.
3. A.K. Boltaev, A.R. Hayotov, Kh.M. Shadimetov. Construction of optimal quadrature formulas exact for exponentional-trigonometric functions by Sobolev's method. //Acta Mathematica Sinica, English series. 2021. Vol.37, №. 7, pp. 1066–1088.

Аппроксимации Решений Спектральной Задачи О Собственных Колебаниях Вращающейся Жидкой Сферической Оболочки И Их Применение В Моделировании Геодинамо

Водинчар Г. М., Фещенко Л. К.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия;
gvodinchar@ikir.ru

Задача геодинамо представляет собой задачу о магнитогидродинамической конвекции проводящей вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке Ω с твердыми границами. При численном исследовании этой задачи методом Галчркина возникает вопрос о выборе базисов для разложения полей задачи. Желательно, чтобы базисные моды определяли некоторые физически естественные для задачи пространственные структуры. Таким строением обладают собственные моды малых свободных колебаний полей.

Для поля скорости $\mathbf{v}$ соответствующая спектральная задача имеет вид

$$\lambda\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} - 2\mathsf{E}^{-1}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) - \nabla p = 0, \quad \nabla\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{1}$$

где λ – собственное значение, p – поле давления, E – число Экмана.

Аналитические решения задачи (1) и вид уравнений на собственные значения неизвестны. Известен лишь ряд классических результатов для невязкого случая (задача Пуанкаре) [1, 2], некоторые способы введения поправок на вязкость [1], общие свойства оператора задачи: дискретность спектра, полнота системы собственных и присоединенных функций (мод) [3]. Поэтому предлагается для построения галчркинских приближений скорости в задаче геодинамо использовать не сами эти моды, а их аппроксимации.

Аппроксимации строятся в виде линейных комбинаций собственных мод скорости *невращающейся* оболочки, т.е. решений спектральной задачи

$$\mu\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{2}$$

Эта задача самосопряженная, известны явные выражения для собственных мод и уравнения на собственные значения [3, 4]. Ортогональная система еч собственных мод полна.

Обозначим эти моды и собственные значения через $\mathbf{v}_j$ и μ_j, где $j = (type, k, n, m)$ – мультииндекс. Значение $type$ соответствует виду моды: тороидальная $type = T$ или полоидальная $type = P$. Индексы $k = 0, 1, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = -n, \ldots, n$ соответствуют дискретизации спектра задачи (3) в радиальном, широтном и долготном направлениях. Методика расчета параметров этих мод и собственных значений разработана и подробно описана в работе авторов [4]. С помощью расчета матрицы

оператора задачи (1) в базисе из мод задачи (2) выделены инвариантные подпространства этого оператора. Они являются линейными оболочками мод со следующими множествами мультииндексов:

$$
\begin{array}{l}
\{(T,k_0,1,0),(P,k_1,2,0),(T,k_2,3,0),(P,k_3,4,0),\dots\},\\
\{(T,k_0,1,0),(P,k_1,2,0),(T,k_2,3,0),(P,k_3,4,0),\dots\},\\
\{(T,k_0,|m|,m),(P,k_1,|m|+1,m),(T,k_2,|m|+2,m),(P,k_3,|m|+3,m),\dots\},\\
\{(P,k_0,|m|,m),(T,k_1,|m|+1,m),(P,k_2,|m|+2,m),(T,k_3,|m|+3,m),\dots\},\\
k=0,1,2,\dots,\quad m=\pm1,\pm2,\dots
\end{array}
\tag{3}
$$

Решения задачи (1) и их аппроксимации строятся в каждом из подпространств, определяемых этими множествами.

Пусть в одном из подпространств выделено конечное s-элементное множество мод $\mathbf{v}_j$, на основе которых будут строиться аппроксимации мод задачи (1), и пусть эти моды занумерованы в каком-либо порядке. В соответствии с этой нумерацией можно считать, что индекс $j = 1, 2, \dots, s$. Далее ищется приближенное решение задачи (1) в виде разложения $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_s\mathbf{v}_s$. Подстановка этого разложения в задачу (1) и применение галчркинской процедуры приводит к λ-параметрической системе уравнений

$$
\lambda x_k = \mu_k x_k + 2\mathsf{E}^{-1}\sum_{j=1}^{s} x_j \int_\Omega (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_j)\cdot\mathbf{v}_j\, dV, \quad k = 1, 2, \dots, s. \tag{4}
$$

Нахождение ненулевых решений системы (4) является задачей на собственные значения для матрицы линейного по $x_1, \dots, x_s$ выражения, стоящего в еч правой части. Методика расчета интегралов в (4) с использованием сочетаний символьных и численных вычислений в системах компьютерной алгебры подробно описана в [4].

После вычисления элементов матрицы находятся ее собственные значения и собственные векторы. Каждое собственное значение является аппроксимацией собственного значения задачи (1), а компоненты собственного вектора дают значения коэффициентов в аппроксимациях вида (5) для собственных мод.

Пусть для представления скорости в задаче геодинамо используются несколько аппроксимаций собственных мод, которые лежат в различных собственных подпространствах. Тогда в спектральной модели геодинамо, получаемой методом Галеркина, не будет кориолисова члена. Это позволяет на 5-6 порядков увеличить шаг интегрирования модели по времени. При этом исчезновение кориолисова члена не приводит к потере информации о вращении, которое необходимо для работы динамо, поскольку сама пространственная структура мод скорости содержит эту информацию.

Работа выполнена по государственному заданию ИКИР ДВО РАН (НИОКТР № 124012300245-2).

Литература

1. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

2. Резников Е.Л., Розенкноп Л.М. О гладких приближениях собственных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое // Вычислительная сейсмология. 1994. Т.27. С. 70–85.

3. Розенкноп Л.М., Резников Е.Л. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли // Вычислительная сейсмология. 1998. Т.30. С. 121–132.

4. Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System // Mathematics. 2023. vol.30. 3000.

Маршруты Траекторий Операторов Лотки-Вольтерры На Симплексе S^4

Ганиходжаев Р. Н. [1], **Эшмаматова Д. Б.** [2,3], **Муминов У. Р.** [4]

Национальный Университет Узбекистан, Ташкент, Узбекистан[1]

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан.[2]

Институт математики имени В.И.Романовского Академия Наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан[3]

Ташкентский институт управления и экономики, Ферганский кампус, Фергана, Узбекистан.[4]

rasulganikhodzhaev@gmail.com, 24dil@mail.ru, ulugbek.muminov.2020@mail.ru

Известно ([1]) что дискретные отображения Лотки-Вольтерры однозначно определяется заданием кососимметрической матрицы $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = -a_{ji}$, $i,\ j = \overline{1,m}$ и действуют на симплексе $S^{m-1} = \left\{ x \in R^m :\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \right\}$ по формулам

$$V : x_k^{'} = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i \right),\ k = 1, ..., m \tag{1}$$

при условии $|a_{ki}| \leq 1$. Мы определяем его как $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ ([2]).

Известно, что ([2]) для $x^0 \in S^{m-1}$ траектория $\left\{ x^{(0)} \right\}$ определяется рекуррентным соотношением

$$x^{(n+1)} \ = \ Vx^{(n)},\ \ n \ = \ 0,\ 1,\ ... \tag{2}$$

Рассмотрим отображение Лотки-Вольтерры $V : S^4 \to S^4$, имеющий следующий вид

$$V : \begin{cases} x_1^{'} = x_1(1 + a_1 x_3 - b_1 x_4 + c_1 x_5), \\ x_2^{'} = x_2(1 - a_2 x_3 + b_2 x_4 - c_2 x_5), \\ x_3^{'} = x_3(1 - a_1 x_1 + a_2 x_2), \\ x_4^{'} = x_4(1 + b_1 x_1 - b_2 x_2), \\ x_5^{'} = x_5(1 - c_1 x_1 + c_2 x_2). \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $e_1, ..., e_5$ вершины симплекса S^4. На ребрах биграфа отметим точки:
на $\Gamma_{12} = co\{e_1,\ e_2\}$ точки $M_1 \left(\frac{a_2}{a_1+a_2},\ \frac{a_1}{a_1+a_2},\ 0,\ 0,\ 0 \right),\ M_2 \left(\frac{b_2}{b_1+b_2},\ \frac{b_1}{b_1+b_2},\ 0,\ 0,\ 0 \right),$
$M_3 \left(\frac{c_2}{c_1+c_2},\ \frac{c_1}{c_1+c_2},\ 0,\ 0,\ 0 \right)$;
на $\Gamma_{34} = co\{e_3,\ e_4\}$ точки $N_1 \left(0,\ 0,\ \frac{b_1}{a_1+b_1},\ \frac{a_1}{a_1+b_1},\ 0 \right),\ N_2 \left(0,\ 0,\ \frac{b_2}{a_2+b_2},\ \frac{a_2}{a_2+b_2},\ 0 \right)$;
на $\Gamma_{45} = co\{e_4,\ e_5\}$ точки $K_1 \left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{c_1}{b_1+c_1},\ \frac{b_1}{b_1+c_1} \right),\ K_2 \left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{c_2}{b_2+c_2},\ \frac{b_2}{b_2+c_2} \right)$.

Порядок расположения точек $M_1,\ M_2,\ M_3$ на ребре Γ_{12} определяют динамические свойства траекторий отображения V. Рассмотрим все возможные случаи.
1) Пусть $M_1 = M_2 = M_3$, тогда $a_1b_2 = a_2b_1,\ a_1c_2 = a_2c_1,\ b_1c_2 = b_2c_1$, следовательно, $N_1 = N_2$ и $K_1 = K_2$. Очевидно, что грани Γ_{12} и Γ_{345} состоят из неподвижных точек. В рассматриваемом $FixV = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345} \cup M_1N_1K_1$.

В данном случае имеется 4 сигнатуры $\delta_1 = (+--+-)\,,\ \delta_2 = (+-+-+)\,,\ \delta_3 = (-+-+-)\,,\ \delta_4 = (-++-+)$ и соответствующие им многогранники выглядят следующим образом

$$F_1 = co\,\{e_1,\, e_3,\, e_5, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,,\ F_2 = co\,\{e_2,\, e_3,\, e_5, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,,$$

$$F_3 = co\,\{e_1,\, e_4,\, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,,\ F_4 = co\,\{e_2,\, e_4,\, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,.$$

Заметим, что 4-х мерные многогранники $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$ имеют общую двумерную грань $M_1N_1K_1$. Эти многогранники смежные, если они имеют общую грань размерности равной 3.

Теорема 1. В рассматриваемом случае при $x^{(0)} \notin Fix\,(V)$ положительная траектория не сходится, отрицательная траектория сходится к некоторой точке из $M_1N_1K_1$. Определим маршрут траектории оператора V и V^{-1} :

$$V : F_1 \to F_3 \to F_4 \to F_2 \to F_1; \qquad V^{-1} : F_1 \to F_2 \to F_4 \to F_3 \to F_1.$$

Пусть $M_1 = M_3$, следовательно, $a_1c_2 = a_2c_1$. Если $a_1b_2 > a_2b_1$, то $b_1c_2 < b_2c_1$ и получаем следующее расположение точек $M_1N_1K_1$. В данном случае $Fix\,(V) = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{345}$. Здесь возможны 9 сигнатур:

$$\delta_1 = (+--+-)\,, \delta_2 = (+-+++)\,,\ \delta_3 = (+-+-+)\,,\ \delta_4 = (---+-)$$

$$\delta_5 = (--+++)\,, \delta_6 = (--+-+)\,, \delta_7 = (-+-+-)\,,\ \delta_8 = (-++++)\,,$$

$$\delta_9 = (-++-+)\,.$$

Соответствующие им многогранники:

$$F_1 = co\,\{e_1,\, e_3,\, e_5, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,,\ F_2 = co\,\{\, e_3,\, e_5, M_1,\, M_2,\, N_1,\, K_1\}\,,$$

$$F_3 = co\,\{e_2,\, e_3,\, e_5,\, M_1,\, N_1,\, K_1\}\,,\ F_4 = co\,\{e_1,\, M_1,\, N_1,\, N_2,\, K_1,\, K_2\}\,,$$

$$F_5 = co\,\{M_1,\, M_2,\, N_1,\, N_2,\, K_1,\, K_2\}\,, F_6 = co\,\{e_2,\, M_2,\, N_1,\, N_2, K_1,\, K_2\}\,,$$

$$F_7 = co\,\{e_1,\, e_4, M_1,\, N_2,\, K_2\}\,, F_8 = co\,\{e_4, M_1,\, M_2,\, N_2,\, K_2\}\,,$$

$$F_9 = co\,\{e_2,\, e_4,\, M_2,\, N_2,\, K_2\}\,.$$

Теорема 2. Если $x^{(0)} \in riS^4$, то любая положительная траектория сходится, причем начиная с некоторого n_0 имеем $x^{(n)} \in F_4 \cup F_5 \cup F_6$. Отрицательная траектория также сходится и $x^{(-n)} \in F_2 \cup F_5 \cup F_8$ начиная с некоторого номера.

Литература

1. Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А., Ганиходжаев Р.Н., Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки-Вольтерра с однородными турнирами. Известия высших учебных заведений. Прикладная Нелинейная Динамика. 2023, 30(6), 702-716.

2. Eshmamatova D. B.,Seytov Sh. J., Narziev N. B., Basins of Fixed Points for Composition of the Lotka-Volterra Mappings and Their Classification. Lobachevskii journal of mathematics. 2023, 44(2), 558-569.

Оптимальные Квадратурные Формулы Для Вычисления Интегралов Быстро Осциллирующих Функций

Шадиметов Х. М.[1,2,a], **Гуломов О. Х.**[2,3,b], **Элмуратов Г. Ч.**[1]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[3]Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", Ташкент, Узбекистан
[a]kholmatshadimetov@mail.ru; [b]otabek10@mail.ru

В настоящей работе методом периодизации функций будут построены оптимальные квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций.

Основным результатом работе является доказательство следующей теоремы

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_2^{(2)}(0,1)$, тогда следующая квадратурная формула

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)\,dx \cong \sum_{k=0}^{N} \overset{o}{C}_k(2)\, f(kh) + \mu\left(f'(1) - f'(0)\right)$$

функционалом погрешности

$$l_2(x) = \varepsilon_{[0,1]} e^{2\pi i\omega x} - \sum_{k=1}^{N} \overset{o}{C}_k(2)\,\delta(x-hk) - \mu\left(\delta'(x-1) - \delta'(x)\right)$$

является оптимальной, где

$$\overset{o}{C}_k(2) = \begin{cases} -A & \text{при} \quad k=0, \\ \overset{o}{C}_k(2) & \text{при} \ \ 1 \le k \le N-1, \\ \overset{o}{C}_N(2) + A & \text{при} \quad k=N, \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2\pi i\omega} - d(\omega, N, 2)\,\frac{e^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1},$$

$$\mu = \frac{1}{(2\pi i\omega)^2} - \ hd(\omega, N, 2)\,\frac{e^{2\pi i\omega h}}{(1-e^{2\pi i\omega h})^2}.$$

Здесь $\overset{o}{C}_k(2)$, $k = 1, 2, ..., N$ определяется из следующих формулы:

$$\overset{o}{C}_k(2) = d(\omega, N, 2)\, e^{2\pi i\omega kh}, \qquad k = 1, 2, ..., N,$$

$$d(\omega, N, 2) = \left(\frac{\sin \pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^4 \cdot \frac{3h}{\cos 2\pi\omega h + 2}, \qquad h = \frac{1}{N}, \quad N = 2, 3, ...$$

Теорема 2. Для квадрата нормы функционала погрешности $l_2(x)$ оптимальной квадратурной формулы справедлива следующая формула

$$\left\| \overset{o}{l}_2 | H_2^{(2)*} \right\|^2 = \frac{1}{\omega^4} \left[1 - \left(\frac{\sin \pi\omega h}{\pi\omega h}\right)^4 \frac{3}{\cos 2\pi\omega h + 2} \right].$$

Литература

1. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonomrtric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinb. 1928, 49, 38-47.

2. Н.П. Еручин, С.Л. Соболев, Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций. Прикладная математика и механика, №2, 1950, 193-196.

3. Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, B.B. Abdikayimov On an Optimal Quadrature Formula in a Hilbert Space of Periodic Functions// Algorithms 2022, 15, 344

4. Х.М. Шадиметов, О.Х. Гуломов Об одном новом методе построения составных оптимальных квадратурных формул// Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2021. - №6(36). – С. 1-9.

5. Хемминг Р.В. Численные методы. Москва: Наука, 1968. -400с.

Коэффициенты Квадратурных Формул Для Быстроосцилирующих Интегралов

Шадиметов Х. М.[1,2], **Давлатова Ф. И.**[1]

Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз
shaxobiddin.qoziyev.89@gmail.com

Одной из важнейших задач вычислительной математики является построение оптимальных квадратурных формул дифференцируемых функций в различных пространствах для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов.

Построение оптимальных (в определенном смысле) методов приближенного вычисления интегралов сильно осциллирующих функций интересная и важная область компьютерной технологии и математики, поскольку много важных задач, решаемых на практике (например, цифровая обработка сигналов, обработка изображений, радиолокация, медицинская электроника, компьютерная томография и т. д.), требуют вычисления таких интегралов. В нашей работе мы также рассматриваем построение оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов.

Предположим, что производная первого порядка функции $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, интегрируется по квадрату производной второго порядка и является комплекснозначной функцией с действительными аргументами.

Набор таких функций образует гильбертово пространство $L_2^{(2)}(0,1)$. Скалярное произведение двух функций φ и ψ в этом пространстве определяется равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi''(x)\ \overline{\psi}''(x)dx,$$

где $\overline{\psi}$ является сопряженной функцией к функции ψ. Норма функции φ соответственно определяется формулой

$$\left\| \varphi | L_2^{(2)}(0,1) \right\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi''(x)\, \overline{\varphi}''(x)\, dx.$$

В этом пространстве рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\, \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} d_1[\beta]\, \varphi'(h\beta), \tag{1}$$

где $e^{2\pi i\omega x}$ – весовая функция, $[\beta] = (h\beta)$, $h = 1/N$, N – натуральное число, $i^2 = -1$, $\omega \neq 0$. $d_0[\beta]$, $d_1[\beta]$ – коэффициенты квадратурной формулы (1). Здесь $d_0[\beta]$ – оптимальные коэффициенты квадратурной формулы

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d_0[\beta]\, \varphi(h\beta)$$

при $\omega h \in \mathbb{Z}\ \omega \neq 0$ в пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ и имеют вид

$$d_0[0] = -\frac{1}{2\pi i\omega},$$

$$d_0[\beta] = 0, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_0[N] = \frac{1}{2\pi i\omega},$$

а коэффициенты $d_1[\beta]$ в (1) неизвестные коэффициенты квадратурной формулы.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. При $\omega h \in \mathbb{Z}$ и $\omega \neq 0$ коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вида (1) в смысле Сарда пространства $L_2^{(2)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$d_1[0] = -\frac{1}{(2\pi\omega)^2},$$

$$d_1[\beta] = 0, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_1[N] = \frac{1}{(2\pi\omega)^2}.$$

Литература

1. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, vol. 49, pp. 38-47.

Дискретные модели круговорота фосфора и углевода в экосистеме

Д.Б.Эшмаматова [1,2], **М.А.Таджиева** [1,2], **К.А. Солижанова** [2]

[1]Институт математики им. В.И. Романовского РАН,
Академия наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Узбекистан

[2]Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан,
Ташкент, Узбекистан

24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, kamolasolijanova@gmail.com

Живые организмы и биосфера в целом состоят из тех же химических элементов, которые содержатся в окружающей среде. Для синтеза биомассы необходимо около 40 элементов, из которых наиболее важными являются углерод, азот, кислород, водород, фосфор и сера. Они называются биогенными элементами. Все остальные химические элементы находятся в рассеянном состоянии. Известно [1], что термин биосфера введен в 1875 году австрийским геологом Э.Зюссом. Он рассматривал биосферу главным образом - как топологическое образование, т.е. пространство, заполненное жизнью. В.И.Вернадский (1863-1945) используя данный термин, создал науку с аналогичным названием.

В этой работе мы предлагаем модель элементов живой материи, поступающих из окружающей среды, проходящих через ряд организмов, которые снова возвращаются во внешнюю среду, а затем вновь включаются в состав живой материи.

Мы предлагаем модель, основанную на отображениях Лотки-Вольтерры, действующие в четырехмерном симплексе с однородными турнирами. Для более детального исследования рассматриваемых отображений построим и проанализируем карты неподвижных точек, согласно структуре, которой можно представить циклы углерода и фосфора.

Пусть квадратичное отображение $(m-1)$–мерного симплекса S^{m-1} в себя определяется соотношениями [2]:

$$x_k^{'} = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \quad k = \overline{1,m}. \tag{1}$$

где

$$a_{ki} = -a_{ik} \quad |a_{ki}| \leq 1, \quad k,i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение Лотки-Вольтерры, заданный равенствами (1), действующий в четырехмерном симплексе. В таком случае это отображение и соответствующий ему турнир (см. Рисунок 1) имеют вид [3]:

$$V : \begin{cases} x_1^{'} = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x_2^{'} = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5), \\ x_3^{'} = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x_4^{'} = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x_5^{'} = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases} \tag{3}$$

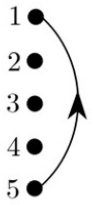


Рис.1.

Для отображения Лотки-Вольтерры, которое имеет вид (3), нами построены карты неподвижных точек и изучены их спектры. В этом же работе мы предлагаем рассматривать это отображение как дискретную модель для исследования круговорота биогенов в экосистеме. Как мы видим из рисунка 1, в турнире есть три сильных подтурнира- $\overline{125}, \overline{135}, \overline{145}$, объясним их в терминологии экосистемы:

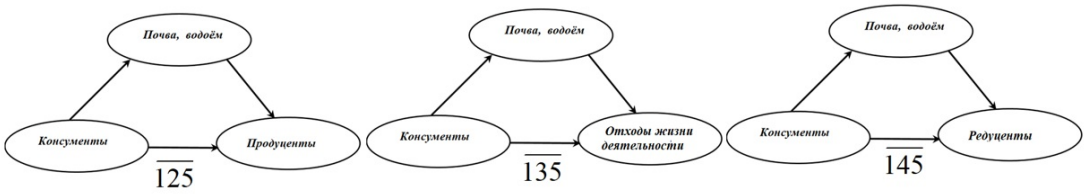


Рис.2.

Карта неподвижных точек для этого отображения в зависимости от знака главных миноров четвертого порядка может иметь один из двух видов, это – циклическая тройка или же транзитивная тройка.

Первый тип карты, т.е. сильная тройка соответствует описанию углеродного цикла.

Второй тип карты – это транзитивная тройка, соответствует циклу фосфора.

Теорема 1. Если в карте существует циклическая тройка, то существует внутренняя неподвижная точка с пятью и более ненулевыми координатами.

Теорема 2. Если в карте существует транзитивная тройка, тогда не существует внутренняя неподвижная точка с пятью и более ненулевыми координатами.

References

1. Kot M. Elements of Mathematical Ecology. Cambridge University Press, Cambridge. Uk. 2001. P. 464.
2. Tadzhieva M.A., Eshmamatova D.B. and Ganikhodzhaev R.N. Volterra-type quadratic stochastic Operators with a Homogeneous Tournament. Journal of Mathematical Sciences 2024; 278 (3): 546–556.
3 Seytov Sh.J. and Eshmamatova D.B. Discrete Dynamical Systems of Lotka-Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem. Lobachevskii Journal of Mathematics 2023; 44 (4): 1471-1485.

Алгоритм Построения Оптимальных Конечно-Разностных Формул В Гильбертовом Пространстве

Шадиметов Х. М.[1,2,a], **Каримов Р. С.**[2,3,b]

[1]Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан;
[2]Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
[3]Бухарский государственный технический университет, Бухара, Узбекистан
[a]kholmatshadimetov@mail.ru; [b]roziq.s.karimov@gmail.com

Аннотация. В этой работе приводятся задачи построения конечно-разностных формул в гильбертовом пространстве, т.е. постановка задач построения конечно-разностных формул с использованием функциональных методов. В работе приводятся функциональная постановка задачи оптимизации конечно-разностных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Здесь будут найдены представления оптимальных коэффициентов явных конечно-разностных формул типа Адамса на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ для любого $m \geq 3$.

Рассмотрим задачу построения конечно-разностных формул [1]

$$\sum_{\beta=0}^{k} C_\beta \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^{k} C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta) \cong 0\,.$$

Здесь C_β и $C_\beta^{(1)}$ коэффициенты конечно-разностных формул. Класс рассматриваемых задач определяется заданием класса $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, т.е. мы рассмотрим функции

$\varphi(x)$ из класса вещественных функций в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется по формуле [2]

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + \psi^{(m-1)}(x)\right) dx.$$

Для представления оптимальных коэффициентов конечно-разностных формул типа Адамса справедливы следующие теоремы [3,4].

Теорема 1. *Для представления оптимальных коэффициентов* $\overset{\circ}{C}{}_{\beta}^{(1)}$, $\beta = 1, 2, \ldots, k-2$ *явных конечно-разностных формул (1) типа Адамса на классах* $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ *при* $m \geq 3$ *справедлива следующая формула*

$$\overset{\circ}{C}{}_{\beta}^{(1)} = \sum_{j=1}^{m-2} \left(M_j \cdot \lambda_j^{\beta} + N_j \lambda_j^{k-\beta}\right) \quad \textit{при} \ \beta = 1, 2, \ldots, k-2,$$

здесь λ_j *- корни полинома* $P_{2m-4}(\lambda)$ *степени* $2m-4$, $|\lambda_j| < 1$, M_j *и* N_j *неизвестные параметры.*

Теорема 2. *Коэффициенты* $\overset{\circ}{C}{}_0^{(1)}$ *и* $\overset{\circ}{C}{}_{k-1}^{(1)}$ *оптимальных явных конечно-разностных формул (1) типа Адамса на классах* $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ *при* $m \geq 3$*выражаются следующими представлениями:*

$$\overset{\circ}{C}{}_0^{(1)} = \frac{e^h - he^h - 1}{he^h(e^{hk-h}-1)} + \frac{1}{e^{hk-h}-1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j\lambda_j)(1-\lambda_j^{k-2})\lambda_j}{1-\lambda_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_j(e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1)\lambda_j e^h + N_j(\lambda_j^{k-2}e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j)\lambda_j^2 e^h}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1)} \right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}_{k-1}^{(1)} = \frac{he^{hk} - e^h + 1}{he^h(e^{hk-h}-1)} - \frac{e^{hk-h}}{e^{hk-h}-1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j\lambda_j)(1-\lambda_j^{k-2})\lambda_j}{1-\lambda_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_j(e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1)\lambda_j + N_j(\lambda_j^{k-2}e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j)\lambda_j^2}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1)e^{hk-2h}} \right].$$

Литература

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. // - Москва, Издательство Мир. 1969. - С. 369.

2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. // - М, 1974, - С. 808.

3. Shadimetov Kh.M., Karimov R.S., Optimization of Adams-type difference formulas in Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ // Journal of Computational Analysis and Applications, 2024, no. 1, vol. 32, pp. 300-319.

4. Shadimetov Kh.M., Karimov R.S., Optimal coefficients of an implicit difference formula in the Hilbert space // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004, 060030

Математическая Модель Одной Задачи Уравнений Параболического Типа Математической Физики

Ш. Каюмов[1], Ш.Э. Бекчанов[1], Ш.С. Зиядуллаева[1], А.А.Худойбердиев[1]
[1]ТГТУ, Ташкент, Узбекистан ; sherzodbekjonov@gmail.com

Известно что задачи фильтрации нелинейных неньютоновских флюидов относятся к параболичес-кому типу уравнений математической физики.

В этом направление существует исследовательские работы [1-2], где рассмотрены различные виды законов движение и их соответствующих математических моделей [3-4].

Среди этих законов, наибольшей интерес представляет вариант криволинейного закона фильтрации, учитывающие нелинейности движения, в области малых градиентов давления [3] и она адекватно описывает физическую характеристику пласта при фильтрации неньютоновских флюидов. Рассмотрим несвязанную двух пластовую пористую среду, и считаем что они насыщенно флюидами имеющие аномальные характеристики.

Предполагаем, что связь между этими пластами осуществляется через единый ствол скважин.

Математическая модель этой задачи формулируется так: необходимо найти непрерывные функции $U(x,t)$, $V(x,t)$ и подвижные границы $R(x,t)$, $S(x,t)$ из следующей начально Ц краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1(x,t)\left(1-\frac{\overline{\gamma}_0\cdot\beta_1}{|\nabla U_1|}\right)\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)=M_1(x,t)\frac{\partial U_1}{\partial t},\quad x\in(x_0;R_1(x,t))\,,\ t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\Phi}_1(x,t)\left(|\nabla U_1|-\beta_1\right)\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)=M_1(x,t)\frac{\partial U}{\partial t},\quad x\in(R_1(x,t);L_1)\,,\ t>0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_2(x,t)\left(1-\frac{\overline{\gamma}_1\beta_2}{|\nabla U_2|}\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)=M_2(x,t)\frac{\partial U_2}{\partial t},\quad x\in(x_0;R_2(x,t))\,,\ t>0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\Phi}_2(x,t)\left(|\nabla U_2|-\beta_2\right)\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)=M_2(x,t)\frac{\partial U_2}{\partial t},\quad x\in(R_2(x,t);L_2)\,,\ t>0, \tag{4}$$

Начальные условие

$$U_1(x,0)=U_2(x,0)=\psi_0(x),\ R_1(x,0)=R_{10},\ R_2(x,0)=R_{20}. \tag{5}$$

условия на подвижных границах

$$\left|\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=R_1-0}=\left|\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=R_1+0}=\beta_1,\ U_1(x,t)|_{x=R_1-0}=U_1(x,t)|_{x=R_1+0}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=R_2-0}=\left|\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=R_2+0}=\beta_2,\ U_2(x,t)|_{x=R_2-0}=U_2(x,t)|_{x=R_2+0}, \tag{7}$$

А также условия на границах области

$$\lambda_1\Phi_1(x,t)\left(1-\frac{\overline{\gamma}_0\beta_1}{|\nabla U_1|}\right)\left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=x_0}+\lambda_2\Phi_2(x,t)\left(1-\frac{\overline{\gamma}_0\beta_2}{|\nabla U_2|}\right)\left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\varphi(t), \tag{8}$$

$$\lambda_3\overline{\Phi}_1(x,t)\left(|\nabla U_1|-\beta_1\right)\left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=L_1}=0,\qquad \lambda_4\overline{\Phi}_2(x,t)\left(|\nabla U_2|-\beta_2\right)\left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=L_2}=0. \quad (9)$$

где в задаче (1) Ц (9): $\Phi_1(x,t)=k_1H_1/\mu_1$, $\overline{\Phi}_1(x,t)=k_1H_1/\nu_1$, $\Phi_2(x,t)=k_2H_2/\mu_2$, $\overline{\Phi}_2(x,t)=k_2H_2/\nu_2$, $\overline{\gamma}_0=(1-0,414235\cdot\mu_1/\nu_1)$, $\overline{\gamma}_1=(1-0,414235\cdot\mu_2/\nu_2)$, где коэффициенты $k_1,k_2,\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2,H_1,H_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ аналогичны что и в работах [4-7]. Функция $\varphi(t)$ выражает суммарную объема добычи флюида в точке $x=x_0$ выходящие из двух пластов. Задача (1) Ц (9) решается методами итерации и потокового варианта метода разностных сеток [6-7]. Разработанные вычислительные алгоритмы апробирован на тестовых данных.

Част результатов приведена на рис 1, где дано кривые изменение давлений в одной пласте для следующих значений параметров $k_1=k_2=0,15$, $H_1=H_2=15$, $\varphi(t)=0,08560$, $\beta_1=\beta_2=10^{-3}$, $m=0,2$, $\Delta x=0,01$, $\Delta t=0,05$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$, $\psi_0=1$, $L_0=0$, $S_0=0$. В таблице приведены значение границ подвижных зон по

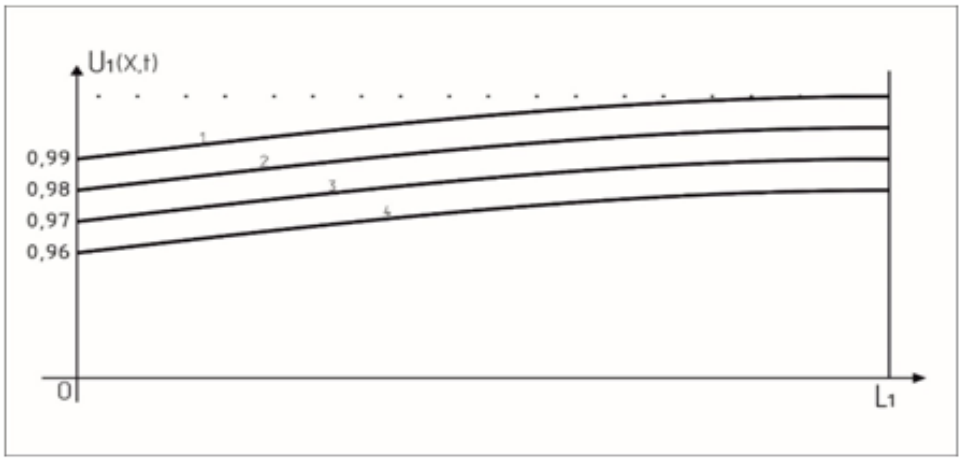


Рис. 2: Кривая изменений давления первого пласта по времени.

времени. Эти результаты показали возможности использование рассмотренной моде-

Гран./t	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$\mathbf{R_1}$	0,164	0,168	0,171	0,204	0,209	0,215
$\mathbf{R_2}$	0,151	0,158	0,162	0,190	0,198	0,210

ли для определение геологических и промысловых данных месторождений флюидов имеющие схожие геометрии с рассмотренной задачи.

Literature

1. Молокович Ю.М., Скворцов Э.В. Одномерная фильтрация сжимаемой вязко пластичной жидкости. Казань: Изд-во КГУ, 1971 г.

2. Филлипов А.Н., Зеленова М.А. Некорректность задачи о поле давления в слоисто неоднородном пласте при заданном отборе. Материалы международной конференции hСовременные проблемы математической физики". Стерлитамак. 2021. с.118-124.

3. Каюмов Ш. Численное моделирование задачи фильтрации вязкопластических флюидов при различных законах движения // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР. 1987.с. 139-145.

4. Филипов А.И., Губаидуллин М.Р. Конечно разностный расчеты полей скорости в несовершенно вскрытом пласте . Материалы международной научной конференции , Y Современные проблемы математики и физики Ұ. Том 2. УФА . РИЦ БашГУ. 2021г. с. 186-190.

5. Sh.Kayumov, AG.Arzikulov, Sh.Bekchanov, Sh.Zuyadullayeva.A multiparametr mathe matical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media. Journal of Physics Conference Series (2697), 2024.pp.1-6. doi:10.1088/1742-6596/2697/1/012042.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. 1989. -484 с.

7. Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации нелинейных флюидов. Монография. LAP Lambert Academic Publishing Ru. 2024. 315 с.

Метод Разрешающих Функций Для Решения Задачи Преследования

Мамадалиев Н. А.[1], **Васиева Х. Г.**[2]

[1],[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
[1]m_numana59@mail.ru, [2]vasiyeva98@gmail.com

Постановка задачи. В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [1]

$$\dot{z}\,(t) = A\dot{z}\,(t-h) + Bz\,(t-h) + Cu(t) - Dv(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n, n \geq 1; A, B, C, D$ — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p), (n \times q)$, соответственно. h — фиксированное положительное число, т.е. величина запаздывания. $u(t) \in R^p$ — управление преследователя, $v(t) \in R^q$ — управление убегающего, соответственно. Упраления преследующего и убегающего игрока $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \rho,\ \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \sigma, \tag{2}$$

Измеримые функции $u = u(t), v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Начальным положением для преследования (1) является n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$.

Пусть в евклидовом протранстве R^n выделено терминальное множество M, имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, причем M_0 — линейное подпространство пространства R^n, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L, L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n.

Преследование начинается из начального положения $\varphi\,(\cdot)$ и считается законченным в момент времени $t = t(\varphi(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M. Цель убегаюшего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Пусть $K(t)$ — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E$, где E — единичная матрица порядка n; в) матричная функция $K(t-h)$ непрерывна на $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = A\dot{K}(t-h) + BK(t-h). \tag{3}$$

Матричная функция $K(t)$ удовлетворяющая условиям а)–г), может быть получена обычном методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Определение. *Будем говорить, что в игре (1),(2) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \le T < +\infty$, если существует функция $u(t,v)$, $0 \le t < +\infty$, $v \in R^q$, $u(t,v) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \le t < +\infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \le t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \le 1$ и траектория $z(t)$, $0 \le t < +\infty$, соответствующая управлениям $(u(t), v(t))$ уравнения (1) с учетом начального условия ($z(t) = \varphi(t)$, $-h \le t \le 0$,) попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.*

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1),(2) возможно завершение преследования за конечное время T.

Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L: $\pi : R^n \longrightarrow L$. Пусть τ — произвольное положительное число и $t \in [0, \tau]$.

Предположение *Существует число α, $0 \le \alpha < 1$, такое, что для всех положительных t выполняется включение $\pi K(t)DV \subset \alpha\pi K(t)CU$,* где $U = \{u \in R^p : \|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le 1,\}$ и $V = \{v \in R^q : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le 1,\}$ — единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot)$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = -\pi K(\tau - h)A\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)[A\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)]dt.$$

Введем вспомогательное многозначное отображение вида [2]:

$$\hat{W}(\tau, t, v) = \Big\{\lambda \in R : \Big[\lambda\Big(M_1 - \xi[\tau, \varphi(\cdot)]\Big) +$$

$$+\pi K(\tau - t)Dv\Big] \bigcap \sqrt{(1-\alpha)\lambda + \alpha\|v\|^2} \cdot \pi K(\tau - t)CU \ne \emptyset\Big\}, \tag{4}$$

где $(t, \tau, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Теперь с помощью вспомогательного многозначного отображения (4) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом: $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) = \sup \hat{W}(\tau, t, v)$, здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Теорема. *Полагаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1),(2). Предположим, что существует момент времени $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$ такой, что либо*

$\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] \in M_1$, либо $\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] \notin M_1$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство

$$1 - \inf\Big\{\int_0^{\tau_1} \lambda(\tau_1, \tau_1 - t, v(t), \varphi(\cdot))dt : \int_0^{\tau_1} \|v(t)\|^2 dt \le 1\Big\} \le 0.$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2), возможно завершение преследования за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Литература

1. Мамадалиев Н.А., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2021. №11. С. 21–33.

2. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. №4. С. 290 – 301.

Математическое Моделирование Распространения Волн Рэлея В Пористо-Упругих Полупространственных Средах

Матанов М. Ч.

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;
mm939011166@gmail.com

Волны Рэлея играют важную роль в таких дисциплинах, как сейсмология, геофизика и инженерия, особенно при изучении свойств грунтов, горных пород и других природных сред. В реальных условиях такие среды часто обладают пористостью, что требует учета взаимодействия твердого скелета и флюида, заполняющего поры. Это делает актуальным исследование распространения волн Рэлея в пористо-упругих полупространственных средах.

Волны Рэлея в упругой среде: В упругой среде волны Рэлея описываются уравнениями движения:

$$\mu\nabla^2 \mathrm{u} + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathrm{u}) = \rho\tfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}$$

где $\mathbf{u}$ - вектор смещения, λ и μ - упругие модули Ламе, ρ - плотность среды. Для полупространства $z \ge 0$ с границей $z = 0$ накладываются граничные условия отсутствия напряжений:

$$\sigma_{zz} = 0,\ \sigma_{xz} = 0 \text{ при } z = 0.$$

Решение задачи приводит к характеристическому уравнению, корень которого определяет скорость волн Рэлея.

Пористо-упругая среда. Теория Био: В пористо-упругих средах движение описывается системой уравнений Био, учитывающих смещение твердого скелета $\mathbf{u}$ и относительное смещение флюида $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$, где $\mathbf{U}$ - смещение флюида, ϕ - пористость. Для низкочастотного диапазона, когда вязкость флюида пренебрежимо мала, уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\mathrm{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathrm{u}) + Q\nabla(\nabla\cdot\mathrm{w}) = \rho\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}, \\ Q\nabla(\nabla\cdot\mathrm{w}) + R\nabla(\nabla\cdot\mathrm{w}) = \rho_f\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{\phi}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

где $\rho = (1-\phi)\rho_s + \phi\rho_f$ - средняя плотность, ρ_s и ρ_f - плотности скелета и флюида, Q и R - коэффициенты, описывающие упругое взаимодействие между скелетом и флюидом.

Математическая модель: Для полупространства $z \geq 0$ с границей $z = 0$ предполагается, что волны Рэлея распространяются вдоль оси x. Решение ищется в виде:

$$\mathrm{u} = \mathrm{U}(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \mathrm{w} = \mathrm{W}(z)e^{i(kx-\omega t)},$$

где k - волновое число, ω - круговая частота. Граничные условия на свободной поверхности:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = 0, \\ \sigma_{xz} = 0, \quad \text{при } z = 0, \\ p_f = 0. \end{cases}$$

где σ_{zz} и σ_{xz} - компоненты тензора напряжений в скелете, p_f - давление во флюиде.

Подстановка в уравнения Био приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{U}(z)$ и $\mathbf{W}(z)$, решение которой определяет структуру волн Рэлея.

Аналитическое решение: Аналитическое решение задачи затруднено из-за наличия нескольких мод волн (быстрой и медленной) и сложной зависимости от параметров среды. Характеристическое уравнение, получаемое из граничных условий, как правило, решается численно для нахождения скорости волн Рэлея.

Численные методы: Для решения системы уравнений используется метод граничных элементов (МГЭ), который эффективен для задач с сложными граничными условиями. Алгоритм включает:

1. Дискретизацию полупространства на конечные элементы.
2. Формулировку слабой постановки задачи.
3. Решение системы алгебраических уравнений для определения скоростей и структуры волн.

Численные эксперименты: Проведены эксперименты для различных значений пористости ϕ (от 0.1 до 0.4), упругих модулей λ и μ, а также плотности флюида ρ_f. Анализировались:

- Скорость волн Рэлея в зависимости от ϕ.
- Затухание волн с глубиной.
- Влияние свойств флюида на дисперсионные характеристики.

Результаты показывают, что в пористо-упругих средах существуют две моды волн Рэлея:

- Быстрая мода, близкая к волне Рэлея в упругой среде.
- Медленная мода, связанная с движением флюида в порах.

По сравнению с упругими средами, пористость снижает скорость волн и усиливает их затухание из-за диссипации энергии во флюиде. Эти особенности имеют практическое значение для сейсмической разведки и оценки устойчивости грунтов.

Разработанная математическая модель и проведенный численный анализ вносят вклад в понимание поведения волн Рэлея в пористо-упругих средах. Полученные

результаты могут быть использованы в геофизике и инженерии. Дальнейшие исследования могут учитывать вязкостные эффекты и неоднородности среды.

Список литературы

1. Crampin, S. (1981). A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media.

2. Kholmuradov A.E., Imomnazarov Kh.Kh. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media//Mathematical and Computer Modelling, V.45, Issues 3-4, 2007, pp. 270-280. (№1.Web of Science. IF=1.602)

3. Xolmurodov, A., Matanov, M., Quzratov, M. (2024, November). Propagation of harmonic plane waves in an elastic half-space. Field equations. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3244, №. 1). AIP Publishing.

Об Одном Задаче Простого Преследования С Импульсным Управлением

Адхамов Х. А.[1], Мустапокулов Х. Я.[2]

[1]Университет точных и социальных наук, Ташкент, Узбекистан;
[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
[2]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
[1]adxamovxasanboy2608@gmail.com, [2]m_hamdam@mail.ru

Пусть в пространстве R^n управляемый объект P, называемый преследователем, гонится за другим объектом E, называемом убегающим. Вектор состояния преследователя обозначим x, вектор состояния убегающего через y, соответственно. В настоящей работе рассматривается задача преследования-убегания, динамические возможности которых описываются уравнениями [1]

$$P: \ \ddot{x} + a\dot{x} = u, \ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = x_1, \tag{1}$$

$$E: \ \ddot{y} + a\dot{y} = v, \ y(0) = y_0, \ \dot{y}(0) = y_1, \tag{2}$$

где x, y, u, $v \in R^n$, $n \geq 2$, $a > 0$; x_0, y_0- начальные состояния объектов, а x_1, y_1 их начальные векторы скоростей. При этом требуется, чтобы $x_0 \neq y_0$ и $x_1 = y_1$.

В силу уравнений (1)-(2) каждые пары $(x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in U$, и $(y_0, v(\cdot))$, где $v(\cdot) \in V$, порождают траектории:

$$x(t) = x_0 + \frac{x_1}{a}(1 - e^{-at}) + \frac{1}{a}\int_0^t u(s)(1 - e^{-a(t-s)})ds,$$

$$y(t) = y_0 + \frac{y_1}{a}(1 - e^{-at}) + \frac{1}{a}\int_0^t v(s)(1 - e^{-a(t-s)})ds$$

соответственно. Тогда $x(t)-$ называется траекторией движения преследователя, а $y(t)-$траекторией движения убегающего.

Известно, что если функции управления игроков P и E зависят только от времени t, $t \geq 0$, то они не гарантируют решения игр преследования и уклонения. Таким образом, допустимые типы управлений предполагают наличие стратегий. Ниже мы приведем основные определения и понятия.

Введем обозначения

$$z(t) = x(t) - y(t),\ z(0) = z_0 = x_0 - y_0,\ \dot{z}(0) = z_1 = x_1 - y_1 \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) получаем следующую задачу

Предположим, что $\tau_i = i\Delta$, $i \in N_0 = N \cup \{0\}$, где $\Delta-$некоторый положительный период.

Классом допустимых управлений преследователя и убегающего игроков являются множество импульсных функции, которые выражаются при помощью дельта-функцией Дирака [2], [3], [4].

$$U_{Imp} = \left\{ u(\cdot) \Big| \, u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - i\Delta),\ u_i \in S_\rho,\ i \in N_0,\ t \geq 0 \right\},$$

$$V_{Imp} = \left\{ v(\cdot) \Big| \, v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - i\Delta),\ v_i \in S_\sigma,\ i \in N_0,\ t \geq 0 \right\},$$

где S_ρ, $S_\sigma-$ шары радиусов ρ и σ с центрами в начале координат, а ρ, $\sigma-$ неотрицательные фиксированные числа.

После подстановки в правую часть уравнения (3) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно теореме 1 [5, §1, гл.1] эта система имеет решение при любом начальном условии (3) причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in N$, где $N-$ множество натуральных чисел, а в моменты времени τ_i может иметь разрывы первого рода.

Для решения задачи преследования предположим, что в текущий момент времени t преследователю известны начальные параметры x_0, y_0, текущий момент времени t и значение управления убегающего $v(t)$.

Определение 1. *Пусть $\rho \geq \sigma$. Тогда в игре (U_{Imp}, V_{Imp}) функцию*

$$\boldsymbol{u}(z_0, v(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_i \delta(t - i\Delta), t \geq 0,\ \boldsymbol{u}_i = v_i - \lambda(z_0, v_i) e_0,\ i \in N_0, \tag{4}$$

назовем стратегией параллельного преследования (кратко П-стратегией) преследователя, где

$$\lambda(z_0, v_i) = \langle v_i, e_0 \rangle + \sqrt{\langle v_i, e_0 \rangle^2 + \rho^2 - |v_i|^2},\ e_0 = z_0/|z_0|,\ i \in N_0$$

$\langle v_i, e_0 \rangle-$ скалярное произведение векторов v_i, $i \in N_0$ и e_0 в R^n. Функцию $\lambda(z_0, v_i)$, $i \in N_0$ обычно называют разрешающей функцией.

Теорема 1. *Пусть $\rho - \sigma > a(|z_0| - l)$ в игре (U_{Imp}, V_{Imp}). Тогда П-стратегия (4) является выигрышной для преследователя в промежутке времени $[0, T]$, а гарантированные время T будет равно*

$$T = -\frac{1}{a} ln\Big(1 - \frac{a(|z_0| - l)}{\rho - \sigma}\Big).$$

Литература

1. Саматов Б.Т., Бойтиллаев Д.А. Задачи преследования-убегания при разнотипных ограничениях. Монография, 2019, 219 с.

2. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. №1. С. 212-224.

3. Абдуалимова Г.М., Мамадалиев Н.А., Тухтасинов М. Достаточные условия разрешимости задачи преследования при импульсном воздействии, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 63:7, 2023, С. 1073-1083.

4. Мустапокулов Х. Я., Мамадалиев Н. А. Построение п-стратегий в игре простого преследования-убегания с импульсным управлением // Вестник НУУз, 2024, 2/2.1, С. 164–175.

5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Об Одной Задаче Импульсного Преследования При Наличии Запаздывания

Мусурмонов Д. Н.[1], Мустапокулов Х. Я.[2]

[1]Университет точных и социальных наук, Ташкент, Узбекистан;
[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
[2]Международный университет Нордик, Ташкент, Узбекистан;
[1]dilxushmusurmonov97@gmail.com, [2]m_hamdam@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^m$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом [1, 2]

$$\dot{z} = Az(t) + Bz(t-h) + u(t) - v(t), \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $t \geq 0$, $h-$фиксированное положительное действительное число, A, $B-$постоянныn квадратные матрицы порядка $m \times m$, $u = u(t)-$управление игрока P (*преследователя*), $v = v(t)-$управление игрока E (*убегающего*). Структура управлений игроков будет оговорена ниже в каждом из рассматриваемых случаев.

Задача преследователя состоит в том, чтобы, определенным образом выбирая управление u, за конечное время вывести траекторию системы (1) на цилиндрическое терминальное множество M, которое имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0-линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M_1-выпуклое компактное подмножство подпространства L, $L-$ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^m$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^m$). Через $\pi-$обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L, $\pi : \mathbb{R}^m \to L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [1]; начальным положением для системы (1) задана m — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$, т.е.

$$\Big\{ z(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0],\ z(0) = \varphi(0) \in \mathbb{R}^m \setminus M \Big\}. \tag{2}$$

Для данного класса дифференциальных игр ставится задача сближения с терминальным множеством и последовательно рассматриваются три случая: импульсное

управление преследователя, импульсное управление убегаюего, а также импульсное управление обоих игроков. В троих случаях задача заключается в том, чтобы для данной начальной положении $\varphi(\cdot)$ определить условия, при выполнении которых при любом управлении $v(\cdot)$ из класса допустимых управлений убегающего игрока, можно будет построить управление $u(\cdot)$ из класса допустимых управлений преследователя так, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t \geq 0$, системы (1), исходящая из начального положения $\varphi(\cdot)$, выводилась за конечное время на терминальное множество M.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением (1), и предположим, что управления обоих игроков (как преследователя, так и убегающего) носят импульсный характер и имеют вид [3, 4]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i),\ v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i),\ i \in N \tag{3}$$

где выкторы скачков преследователя $u_i\,(i \in N)$ принадлежат компакту U, $U \subset \mathbb{R}^m$, а векторы скачков убегающего $v_i\,(i \in N)-$компакту V, $V \subset \mathbb{R}^m$, $\tau_i = i\Delta$, $i \in N$, $\Delta-$некоторый положительный период, $\tau_0 = 0$.

Согласно [5], если управления игроков имеют вид (3), то при любом начальным положением (2) система (1) имеет единственное решение, которое является абсолютно непрерывным на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in N$.

Условие 1 [3]. *Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, $n \in N$, $i = 1, ..., n$.*

Теорема 1. *Если для системы (1) при импульсном управлении игроков (3) выполнено условие 1, множества M_1 и U выпуклы, $N(\varphi(\cdot), \omega) < +\infty$ для начального состояния $\varphi(\cdot)$ и некоторого набора ω, то траектория системы (1) может быт приведена из начального состояния $\varphi(\cdot)$ на терминальное множество M в момент $\tau_{N(\varphi(\cdot),\omega)}$.*

Литература

1. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992, 384 с.

2. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х.Я, Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестн.Удмурдск.ун-та. Матем. Мех.Компьют.науки. 2023. Т.33. Вып.1. С. 103–118.

3. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. №1. С. 212-224.

4. Абдуалимова Г.М., Мамадалиев Н.А., Тухтасинов М. Достаточные условия разрешимости задачи преследования при импульсном воздействии, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 63:7, 2023, С. 1073-1083.

5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Разработка Цифровой Технологии В Нефтегазовых Месторождениях Республики Казахстан

Мухамбетжанов С. Т.[1], **Джанабекова С. К.**[2]
[1]КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан;
[2]КазНПУ им. Абая, Казахстан;

Работа посвящена дальнейшей разработке цифровой технологии для нефтегазовых месторождений. В течение более 30 лет проводятся исследования по созданию цифровой технологии под названием - «ИСАР» (Информационная система анализа разработки нефтегазовых месторождений Республики Казахстан (Information system for analysis of oil and gas field development in the Republic of Kazakhstan). По структуре состоит из основных трех блоков: геолого - промысловых данных (ГПД), инженерных моделей и математических моделей. В отличие от других цифровых технологий блок математических моделей основан на законы механики сплошной среды. При этом решаются не только прямые задачи, а также обратные задачи для восстановления технологических показателей эффективного пласта. Дело в том, что региональная система управления разработкой нефтегазовых месторождений в значительной степени связана с построением адекватной математической модели жидкости в пористой среде с уччтом достоверной информации о детальном строении залежи, с созданием комплекса технических средств, обработки информации об эффективном пласте и оптимального управления процесса его разработки.

Об Одном Высокоточном Методе Решения Обыкновенного Дифференциального Уравнения С Малым Параметром При Старшей Производной

Нормуродов Ч. Б.[1], **Муродов С. К.**[2]
Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
ch.normurodov@gmail.com, smurodov870@gmal.com

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon\frac{d^4u}{d\eta^4} - 2\frac{d^2u}{d\eta^2} + u(\eta) = f(\eta), \quad \eta \in (\eta_0, \eta_l), \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad u(\eta_l) = \frac{du}{d\eta}(\eta_l) = 0 \tag{2}$$

где ε - малый параметр.

Наличие малого параметра ε при старшей производной накладывает дополнительные требования к аппроксимационным свойствам применяемых численных методов. Этот факт особенно выявляется не только при исследовании динамики решения рассматриваемой задачи, но и динамики производных различного порядка. В качестве пробной функции для задачи (1)-(2) выберем функцию $u_{(l)}(\eta) = (1-\eta^2)^2 e^{\varepsilon\eta}$.

В данной работе для исследования динамики решений и их производных различного порядка предлагается применить спектрально-сеточный метод [1]. Перейдем к изложению алгоритма спектрально-сеточного метода для численного моделирования задачи (1)-(2). Для этого в интервале интегрирования введем сетку $\eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_N = \eta_l$ и получим N различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \cdots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \cdots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \quad j = 1, 2, \cdots, N-1.$$

Дифференциальное уравнение (1) на каждом из этих элементов принимает вид

$$\varepsilon \frac{d^4 u_j}{d\eta^4} - 2\frac{d^2 u_j}{d\eta^2} + u_j(\eta) = f_j(\eta), \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{3}$$

граничные условия (2) записываются в точках η_0 и η_M:

$$u(\eta_0) = \frac{du}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad u(\eta_M) = \frac{du}{d\eta}(\eta_M) = 0, \tag{4}$$

во внутренних узлах сетки потребуем непрерывность решения уравнения (3) и его производных до третьего порядка. Эти условия имеют следующий вид:

$$u_j^{(t)}(\eta_j) = u_{j+1}^{(t)}(\eta_j), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{5}$$

где t - указывает порядок производной.

Решение задачи (3)-(5) ищем в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода. Для этого каждый элемент сетки $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ отображаем на интервал $[-1, 1]$ с помощью следующей замены независимой переменной:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y, \quad m_j = \eta_j + \eta_{j-1}, \quad l_j = \eta_j - \eta_{j-1}, \quad j = 1, 2, \cdots, N, \tag{6}$$

где через l_j обозначена длина j-го элемента сетки. После выполнения преобразования (6) уравнения (3) принимают следующий вид:

$$\varepsilon \left(\frac{l_j}{2}\right)^4 \frac{d^4 u_j}{dy^4} - \left(\frac{l_j}{2}\right)^2 \frac{d^2 u_j}{dy^2} + u_j\left(\frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y\right) = f_j\left(\frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y\right), \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{7}$$

Из условий (4)-(5) имеем:

$$u(-1) = \frac{du}{dy}(-1) = 0, \; \left(\frac{l_j}{2}\right)^t \frac{d}{dy} u_j^t(+1) = \left(\frac{l_{j+1}}{2}\right)^t u_{j+1}^t(-1), \tag{8}$$

$$t = 0, 1, 2, 3; \; j = 1, 2, \cdots, N-1, \quad u_N(+1) = \frac{du_N}{dy}(+1) = 0.$$

Приближенное решение и правая часть задачи (7)-(8) на каждом из элементов сетки ищем в виде:

$$u_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n, \quad f_j\left(\frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y_l^{(j)}\right) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_i^{(j)}). \tag{9}$$

где $y_l^{(j)} = \cos\frac{\pi l}{p_j}, l = 0, 1, \cdots, p_j; j = 1, 2, \cdots, N$, где $T_n(y)$ - полиномы Чебышева первого рода, $y_l^{(j)}$ - их узлы, а p_j - количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на j-м элементе сетки.

Коэффициенты разложения $b_n^{(j)}$ для правой части f_j в (9) определяются следующим обратным преобразованием:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} f_j \left(\frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y_l^{(j)} \right) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, p_j,$$

$c_0 = c_{p_j} = 2, c_m = 1$ при $m \neq 0, p_j; j = 1, 2, \cdots, N; M = \sum_{j=1}^{N} (p_j + 1)$ - общее число полиномов.

В результате имеем систему алгебраических уравнений $Ax = b$
где $x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \cdots, a_{p_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_{p_2}^{(2)}, \cdots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \cdots, a_{p_N}^{(N)})$.

Literature

1. Ч.Б.Нормуродов, Об одном эффективном методе решения уравнения Орра - Зоммерфельда // Математическое моделирование. Москва, 2005. 9(17). С. 35-42.

Об Одном Высокоточном Прямом Методе Решения Эллиптических Уравнений

Нормуродов Ч. Б.[1], Зиякулова Ш. А.[2], Норматова М. М.[3]

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан;
ch.normurodov@gmail.com, shziyaqulova@gmal.com, moxiranormatova3@gmal.com

В результате аппроксимации краевых задач для эллиптических уравнений получается система линейных алгебраических уравнений. Матрица этой системе имеет большой порядок. В случае двух и трех измерений число уравнений может быть большим $\sim 10^4 \div 10^6$. Кроме того, матрица системы имеет много нулевых элементов (разреженной), специфическую (ленточную) структуру и, наконец, является плохо обусловленной матрицей, т.е. отношение наибольшего собственного значения матрицы к ее наименьшему собственному значению очень велико ($\sim 10^4 \div 10^6$). Эти особенности эллиптических уравнений требуют разработки специальных экономичных алгоритмов для их численного решения [1].

В настоящее время существуют два экономичных прямых метода для решения разностных краевых задач в случае уравнения Пуассона. Первый из них-метод декомпозиции или метод нечетно-четного исключения с факторизацией является модификацией метода исключения Гаусса. Второй метод- метод разделения переменных основан на использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для обоих методов справедлива следующая оценка числа арифметических операций Q, в случае двумерной задачи, $Q = O\left(N^2 \log_2 N\right)$, где $N-$число узлов по одному направлению. Кроме этих методов, имеется еще один прямой метод-метод матричной прогонки, однако этот метод требует $Q = O\left(N^4\right)$ арифметических действий и большую память для хранения промежуточных величин. Для численного решения эллиптических уравнений можно применять итерационные методы, однако число итераций в которых зачастую оказывается очень большим. По этой причине вопрос о точности и эффективности этих методов до сих пор остаются актуальной.

В данной статье для численного решения уравнений эллиптического типа предлагается применить метод предварительного интегрирования с полиномамы Чебышева первого рода [2]. Главным достоинством предлагаемого метода следует считать высокую скорость сходимости результатов расчѵта. Данный метод относится к классу прямых методов решения эллиптических уравнений.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y), \ -1 < x, \, y < 1, \tag{1}$$

при следующих краевых условиях

$$u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0. \tag{2}$$

Для численного моделирования задачи (1)-(2) применяем метод предварительного интегрирования. Для проверки порядка точности и сходимости метода воспользуемся методом пробных функций [1]. В качестве точного решения (пробной функции) задачи (1)-(2) выберем функцию

$$u_e = (1-x^2)(1-y^2)e^{A(\sin x + \sin y)}. \tag{3}$$

Основной суть метода предварительного интегрирования заключается в следующем: частные производные и правая часть уравнения (1) представляются в виде двойного конечного ряда по полиномам Чебышева первого рода с неизвестными коэффициентами разложения. Для полиномов Чебышева имеются дискретные формулы интегрирования как по переменной x, так и по переменной y. С применением этих формул уравнение (1) дважды интегрируется по каждым переменным и получается конечный ряд для решения задачи (1)-(2) с неизвестными коэффициентами разложения следующего виде:

$$u_a(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{ij}T_i(x)T_j(y) \tag{4}$$

где, $T_i(x), T_j(y)$ - полиномы Чебышева первого рода. Добавляя к уравнениям полученным дискретным преобразованием предварительного интегрирования, четыре краевые условия (2) записанные в виде конечного ряда (4), имеем систему линейных алгебраических уравнений $Ax = b$.

Решая данную систему определяются неизвестные коэффициенты разложения и подставляя их в ряд для приближенного решения (4) определяется решение задач (1)-(2).

Приведем результаты расччтов при конкретных числах полиномов Чебышева N, M в коллакационных узлах $x_l = \cos\frac{\pi l}{N}, l = 0, 1, \dots N$, $y_k = \cos\frac{\pi k}{M}, k = 0, 1, \dots M$ когда значение параметра $A = 3$.

Таблица Сравнение точного и приближенного решения

Результаты расччтов для точного решение $u_e(x,y)$							
A	N	M	l	k	Значения точного решения	Значения приближенного решения	Абсолютная погрешность
3	30	30	5	5	6.037386177771483	6.037386177771483	$1.331\dot{0}^{-14}$
			15	15	1.0000000000000018	0.999999999999999	$2.781\dot{0}^{-15}$

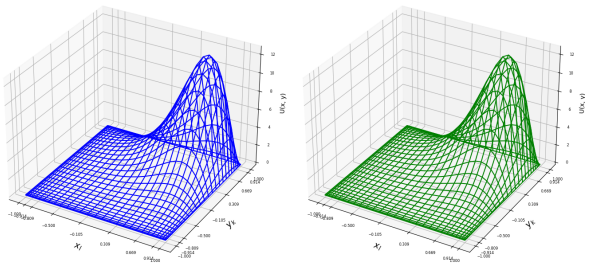


Рис. 3: а) точное решение u_e, б) приближенное решение u_a

Literature

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. 656с. М.:Наука, 1977.

2. Ch.B.Normurodov, Sh.A.Ziyakulova, Numerical modeling of elliptic type equations by a discrete variant of the pre-integration method, Problems of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, 2024, 61, №5, С.59–68.

Численное Решение Уравнения Спиновой Волны В Магнитах

Нуруллаев Ж. А.[1], **Бауетдинов А. А.**[2]

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г.Нукус, Узбекистан;
[1] njusipbay@mail.ru, [2] bawetdinovasqar2003@gmail.com

Многие задачи геофизики, океанологии, физики атмосферы и физики магнитоупорядоченных структур, связанные с распространением волн в сильнодисперсных средах, сводятся к линейным уравнениям в частных производных, неразрешимым относительно старшей производной по времени. Например, уравнение вращательных волн в магнитах, эти волны используются в таких областях, как магнонные устройства и спинтроника. Это явление характеризуется сложными дифференциальными уравнениями, которые часто невозможно решить аналитически. Поэтому основным инструментом их анализа являются численные методы, в том числе разностные схемы.

В работе рассматривается уравнение спиновых волн в магнетиках [2]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_1^2\right)\Delta_3 u(x,t)+\omega_2^2\Delta_2 u(x,t)=f(x,t), \tag{1}$$

где:

$$\omega_1=\gamma(H_0+\beta M_0),\quad \omega_2=\gamma\sqrt{4\pi M_0(H_0+\beta M_0)},$$
$$\gamma=\frac{ge|e|}{2mc},\quad \beta=\frac{K}{M_0^2},\quad M_0=m_0e_3,\quad H_0=H_0e_3.$$

Здесь K Ч константа, H_0 Ч внешнее магнитное поле, c Ч скорость света, e Ч заряд электрона.

Для численного решения применяется метод конечных разностей. Частные производные аппроксимируются разностными схемами [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2},$$

$$\Delta_3 u(x,t)\approx\frac{u_{i+1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2},$$

$$\Delta_2 u(x,t)\approx\frac{u_{i,j+1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}.$$

После дискретизации получаем разностное уравнение [1,3]:

$$\left(\frac{u_{i,j,k}^{n+1}-2u_{i,j,k}^n+u_{i,j,k}^{n-1}}{\Delta t^2}+\omega_1^2u_{i,j,k}^n\right)+\omega_2^2\left(\frac{u_{i+1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}\right)=f_{i,j,k}^n. \tag{2}$$

Это уравнение решается итеративно для каждой точки сетки.

Алгоритм численного решения:

1. Задание начальных условий $u(x,0)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}$.
2. Вычисление параметров ω_1 и ω_2.

3. Разбиение области на сетку.
4. Итеративное вычисление значений $u_{i,j,k}^{n+1}$.
5. Анализ решения и визуализация результатов.

Результаты численного моделирования показывают распространение спиновых волн в магнитных материалах. Исследуется влияние параметров β, M_0 и H_0 на характер распространения волн.

Метод конечных разностей позволяет эффективно моделировать спиновые волны в ферромагнитных материалах. Численный анализ данного явления важен для разработки новых спинтронных устройств и изучения фундаментальных свойств магнонных систем.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1990. - 616 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 С.
3. Москальков М.Н., Утебаев Д. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. – Ташкент, кФан ва технологиянь, 2012. – 160 с.

Численный Метод Для Модели Фильтрации На Основе Нелинейного Интегро-Дифференциального Уравнения В Частных Производных

Байгереев Д. Р.[1], Омариева Д. А.[2]

[1]Восточно-Казахстанский университет им.С.Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан,
e-mail: dbaigereyev@gmail.com
[2]Восточно-Казахстанский технический университет им.Д.Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан,
e-mail: Dinara_2205@mail.ru;

В работе предлагается эффективный численный метод решения начально-краевой задачи для связанной системы уравнений, состоящей из нелинейного параболического уравнения в частных интегро-дифференциалах и эллиптического уравнения с нелинейным членом.

Задача 1. Найти $\eta, \mathbf{u}$ и p в $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times \overline{I}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,$J = (0,\, T]$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nu(x)\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (a(x)\nabla\eta - b(\eta)\mathbf{u} + \mathbf{F}(\eta)) + \lambda_0(1-\nu(x))\left(\eta - \frac{\lambda}{\sigma}\int_0^t \eta e^{-\frac{t-\xi}{\sigma}} d\xi\right) = \zeta,$$

$$(x,t) \in \Omega \times J,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \varsigma(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times J,$$

$$-\mathbf{u} = k(x)\nabla p + \mathbf{f}(x,\eta), \quad (x,t) \in \Omega \times J,$$

и начальным и граничным условиям:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \eta(x,t) = \eta_d(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J,$$

$$\eta(x,0)=\eta_0(x), \quad x\in\overline{\Omega},$$

где λ_0, λ и σ - некоторые положительные константы; $\nu(x)$, $a(x)$, $b(\eta)$, $k(x)$, $\zeta(x,t)$, $\mathbf{F}(\eta)$, $\mathbf{f}(x,\eta)$ и $\varsigma(x,t)$ заданные функции; $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль, проведенная к границе $\partial\Omega$.

Построен следующий численный метод:

Задача 2. Пусть известны $\eta_h^j\in W_h$, $j=0,1,...,n-1$, в частности η_h^0 – L^2-проекция η_0. Найти $(\eta_h^n,\mathbf{u}_h^n,p_h^n)\in W_h\times\mathcal{U}_h\times M_h, n=1,2,...,N$, удовлетворяющие следующим тождествам для всех $w_h\in W_h,\mathbf{v}_h\in\mathcal{U}_h,q_h\in M_h$:

при $n=1$:

$$\frac{1}{\tau}\left(\nu\left(\eta_h^1-h_h^0\right),w_h\right)+\left(a\nabla\eta_h^1,\nabla w_h\right)+\left(1-\frac{\tau\lambda}{2\sigma}\right)\left(\nu_1\eta_h^1,w_h\right)+\left(\mathbf{F}\left(\eta_h^1\right),\nabla w_h\right)$$

$$=\frac{\tau\lambda}{2\sigma}e^{-\frac{t_n}{\sigma}}\left(\nu_1\eta_h^0,w_h\right)+\left(b\left(\eta_h^0\right)\mathbf{u}_h^1,\nabla w_h\right)+\left(\zeta^1,w_h\right),$$

$$\left(\nabla\cdot u_h^1,q_h\right)=\left(\varsigma^1,q_h\right),$$

$$\left(k^{-1}\mathbf{u}_h^1,\mathbf{v}_h\right)-\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,p_h^1\right)=\left(\mathbf{f}_1\left(\eta_h^0\right),\mathbf{v}_h\right)+\left(\mathbf{f}_2^1,\mathbf{v}_h\right),$$

при $n\geq 2$:

$$\frac{1}{2\tau}\left(\nu\left(3\eta_h^n-4\eta_h^{n-1}+\eta_h^{n-2}\right),w_h\right)+\left(a\nabla\eta_h^n,\nabla w_h\right)+\left(1-\frac{\tau\lambda}{2\sigma}\right)\left(\nu_1\eta_h^n,w_h\right)$$

$$+\left(\mathbf{F}\left(\eta_h^n\right),\nabla w_h\right)=\frac{\tau\lambda}{\sigma}\sum_{i=1}^{n-1}e^{-\frac{t_n-t_i}{\sigma}}\left(\nu_1\eta_h^i,w_h\right)+\frac{\tau\lambda}{2\sigma}e^{-\frac{t_n}{\sigma}}\left(\nu_1\eta_h^0,w_h\right)$$

$$+\left(\left(2b\left(\eta_h^{n-1}\right)-b\left(\eta_h^{n-2}\right)\right)\mathbf{u}_h^n,\nabla w_h\right)+\left(\zeta^n,w_h\right),$$

$$\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_h^n,q_h\right)=\left(\varsigma^n,q_h\right),$$

$$\left(k^{-1}\mathbf{u}_h^n,\mathbf{v}_h\right)-\left(\nabla\cdot\mathbf{v}_h,p_h^n\right)=\left(2\mathbf{f}_1\left(\eta_h^{n-1}\right)-\mathbf{f}_1\left(\eta_h^{n-2}\right),\mathbf{v}_h\right)+\left(\mathbf{f}_2^n,\mathbf{v}_h\right).$$

Теорема 1. Пусть $\{(\eta_h^n,\mathbf{u}_h^n,p_h^n)\}_{n=0}^N$, $\eta_h^n\in W_h$, $\mathbf{u}_h^n\in\mathcal{U}_h$, $p_h^n\in M_h$ – решение Задачи 2. Тогда $\eta_h^n\in W_h$, $n=1,2,...,N$ удовлетворяет неравенству

$$\|\eta_h^n\|+\tau\sum_{j=2}^{n}\left\|\eta_h^j\right\|_{H^1(\Omega)}\leq C\left\|\eta_h^0\right\|+C\tau\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\mathbf{f}_2^j\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\zeta^j\right\|+\left\|\varsigma^j\right\|\right)$$

для всех $\tau\leq\tau_1$ таких, что

$$\tau_1=\min\left\{\frac{a_*\left(\nu_*-\epsilon\right)}{16\left(F^*\right)^2},\frac{2\sigma\left(1-2\epsilon\right)}{\lambda\left(1+\epsilon\right)}\right\},\quad \epsilon>0$$

где $C>0$ – постоянная, не зависящая от τ.

Теорема 2. Пусть $\{(\eta_h^i,\mathbf{u}_h^i,p_h^i)\}_{i=0}^N$, $\eta_h^i\in W_h$, $\mathbf{u}_h^i\in\mathcal{U}_h$, $p_h^i\in M_h$ – решение Задачи 2 и $(\eta,\mathbf{u},p)$ – решение Задачи 1. Тогда $\eta_h^i\in W_h$ удовлетворяет неравенству

$$\|\eta^n-\eta_h^n\|+\tau\sum_{j=2}^{n}\left\|\eta^j-\eta_h^j\right\|_{H^1(\Omega)}\leq C\left(\tau^2+h^{m+1}+h^{l+1}\right)$$

для всех τ_2, таких, что

$$\tau_2 = \min\left\{\frac{a_*\left(\nu_* - \epsilon\right)}{16\left(F^{**}\right)^2}, \frac{2\sigma\left(1-4\epsilon\right)}{\lambda\left(1+\epsilon\right)}, \frac{2\sigma}{\lambda}\left(1-2\epsilon\right)\right\}, \quad \epsilon > 0$$

Кроме того, доказана сходимость итерационного процесса Ньютона. Теоретический порядок сходимости подтверждается численными тестами, проведенными для задачи с известным точным решением. Также представлен сравнительный анализ с результатами, полученными методом конечных разностей, предложенным в [1]. Построенный метод применен для исследования двухфазного неравновесного течения несжимаемой жидкости в пористой среде. Кроме того, приводятся два примера моделей, позволяющих прогнозировать поведение потока жидкости в пористой среде, которые сводятся к решению интегро-дифференциального уравнения, рассмотренного в данной статье.

Литература

1. Yermagambetov T.K. Algorithm for Numerical Implementation of a Filtration Model with a Generalized Nonequilibrium Law // Proc. Natl. Acad. Sci. Repub. Kazakhstan Phys.-Math. Ser. 2010. №. 2. pp. 94–96.

Исследование Динамических Режимов Дробного Осциллятора Ван Дер Поля-Эйри С Помощью Бифуркационных Диаграмм

Салимова А.И. [1], **Паровик Р. И.**[2]

[1] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

[2]Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия;

parovik@ikir.ru

В настоящей статье были исследованы с помощью бифуркационных диаграмм динамические режимы нелинейной колебательной системы Ван дер Поля-Эйри с эффектами наследственности. Особенностью этой колебательной системы заключается в наличии в модельном уравнении нелинейного трения, характерного для релаксационных колебаний осциллятора Ван дер Поля [1] и линейной зависимости частоты собственных колебаний от времени, характерной для колебаний с плохо затухающей амплитудой в осцилляторе Эйри [2], а также в учете эффектов наследственности, которые характерны для вязкоупругих и пластичных сред [3].

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x\left(t\right) + \lambda\left(ax^2\left(t\right) - b\right)\partial_{0t}^{\beta} x\left(t\right) + ctx\left(t\right) = \delta\cos\phi t, x\left(0\right) = x_0, \dot{x}\left(0\right) = y_0, \qquad (1)$$

где $x\left(t\right) \in C^2\left[0,T\right]$ — функция смещения; $t \in \left[0,T\right]$ — текущее время процесса; $T > 0$ — время моделирования; λ — коэффициент трения, a, b, c — заданные положительные константы, x_0, y_0 — заданные константы, которые определяют начальные условия.

Операторы дробных производных понимаются в смысле Герасимова-Капуто и имеют вид [4,5]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2\text{-}\alpha\right)}\int\limits_{0}^{t}\frac{\ddot{x}\left(\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}},\partial_{0t}^{\beta} x\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1\text{-}\beta\right)}\int\limits_{0}^{t}\frac{\dot{x}\left(\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{\beta}}.$$

Здесь $\Gamma\left(\cdot\right)$ — гамма-функция Эйлера.

Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором Ван дер поля-Эйри. Она описывает нелинейные автоколебания колебания с учетом наследственности.

Отметим, что в случае, когда в статьях автора был исследован дробный осциллятор Ван дер Поля-Эйлера: исследован численный алгоритм Адамса-Башфорта-Мултона, дана оценка вычислительной точности метода, построенны осциллограммы и фазовые траектории исследованы на устойчивость предельные циклы, разработан программный комплекс ABMVAFracSim для расчетов и визуализации [6,7].

В настоящей работе с помощью программного комплекса ABMVAFracSim были построены и исследованы бифуркационные диаграммы, которые отражают зависимость функции решения от значений ключевых параметров модели. Дана интерпретация результатов моделирования.

Работа выполнена в рамках Соглашения между Национальным университетом Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Федеральным государственным бюджетным научным учреждением «Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН» о сотрудничестве в области математических исследований (№1118 от 28 апреля 2022 г.), а также в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (регистрационный номер темы 124012300245-2).

Литература

1. Van der Pol B. LXXXVIII. On Yrelaxation-oscillationsY. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1926. vol. 2. №. 11. pp. 978-992.

2. Airy G. B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. Trans. Camb. Phil. Soc. 1838. no. 6. 379Ц402.

3. Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow: MIR Publishers. 1980. 387 p.

4. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. vol. 20. P. 790Ц809.

5. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica. 2017. vol. 52. P. 3043Ц3052.

6. Салимова А.И., Паровик Р.И. Математическая модель дробного осциллятора Ван дер Поля-Эйри // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2024. Т. 47, №2. С. 21-34. DOI 10.26117/2079-6641-2024-47-2-21-34.

7. Salimova A.I., Parovik R.I. Dynamic modes of the Van der Pol-Airy fractional oscillator // AIP conference proceedings, Samarkand, Uzbekistan, 02Ц03 мая 2024 года. Samakand: Samarkand State University, 2024. 020006. DOI 10.1063/5.0241421.

Динамческое Напряженно- Деформированное Состояние Трехслойной Вязкоупругой Цилиндрической Оболочки При Нагружении

Сафаров И. И.[1], Собиров С. Ж.[2], Мирзаева Г. Т.[2], Зарипов Б. Ш.[2]

[1]Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан;
safarov54@mail.ru

[2]Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан;
sobirovsobir5678@gmail.com
gulimirzoyeva1992@mail.com
begzodzaripov331@gmail.com

Рассматривается оболочка симметричного строения, у которой механические характеристики и толщины несущих слоев одинаковы. Для нормального нагружения контакт между оболочæками и заполнителем принят скользящим при двустороннем характере связи между ними. Не осесимметричное движение оболочки описывается следующими уравнениями.

$$L_{ijk}\overrightarrow{U}_{0k}-\int_0^t L_{ijk}R_{Ek}(t-\tau)\overrightarrow{U}_{0k}(\overrightarrow{r},\tau)d\tau=\frac{(1-v_{Ok}^2)}{G_{Ok}h_{Ok}}\overrightarrow{P_k}+\rho_{Ok}\frac{(1-v_{Ok}^2)}{G_{Ok}}\frac{\partial^2\overrightarrow{U}_{0k}}{\partial t^2}\ \ (k=1,2) \tag{1}$$

Здесь индекс $k=1$ относится к внутренней оболочке (или цилиндру), а $k=2$-к внешней оболочке,$\overrightarrow{U}_k$-вектор перемещения точек срединной поверхности несущего слоя.

Линейное уравнение движения заполнителя принимает вид:

$$\tilde{\mu}_c\nabla^2\overrightarrow{u}_c+(\tilde{\lambda}_c+\tilde{\mu}_c)grad\ div\overrightarrow{u}_c=\rho_c\frac{\partial^2\overrightarrow{u}_c}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $\overrightarrow{u}$-вектор перемещений; ρ-плотность среды; к - порядковый номер слоев,v-коэффициент Пуассона, которого считаем не релаксирующей величиной [1],

$$\tilde{\lambda}_k f(t)=\lambda_{ok}[f(t)-\int_0^t R_{\lambda k}(t-\tau)f(\tau)d\tau];\ \tilde{\mu}_k f(t)=\mu_{ok}[f(t)-\int_0^t R_{\mu k}(t-\tau)f(\tau)d\tau]; \tag{3}$$

здесь $\overrightarrow{r}(x,y,z,t)$; $R_{\lambda k}(t-\tau)$, $R_{\mu k}(t-\tau)-$ядра релаксации $\lambda_{ko},\mu_{ko}-$ мгновенные модули упругости; $f(t)-$ произвольная функция времени.

На контакте ставятся следующие условия

$$r=a_k:\sigma_{rzk}=\sigma_{r\theta k}=0;\ u_{rk}=w_k;\ \sigma_{rrk}=\pm q_{rk}$$

$$(k=1,r=a_1;\sigma_{rr1}=-q_{r1};k=2;r=a_2;\sigma_{rr2}=q_{r2};) \tag{4}$$

При рассмотрении задаче о распространении свободных затухающих волн, компоненты внешней нагрузки равны нулю: $p_{rk}=0,\ p_{ok}=0,p_{zk}=0$

Применяя в подвижной системе координат преобразование Фурье по η и раскладывая все функции в ряды Фурье по θ находим коэффициенты Фурье трансформанта нормальных нагрузок, которые передаются на заполнитель со стороны обшивок:

$$q_{rk,n}^0=-p_{k,n}^0-\frac{2G}{1-v}k^2f(k)\frac{u_{k,n}^0}{h} \tag{5}$$

Рассмотрим до резонансный режим движения. При этом для поæлучения численных результатов использовались конечные ряды Фурье . Результаты расчетов для перемещений приведены. приведено распределение безразмерных прогибов внешнего несущего слоя w^* по окружности в сечении $\eta = 0$ для воздействия сосредоточенных сил. В качестве ядра релаксации примем трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова– Ржаницына: $R_k(t) = Ae^{-\beta t}/t^{1-\alpha}$, с параметрами $A = 0,048;\ \beta = 0,05;\ \alpha = 0,10$ Расчеты проведеæны при следующих значениях безразмерных параметров:

$$k = 0,02;\ v = v_c;\ \gamma = 250;\ p^* = 12,5;\ k_s = 20;\ c_{01} = 0.05$$

В рассмотренном слуæчае оболочки со сплошным заполнителем, с удалением по окружæности от места приложения силы напряжения становятся растягиæвающими, что свидетельствует о возможности отставания несущего слоя от заполнителя. На рис. 1 показано распределение прогибов нагруженного внешæнего несущего слоя по окружности.

Таким образом, в рассмотренном слуæчае соосные оболочки со сплошным заполнителем, с удалением по окружæности от места приложения силы напряжения становятся растягиæвающими, что свидетельствует о возможности отставания несущего слоя от заполнителя.

Литература

1. Maiboroda, V.P., Safarov, I.I., Troyanovskii, I.E. Free and forced oscillations of a system of rigid bodies on inhomogeneous viscoelastic snubbers. Soviet Machine Science (English Translation of Mashinovedenie), 1983, (3), стр. 2531

2. Safarov I.I.,Teshaev M.,Toshmatov E.,Boltaev Z.,Homidov F. Torsional vibrations of a cylindrical shell in a linear viscoelastic medium// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, 883(1), 012190 https://iopscience.iop.org/issue 1757-899X/883/1

3. Mirsaidov, M.M., Safarov, I.I., Teshaev, M.K., Boltayev, Z.I. Dynamics of structural - Inhomogeneous coaxial-multi-layered systems cylinder-shells. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1706(1), 012033 doi:10.1088/1742-6596/1706/1/012033

4. Teshaev, M.Kh., Safarov, I.I., Mirsaidov, M.M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 13, 2, 104-115 (2019) DOI: 10.24874 / jsscm.2019.13.02.02.08

Оценка Изменения Плотности Потока Радона С Помощью Эредитарной Математической α-Модели До И После Сильного Землетрясения На Камчатке

Твёрдый Д. А.[1], **Макаров Е. О.**[2], **Паровик Р. И.**[1]

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия;
tverdyi@ikir.ru

Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук», г. Петропавловск-Камчатский, Россия;
ice@emsd.ru

Работы по исследованию связи динамики газа радона (^{222}Rn) с сейсмичностью ведутся во многих странах, расположенных в сейсмоактивных районах мира (Израиль, Индия, Япония, США, Китай, Россия). Для Камчатского края проблема сейсмичности имеет наивысший приоритет, так как полуостров Камчатка расположен в одном из наиболее сейсмоопасных районов Земли. Возможный путь для решения этой проблемы Ч создание эффективной системы прогнозирования на основе углубленного понимания процессов, происходящих в земной коре при подготовке будущего очага землетрясения.ґОдним из методов изучения таких процессов является мониторинг изменения концентрации газа ^{222}Rn в подпочвенном, атмосферном воздухе и в воде [1]. С этой целью на полуострове Камчатка развернута сеть пунктов мониторинга ^{222}Rn, существующая уже на протяжении более 20 лет [2]. Аномальные изменения ^{222}Rn могут служить предвестниковыми сигналами подготовки сильных землетрясений. Примеры таких аномалий и перспективность радонового метода опубликованы в многочисленных статьях, например [3].

В данном исследовании с использованием данных по объемной активности радона (ОАР) в камере с избыточным объемом на одном из пунктов Камчатской сети мониторинга подпочвенных газов показано изменение плотности потока радона (ППР) вследствие воздействия сейсмических волн и постсейсмической релаксации среды. В качестве модельного уравнения рассматривается линейное дробное уравнение [4]:

$$\theta^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\dot{\bar{A}}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = \lambda_0\left(1-\bar{A}(t)\right), \tag{1}$$

где $\Gamma(.)$ – гамма-функция Эйлера; $\theta = 1$ – некоторое характерное время процесса [5], [с]; $t \in [t_0, T]$ – время, рассматриваемого процесса, [с]; t_0 и $T > 0$ – начальный и конечный моменты времени, [с]; $\dot{\bar{A}}(\tau) = d\bar{A}(t)/dt$; $\bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}$ – ОАР в безразмерном виде, [отн.ед.]; $A(t)$ – ОАР, [Бк/м^3]; A_{max} – максимальное значение ОАР в данных, [Бк/м^3]; λ_0 – постоянная воздухообмена, [с$^{-1}$].

Изменение интенсивности переноса радона вследствие изменения состояния геосреды описывается с помощью дробной производной Герасимова-Капуто [6,7] постоянного порядка $0 < \alpha < 1$. Предположительно, порядок дробной производной связан с интенсивностью переноса ^{222}Rn в геосреде. Это происходит потому, что процесс массопереноса по своей природе является нелокальным и возникает лишь в тех системах, которые не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Поэтому часто возникают случаи, когда радон обладает высокой миграционной способностью [8]. Нелокальность по времени связана с понятием наследственности (памяти), а математический аппарат, описывающий еч, опирается на теорию интегро-дифференциальных уравнений [9] и уравнений с дробной производной [10,11].

С помощью метода Левенберга–Марквардта на основе экспериментальных данных ОАР решалась обратная задача [12] по определению оптимальных значений параметров модели (1): λ_0 – коэффициента воздухообмена и α – порядка дробной производной, позволившие решить задачи определения ППР [2]. Использованы данные во временной окрестности сильного землетрясения с $M_w = 7.0$, произошедшего в северной части Авачинского залива 17 августа 2024 г. В результате моделирования показано, что сильное сейсмическое воздействие и последующие процессы привели к изменению ППР в накопительной камере. Полученные модельные кривые хорошо согласуются с реальными данными, а полученные оценки согласуются с теорией.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №23-71-01050, https://rscf.ru/project/23-71-01050/.

Литература

1. Рудаков В.П. Эманационный мониторинг геосред и процессов. Москва.: Научный мир, 2009.

2. Фирстов П.П., Макаров Е.О. Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения. Петропавловск-Камчатский.: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018.

3. Cicerone R.D., Ebel J.E., Britton J. A systematic compilation of earthquake precursors //Tectonophysics. 2009. Vol.476, №3-4. p. 371–396.

4. Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber //Mathematics. 2023. Vol.11, №4. p. 850.

5. Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В. Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти //Письма в ЖТФ. 2022. Т.48, №7. С. 33–35.

6. Novozhenova O.G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union //FCAA. 2017. Vol.20, p. 790–809.

7. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena //Meccanica. 2017. Vol.52, p. 3043–3052.

8. Kristiansson K., Malmqvist L. Evidence for nondiffusive transport of 86Rn in the ground and a new physical model for the transport //Geophysics. 1982. Vol.47, №10. p. 1444–1452.

9. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. New York.: Dover Publications, 2005.

10. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam.: Elsevier Science Limited, 2006.

11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва.: Физматлит, 2003.

12. Твчрдый Д.А., Паровик Р.И. О задаче оптимизации для определения вида функциональной зависимости переменного порядка дробной производной типа Герасимова-Капуто //Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2024. Т.47, №2. С. 35–57.

Моделирование Эффектов Распространения Em Излучения Грозового Происхождения В Окрестности Участка Неоднородной Проводимости На Поверхности Земли

Твёрдый Д. А.[1], **Малкин Е. И.**[1]

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия;
tverdyi@ikir.ru

В статье представлены результаты компьютерного моделирования нестационарного процесса возмущений компоненты электрической составляющей электромагнитного (ЭМ) поля волновода Земля-Ионосфера на высотах от 0 до 90 [км] в очень низкочастотном диапазоне (ОНЧ) при прохождении зондирующего излучения в окрестности участков неоднородной проводимости Земли. В качестве зондирующего излучения рассматривается импульс ЭМ излучения с частотой 10 [кГц], имитирующий импульс от грозового разряда в атмосфере (1).

Предпосылкой к возникновению участка неоднородной проводимости на поверхности земли может быть подготовка или существование очага землетрясения (2). Полуостров Камчатка расположен в одном из наиболее сейсмоопасных районов Земли, поэтому для Камчатского края проблема сейсмичности имеет наивысший приоритет, и, как следствие, изучение процессов, связанных с подготовкой будущего очага землетрясения, а также электрических предвестников землетрясений.

Уравнения, описывающие распространение ЭМ волн в электронейтральной атмосфере, основаны на системе основных уравнений электромагнетизма (3). Для устранения нежелательных отражений, искажающих результаты при больших временах моделирования, используются фиктивные поглощающие среды типа PML (4). Уравнения, описывающие затухание ЭМ волн в PML средах, также основаны на системе основных уравнений электромагнетизма. В результате была предложена упрощенная математическая модель возмущений ЭМ поля в ОНЧ диапазоне над очагом подготовки землетрясения, имеющая вид начально-краевой задачи для системы уравнений:

$$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = (1/\overrightarrow{\varepsilon_a}) \left[\left(\nabla \times \overrightarrow{H} \right) - \overrightarrow{\sigma}_E \cdot \overrightarrow{E} - \overrightarrow{J}_F \right], \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} = (1/\overrightarrow{\mu_a}) \left[- \left(\nabla \times \overrightarrow{E} \right) - \overrightarrow{\sigma}_H \cdot \overrightarrow{H} \right]. \tag{1b}$$

с условиями (3) на границе L типа PEC образующий "зеркало"переизлучающее ЭМ волны обратно в область моделирования, как если бы $\overrightarrow{\sigma} \to \infty$:

$$\overrightarrow{n}_{e,L} \cdot \overrightarrow{E}\,(L,t) = \xi / \overrightarrow{\varepsilon}_a^{(L)}, \qquad \overrightarrow{n}_{e,L} \cdot \overrightarrow{H}\,(L,t) = 0 / \overrightarrow{\mu}_a^{(L)} = 0, \tag{2a}$$

$$\overrightarrow{n}_{e,L} \times \overrightarrow{E}\,(L,t) = 0, \qquad \overrightarrow{n}_{e,L} \times \overrightarrow{H}\,(L,t) = 0, \tag{2b}$$

вместе с начальными условиями вида:

$$\overrightarrow{E}\,(L,0) = \overrightarrow{E_{(0)}}\,(L), \qquad \overrightarrow{H}\,(L,0) = \overrightarrow{H_{(0)}}\,(L), \tag{2c}$$

где, L – граница раздела области моделирования и всего что за еҷ пределами; $\overrightarrow{E_{(0)}}\,(L)$, $\overrightarrow{H_{(0)}}\,(L)$ – заданные константные значения полей в начальный момент времени $t = 0$; причҷм $\xi > 0$; $\overrightarrow{n}_{e,L}$ – единичный вектор нормали к L; $\overrightarrow{\varepsilon}_a^{(L)}$ – значения ε_a на L.

Рассматривается 2-мерная задача на сечении плоскостью Oxy в декартовой системе координат $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$. Это обусловлено тем, что в нашем исследовании интерес представляют высотные распределения ЭМ импульса со временем, а также что возможные эффекты, вызываемые неоднородностью, мы будем наблюдать в вертикальной E_y компоненте. Далее 2-мерная задача решается численно методом Finite-Difference Time-Domain (FDTD) (5) на равномерной сетке с шагом по пространству: $\Delta x = \Delta y = 0.5$ [км], с шагом по времени $\Delta t \leq C_K \frac{\min(\Delta x, \Delta z)}{c}$ по условию (6), гарантирующему устойчивость решения, где c Ч скорость света в среде; $C_K = 1/\sqrt{3}$.

Область моделирования представляет собой прямоугольник в высоту $y = 90$ [км] и в длину $x = 1000$ [км], приччм кривизной поверхности земли можно пренебречь, если моделируется сравнительно малое расстояние ($x < r_E/3$), где $r_E = 6371$ [км].

Использование FDTD избавляет от необходимости специально применять граничные условия поля на границе L, достаточно просто задать параметры моделируемых сред ε_a и μ_a в каждой точке сетки FDTD, где существует компонента ЭМ поля. Преимущество в использовании метода FDTD в том, что задача моделирования сводится к корректному определению параметров сред: $\overrightarrow{\varepsilon_a}$ Ч абсолютная диэлектрическая проницаемость [Ф/м]; $\overrightarrow{\mu_a}$ Ч абсолютная магнитная проницаемость [Гн/м]; $\overrightarrow{\sigma}_E$ Ч удельная электрическая проводимость [См/м].

Проводимость $\overrightarrow{\sigma}_E$ атмосферного воздуха вблизи поверхности земли $2 \cdot 10^{-14}$, т. е. можно положить $= 0$. Для земли в поверхностном слое (нижний ряд вычислительной сетки) $\overrightarrow{\sigma}_E$ на 10Ц12 порядков больше, чем в атмосфере. В таком случае участок неоднородной проводимости земли можно задать в модели значениями ещч на 2Ц4 порядка выше. Размеры участка неоднородности (радиус влияния очага) могут быть от десятков до сотен [км].

Финансирование. Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. №НИОКТР 124012300245-2).

Литература

1. Альперт Я.Л., Гусева Э.Г., Флигель Д.С. Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля - Ионосфера. Москва.: Наука, 1967.

2. Копылова Г.Н., Гусева Н.В., Копылова Ю.Г., Болдина С.В. Химический состав подземных вод режимных водопроявлений Петропавловского геодинамического полигона, Камчатка: типизация и эффекты сильных землетрясений //Вулканология и Сейсмология. 2018. Т.12, №4. С. 43–62.

3. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва.: Наука, 1973.

4. Berenger J.P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems //IEEE Trans. on Anten. and Prop. 1996. Vol.44, №1. p. 110–117.

5. Taflove A., Hagness S.C. Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method. Massachusetts: Artech House Publishers, 2005.

6. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics //IBM journal of Research and Development. 1967. Vol.11, №2. p. 215–234.

Колебания Сферических Тел В Вязкоупругой Среде

[1]**Тешаев М.Х.**, [2]**Жалолов Ф.Б.**, [2]**Нарзуллоев М.**, [3]**Ибрагимова Д.А.**

[1] Бухарское отделение института Математики имени В.И. Романовского АН Р
muhsin-5@mail.ru

[2] Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан.
farruhjalolov2@mail.ru

[3]Самаркандский государственный. Университет, докторант каф. "Механика".

Рассматриваются колебания сферических тел, находящихся в деформируемой среде. Уравнения движения деформируемых (линейных упругих или вязкоупругих) сферических включений в бесконечной вязкоупругой среде имеют вид

$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) graddiv\,\overrightarrow{u} - \tilde{\mu}_j rotrot\,\overrightarrow{u} = \rho_j \frac{\delta^2 \overrightarrow{u}}{\delta t^2}, j = 1, 2 \tag{1}$$

где

$$\tilde{\lambda}_j \phi(t) = \lambda_{0j}[\phi(t) - \int_0^t R_{\lambda j}(t-\tau)\phi(t)d\tau]; \tag{2}$$

$$\tilde{\mu}_j \phi(t) = \mu_{0j}[\phi(t) - \int_0^t R_{\mu j}(t-\tau)\phi(t)d\tau];$$

$\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}_j$ -операторные модули упругости, $\varphi(t)$ -произвольная функция; ρ_j -плотность, $R_{\lambda j}(t-\tau)$ и$R_{\mu j}(t-\tau)$ -ядра релаксации и λ_{0j}, μ_{0j} -мгновенные модули упругости.

Принимаем интегральные члены в (2) малыми, тогда $\phi(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$-медленно меняющаяся функция, ω_R-действительная константа. При j =1 уравнения относятся внутри сферы, а при j =2- к внешней среде. Далее применяя процедуру замораживания [1], заменим (2) приближенными соотношениями вида

$$\overline{\lambda}_j \phi = \lambda_{0j}[1 - \Gamma^C_{\lambda j}(\omega_R) - i\Gamma^S_{\lambda j}(\omega_R)]; \overline{\mu}_j \phi = \mu_{0j}[1 - \Gamma^C_{\mu j}(\omega_R) - i\Gamma^S_{\mu j}(\omega_R)]\phi, \tag{3}$$

где

$$\Gamma^C_{\lambda j}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda j}(\tau)\cos\omega_R\tau d\tau; \Gamma^S_{\lambda j}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda j}(\tau)\sin\omega_R\tau d\tau,$$

$$\Gamma^C_{\mu j}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu j}(\tau)\cos\omega_R\tau d\tau; \Gamma^S_{\mu j}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu j}(\tau)\sin\omega_R\tau d\tau,$$

- соответственно, косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. Для решение рассматриваемой задачи примем зависимость $\overrightarrow{u}$ в виде $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{U}(r,\theta,\varphi)e^{i\omega t.}$ При этом $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}_p + \overrightarrow{U}_s$, которые удовлетворяют следующим уравнениям

$$(\Delta + k_p^2)\overrightarrow{U}_p = 0; (\Delta + k_s^2)\overrightarrow{U}_s = 0; div\,\overrightarrow{U}_p = 0; div\,\overrightarrow{U}_s = 0 \tag{4}$$

где

$$k_p^2 = \omega^2/\Gamma_{pk}c_p^2; k_s^2 = \omega^2/\Gamma_{sk}c_s^2;$$

$$\Gamma_{pk} = 1 - \Gamma^C_{pk}(\omega_R) - i\Gamma^C_{pk}(\omega_R); \Gamma_{sk} = 1 - \Gamma^C_{sk}(\omega_R) - i\Gamma^C_{sk}(\omega_R); c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho; c_s^2 = \mu/\rho$$

- соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн в упругом теле.

На контакте двух тел ставятся условия непрерывности (жесткий контакт) смещений и напряжений при $r = R$:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr2}; \sigma_{r\tau 1} = \sigma_{r\theta 2}; \sigma_{r\varphi 1} = \sigma_{r\varphi 2};$$

$$u_{r1} = u_{r2}; u_{\theta 1} + u_{\theta 2}; u_{\varphi 1} = u_{\varphi} 2; \tag{5}$$

где индекс 1 относится внутри сферы, а 2-к внешней среде, где расположена сфера.

Известно [1], что векторное поле смещений $\overrightarrow{U}$ допускает в сферических координатах разложение на три векторных поля, каждая из которых определяется лишь одной скалярной функцией: $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}_p + \overrightarrow{U'}_s + \overrightarrow{U''}_s$. В этом представлении $\overrightarrow{U}_p$-продольная, а $\overrightarrow{U'}_s$ и $\overrightarrow{U''}_s$ -поперечные части решения. Их выражения через скалярные функции имеют вид

$$\overrightarrow{U}_p = \frac{-}{k_p} grad\psi_0; \overrightarrow{U'}_s = rot(\overrightarrow{r}\psi_1); \overrightarrow{U''}_s = \frac{1}{k_s} rotrot(\overrightarrow{r}\psi_2),$$

Так что, каждая из скалярных функций $\psi_i (i = 0, 1, 2)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k_i^2)\psi_i = 0; k_i = \{k_p, i = 0; k_s, i = 1, 2\}$$

Здесь Δ- оператор второго порядка в сферических координатах. Решение скалярного уравнения Гельмгольца (6) для каждой из функций $\psi_i(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\psi_{0l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{n} A_{mnl} h_n(k_{pl} r) P_n^m(\cos\theta) exp(im\varphi);$$

$$\psi_{1l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{n} B_{mnl} h_n(k_{sl} r) P_n^m(\cos\theta) exp(im\varphi);$$

$$\psi_{2l} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{n} C_{mnl} h_n(k_{sl} r) P_n^m(\cos\theta) exp(im\varphi);$$

где $h_n(z)$ - сферическая функция Бесселя; l=1,2; l=1 - относится к сферическому телу, а l=2- к среде, $P_n^m(\cos\theta)$ - присоединенная функция Лежандра первого рода n-й степени и m-го порядка. При вычислениях функции Лежандра ($n >> 1$) использовались асимптотические формулы из работы [2]

$$P_{n-1/2}(\cos\theta) = (2/\pi n \sin\theta)^{1/2} [\cos(n\Delta - \pi/4) + \frac{\cot\theta}{8n} \sin(n\theta - \pi/4) + \theta(1/n^2)].$$

Полученные результаты позволяют исследовать различных собственных колебаний упругих и вязкоупругих неоднородностей, расположенных внутри бесконечной деформируемой среды, т.е., радиальных, крутильных и сфероидальных собственных колебаний рассматриваемой системы.

Литература

1. Мирсаидов М.М., Трояновский И.Е. Волновая задача о сейсмостойкости сооружения при распространении волны Релея в упругом полу-пространстве. Изв. АН УзССР (сер.техн.наук) №5, 1980. С.48-51.

2. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2013. Vol. 49, Iss. 6, Pp. 250-256.

Применение Методов Анализа Устойчивости Систем Дифференциальных Уравнений В Модели Безработицы

Туйчиев С. Г.[1], **Эшдавлатова С. Э.**[2]

Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий(TIFT), Ташкент, Узбекистан;
stuychev@gmail.com
Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент, Узбекистан;
sevaraeshdavlatova@gmail.com

Аннотация: В данной статье говорится о практическом применении анализа устойчивости системы дифференциальных уравнений в экономика-математическом моделировании. Построена и проверена на устойчивость простейшая модель, описывающая безработицу.

Построением математической модели такой социально-экономической проблемой как безработица интересовались многие уччные математики такие как А.К.Мисра, Арвинд К.Сингх [1][2], Гулбану Фатхан, П.Х.Бхатхавала [3], Анибал Галиндро, Делфим Ф.М. Торес [4]. Во всех этих статьях авторы описывали проблему безработицы через систему дифференциальных уравнений. Каждый из этих авторов находил точку устойчивости и проверяли асимптотическую устойчивость при помаши критерии Рауса-Гурвица [5].

В этой статье мы хотим продемонстрировать применения одного из методов анализа устойчивости дифференциальных уравнений и объяснить важность этого метода в оценке социально-экономической проблемы как безработица населения. Для этого мы модифицируем модель Лотки-Вольтерра для описания процесса безработицы. Это модель описывает процесс безработицы в самом простом варианте.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \Lambda U - \varphi UV - \gamma U^2 \\ \frac{dV}{dt} = \tau UV - \delta V - \mu V^2 \end{cases} \tag{1}$$

Параметр	Описания параметра	Факторы, влияющие на параметры
Λ	Скорость роста безработицы	Технологические изменения, кризисы,увольнения
φ	Эффективность трудоустройства	Гибкость рынка труда, качество образования
δ	Скорость уменьшения вакансий	Скорость автоматизации, зарплатные ожидания
τ	Скорость создания вакансий	Государственный стимул,гибкость рынка труда
γ	Коррекция безработицы	Поддержка государства, переквалификация
μ	Ограничение роста вакансий	Дефицит кадров, рост зарплат, трудовые законы

Здесь все параметры являются положительными: $\Lambda, \varphi, \delta, \tau, \gamma, \mu > 0$.

Найдем точку равновесия для системы (1):

$$\frac{dU}{dt} = \Lambda U - \varphi UV - \gamma U^2 = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \tau UV - \delta V - \mu V^2 = 0$$

Точки равновесия обазначим как U^*, V^*, для малых γ и μ их значения равна следующему выражению:

$$V^* \approx \frac{\Lambda}{\varphi} \quad U^* \approx \frac{\delta}{\tau}$$

Проверим систему на устойчивость. Для этого построим матрицу Якоби и подставим в него значения (U^*, V^*):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial U} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial U} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda - \varphi V^* - 2\gamma U^* & -\varphi U^* \\ \tau V^* & \tau U^* - \delta - 2\mu V^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma \cdot \frac{\delta}{\tau} & -\varphi \cdot \frac{\delta}{\tau} \\ \tau \cdot \frac{\Lambda}{\varphi} & -2\mu \cdot \frac{\Lambda}{\varphi} \end{pmatrix}$$

Проверим на устойчивость по критерию Раусса-Гурвица:

$$det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2\gamma \cdot \frac{\delta}{\tau} - \lambda & -\varphi \cdot \frac{\delta}{\tau} \\ \tau \cdot \frac{\Lambda}{\varphi} & -2\mu \cdot \frac{\Lambda}{\varphi} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2\gamma \cdot \frac{\delta}{\tau} - \lambda) \cdot (-2\mu \cdot \frac{\Lambda}{\varphi} - \lambda) + \Lambda\delta = 0$$

$$\lambda^2 + (2\gamma\frac{\delta}{\tau} + 2\mu\frac{\Lambda}{\varphi})\lambda + 4\gamma\mu\frac{\delta\Lambda}{\tau\phi} + \Lambda\delta$$

Из характеристической уравнений мы можем видеть, что

$$2\gamma\frac{\delta}{\tau} + 2\mu\frac{\Lambda}{\varphi} > 0, \quad 4\gamma\mu\frac{\delta\Lambda}{\tau\phi} + \Lambda\delta > 0$$

Согласна критерию Рауса-Гурвица система устойчива так как все коэффициенты положительны. Из того что все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части следует то, что точка равновесия асимптотически устойчива.

Проверка на асимптотическую устойчивость очень важна, так как с экономической точки зрении это означает что рынок труда самовосстанавливается без внешнего вмешательства либо с минимальными корректировками, это является одним из признаков стабильной экономики.

Литература

1. A.K.Misra, A.K.Singh. A mathematical model for unemployment// Nonlinear Anal.1, 2011,pp.128-136.

2. A.K.Misra, A.K.Singh. A Delay mathematical model for the control of unemployment // Differ Equ Dyn Syst 21(3), 2013,pp.291-307.

3. Gulbanu Pathan, P.H.Bhathawala. A Mathematical Model for Unemployment with effect of self employment // IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 2015,pp.37-43.

4. Anbal Galindro, Delfim F. M. Torres A simple mathematical model for unemployment: a case study in Portugal with optimal control //STATISTICS, OPTIMIZATION AND INFORMATION COMPUTING. 2018, pp.116-129.

5. Lugiato L, Prati F, Brambilla M. The RouthЦHurwitz stability criterion. In: Nonlinear Optical Systems. Cambridge University Press; 2015:412-412.

6. Н.М.Жабборов, С.Г.Туйчиев, С.Э.Эшдавлатова Влияния некоторых коэффициентов на уровень коррупции // Yosh olimlar axborotnomasi.4(4), 2024, pp.26-33.

Численное Определение Зон Фокусировки Энергии Различных Сейсмических Волн На Отдельных Участках Среды

Умаров И. Н.[1], **Янгибоев З. Ш.**[1], **Имомназаров Х. Х.**[2], **Михайлов А. А.**[2]
Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;
ibroximxonumarov1@gmail.com
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
imom@omzg.sscc.ru

Распространение сейсмических волн в упругой среде записывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости через взаимосвязь компонент вектора скорости смещений и компонент тензора напряжений в декартовой системе координат (x_1, x_2).

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vartheta_R u_i = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \vartheta_R \sigma_{ik} = \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + \lambda\delta_{ik}\mathrm{div}\vec{u} + \delta_{ik}F_i f(t). \tag{2}$$

где δ_{ij}- символ Кронекера, $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ - упругие параметры среды, $\rho(x_1, x_2)$-плотность среды, ϑ_R- коэффициент вязкого трения, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ - вектор скорости смещений, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $f(t)$- заданный временной сигнал в источнике. F_1, F_2 - составляющие силы $\vec{F}(x, z) = F_1\vec{e}_x + F_2\vec{e}_z$, описывающей распределение локализованного в пространстве источника.
Задача решается при однородных данных Коши и граничных условиях на свободной поверхности $x_2 = 0$.

Для решения поставленной задачи используем интегральное преобразование Лагерра по времени вида [1, 2] конечно-разностная схема пространственных производных на сдвинутых сетках [3] с четвертым порядком точности.

Литература

1. Mikhailenko B. G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. 1999. №12, P. 105–110.

2. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. 2001. Vol. 9, №4, P. 1523–1541.

3. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure apll. geophys., 2003, №160. P. 1207–1224.

Консервативные Компактные И Монотонные Разностные Схемы Для Квазилинейных Уравнений

Утебаев Б. Д.

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан
bakhadir1992@gmail.com

Одной из основных задач вычислительной математики является построение и исследование разностных схем повышенного порядка точности, аппроксимирующих уравнения математической физики. Среди таких методов большую популярность получили так называемые компактные разностные схемы, которые записываются на минимальных для данного уравнения шаблонах. Это позволяет без увеличения каких-либо вычислительных затрат существенно увеличить точность разностных схем и тем самым значительно сократить время решения прикладной задачи на ЭВМ. Такие методы до недавнего времени были разработаны для линейных уравнений математической физики как с постоянными, так и переменными коэффициентами. Что касается квазилинейных уравнений, то компактные алгоритмы для уравнения быстрой диффузии и обобщенного уравнения Фишера были предложены в работах [1, 2]. Компактные разностные схемы для уравнения диффузии с линейным оператором $Lu = (k(x)u')'$ впервые получены в работе А.А. Самарского [3], которые основаны на использовании шаблонного функционала, аппроксимирующего коэффициент $k(x)$ в трех последовательных точках $x_{i-1}, x_{i-0.5}, x_i$. Недостатком данного подхода является невозможность обобщения на случай квазилинейных уравнений с нелинейным оператором $Lu = (k(x,u)u')'$.

Доклад посвящен построению и исследованию компактных и монотонных разностных схемы 4-го порядка точности, сохраняющие свойство консервативности для квазилинейного стационарного уравнения реакцииЦдиффузии [4]. Следует отметить, что разностная схема должна отражать основные свойства непрерывной среды. Поэтому естественно требовать, чтобы в схеме прежде всего выполнялись разностные аналоги основных законов сохранения, справедливых для исходной непрерывной математической модели. Разностные схемы, обладающие этим свойством, называются консервативными.

На важность требования консервативности схемы обратили внимание в начале 1950-х годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. Ими был предложен интегро-интерполяционный метод для конструирования консервативных разностных схем и построен пример, когда неконсервативная схема, обеспечивающая второй порядок сходимости в классе достаточно гладких коэффициентов, расходится в классе разрывных коэффициентов. Итак, сохранение свойств консервативности является необходимым условием сходимости разностного решения к точному решению дифференциальной задачи в классе обобщенных решений.

Для линеаризации предложенных разностных схем используется итерационный метод, также сохраняющий идею консервативности и монотонности $(s+1)-$й итерации. Основная идея реализации предложенных схем основана на возможности распараллеливания вычислительного процесса. Результаты вычислительных экспериментов иллюстрируют эффективность предложенных алгоритмов. Указывается также на возможность обобщения данного метода на многомерные задачи, а также нестационарные уравнения диффузии-реакции.

Литература

1. Matus P.P., Utebaev B.D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations // Mathematical Models and Computer Simulations. 2021. V.13. P. 1038–1048.

2. Matus P.P., Utebaev B.D. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation // Differential Equations. 2022. V.58, №. 7. P. 937–951.

3. Samarskii A.A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963. V.3. P. 1107–1146.

4. Матус П.П., Громыко Г.Ф., Утебаев Б.Д. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2024. Т.68, №1. С. 7–14.

О Сходимости Схемы Метода Конечных Элементов Для Нестационарных Задач Конвекции-Диффузии

Утебаев Б. Д.[1,2], Калмуратова С. М.[1]

[1]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан;
[2]Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент,Узбекистан;
dutebaev_56@mail.ru,kalmuratova.sapura@mail.ru

Решение сложных прикладных разработок приводит к созданию более точных численных алгоритмов или совершенствованию существующих. Она проявляется особенно при исследовании сложных нестационарных процессов, например, как решения нестационарных задач конвекции-диффузии. Существует много задач, которые приводит к решению нестационарного дифференциального уравнения конвекции-диффузии [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_1 u + L_2 u = f(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset R^3,\, t \in (0,T]\},$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in = \partial\Omega\,,\quad t \in (0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\Omega = \{x : x = (x_1, x_2, x_3),\ 0 < x_m < l_m,\, m = \overline{1,3}\}$, $\bar{\Omega} = \Omega\cup$, $L_1 u$-оператор конвективного переноса, $L_2 u$- оператор диффузионного переноса. Вместо (2) можно рассматривать другие локальные или нелокальные краевые условия.

К такому классу задач относятся, например математические модели размещения источников загрязнения в водоемах и прибрежных морях, а также линеаризованная математическая модель динамики морских и океанических течений [2]. Кроме того, в виде (1) можно записывать классическую задачу для параболического уравнения.

В данной работе задача (1)-(3) сначала аппроксимируется по пространственным переменным методом конечных элементов Галеркина-Петрова, в результате чего получим задачу Коши для эволюционного уравнения первого порядка (полудискретная задача)

$$D\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \tag{4}$$

где полудискретная функция u_h аппроксимирует непрерывную функцию u.
Далее для аппроксимации задачу (4) применяются трехпараметрическая векторная разностная схема [3]

$$Dy_t - (\tau^2/12)A\dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma D\dot{y}_t + \alpha Ay_t - \beta A\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \tag{5}$$

$$y^0 = u_{h,0}, \dot{y}^0 = \dot{u}_{h,0}$$

где

$$\dot{u}_{h,0} = D^{-1}(f_h^0 - Au_{h,0}), \phi_1 = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt, \;\; \phi_2 = \frac{12}{\tau^3}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\left(s_1\vartheta_2^{(1)} + s_2\vartheta_2^{(3)}\right)dt,$$

$$s_1 = 15\gamma - 35\alpha/3, s_2 = 140\gamma - 350\alpha/3,$$

$$\vartheta_2^{(1)} = t - (t_n + \tau/2)\ , \ v_2^{(3)} = \tau(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2), \ \xi = (t - t_n)/\tau.$$

Здесь дискретная функция y аппроксимирует u_h.

Схемы (5) подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации по времени при $\alpha + \beta = \gamma$; α, β, $\gamma = O(\tau^2)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия аппроксимации $\alpha + \beta = \gamma$; α, β, $\gamma = O(\tau^2)$ и устойчивости $\alpha = \tau^2/12$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Тогда решение разностных схем (5) сходятся к достаточно гладкому решению задачи (1)-(3) и справедлива оценка точности

$$\|y(t) - u(t)\|_1 + \|\dot{y}(t) - \dot{u}_h(t)\|_1 \le M(h^3 + \tau^4).$$

Приведен алгоритм реализации схемы и на основе тестовых задач проведены численные расчеты, подтверждающие теоретические выводы.

Литература

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» 2015. - 248 с.

2. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. -М.: Наука, 1982. - 320 С.

3. Утебаев Д., Москальков М.Н. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. - Ташкент, «Fan va texnologiya», 2012. - 160 С.

Моделирование Задач Интегральной Геометрии На Семействах Гипербол И Их Применение В Обработке Сейсмических Данных

Утеулиев Н. У.[1], **Сеидуллаев А. К.**[2,3], **Низаматдинова С. С.**[2]

[1]Нукусский государственный технический университет, Нукус, Узбекистан;
uteulievn@mail.ru

[2]Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан;
abat_1984@inbox.ru

[3]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
abat_1984@inbox.ru

Рассматривается задача восстановления функции, заданной своими интегралами с весовыми функциями по кривым второго порядка на плоскости, которые образуют двухпараметрическое семейство. Эта задача относится к области интегральной геометрии. В качестве кривых используются гиперболы на плоскости, а весовая функция задается степенной зависимостью. Решение задачи сводится к решению интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода. Доказана единственность восстановления функции, а также получены явные формулы обращения.

Гиперболическое преобразование Радона играет ключевую роль в обработке сейсмических данных[1-3], обеспечивая эффективное разделение волновых полей, подавление кратных волн и восстановление отражчнных сигналов. В данной работе рассматриваются методы обращения гиперболического преобразования Радона, позволяющие реконструировать сейсмический разрез по интегральным данным. Особое внимание уделяется численным алгоритмам, оптимизирующим обработку данных при сложных геологических условиях. Полученные результаты могут быть применены для повышения точности интерпретации сейсмических изображений и улучшения качества томографической реконструкции.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство равнобочных гипербол

$$\Gamma(x,y)=\left\{\eta^2-y^2=(\xi-x)^2,\ 0<y<\eta\right\}$$

на евклидовой плоскости R^2, параметризованных центрами x и y.

В полосу

$$\Omega_H=\{(\xi,\eta):-\infty<\xi<\infty,0<y<\eta\leq H\}$$

попадает лишь часть нижней ветви $\eta=\sqrt{y^2+(\xi-x)^2}$ каждой гиперболы.

Мы рассматриваем задачу нахождения неизвестной функции $u(x,y)$ по известным интегралам вдоль участков нижних ветвей гипербол из семейства $\Gamma(x,y)$, которые лежат внутри полосы Ω_H.

$$\int_{\Gamma(x,y)\cap\Omega_h}\eta^n u(\xi,\eta)d\xi=f(x,y),\ n\geq 0.$$

Литература

1. Moon S. Inversion of the seismic parabolic Radon transform and the seismic hyperbolic Radon transform //Inverse Problems in Science and Engineering. – 2016. – V. 24. – №2. – pp. 317–327.

2. Chen W. et al. Fast high-resolution hyperbolic radon transform //IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2021. – V. 60. –pp. 1–10.

3. Zhang Q. et al. A local radon transform for seismic random noise attenuation //Journal of Applied Geophysics. – 2021. – V. 186. – pp. 104264.

Оптимальные Стратегии Для Одновременных Антагонистических Игр

Учкунов Б.[1], Рузибоев М.[2]

Центральный Азиатский университет, Факультет инженерии, Ташкент, Узбекистан[1,2]

uchkunov.bob@gmail.com m.ruziboyev@centralasian.uz

В данной работе исследуется антагонистическая игра преследования между двумя игроками P и E в n-мерном евклидовом пространстве R^n, где задано компактное множество C. Как известно [1]–[2], в этой бесконечной антагонистической игре существуют смешанные стратегии.

В настоящей заметке изучается структура оптимальных стратегий в двух случаях упомянутой игры. В частности, утверждается, что при выборе произвольного компактного множества C значение игры равно R [1].

В ходе исследования мы рассмотрели в качестве C произвольный треугольник в двумерном евклидовом пространстве, проанализировали различные типы треугольников и выявили оптимальные стратегии для обоих игроков. Также были выведены формулы для среднего расстояния в зависимости от смешанных стратегий. Наши результат были обобщены опирающиеся на свойства точки Торричелли (Ферма-Торричелли). Показано, что при некоторых условиях (например, для равностороннего треугольника) оптимальная точка выбора игрока P может совпадать с центром описанной окружности, а в общем случае – с точкой Торричелли. В результате наши выводы в некоторых случаях отличаются от результатов работы [1], в особенности при рассмотрении тупоугольного и остроугольного треугольников. Кроме того, мы обобщили полученные результаты на произвольный многоугольник с n вершинами, где аналогичные расхождения с [1] также имеют место.

Литература

1. N. Satimov, A. Azamov, L. A. Petrosyan, *Structure of optimal strategies in one-dimensional pursuing games*, Upravliaemye sistemy, 1974, Issue 13, 65–68.

2. Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н.Н.Воробьева. М. Физматгиэ, 1963.

3. H. Martini, K. J. Swanepoel, G. Weis, The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2002, vol. 115, pp. 283–314.

Уравнения В Напряжениях Для Анизотропных Тел

Халджигитов А.А., Хасанова З.З.

Национальный Университет Узбекистана ул. Университетская 4, Ташкент, 100174, Узбекистан

a.xoldjigitov@nuu.uz, zebohasanova436@gmail.com

Аннотация. В работе в рамках условий совместности деформаций предложено модельное уравнение относительно напряжений для ортотропных тел, в частном случае из которого следуют известное уравнение Бельтрами-Митчелла. Дана постановка краевых задач теории упругости в напряжениях для ортотропных тел, состоящая из уравнений равновесия и второй группы уравнений, зависящих от касательных напряжений.

Ключевые слова: напряжения, деформации, условие совместности Сен-Венана, ортотропия, уравнения равновесия, разностные схемы, итерационный метод.

Известное условие совместности деформаций Сен-Венана [1] с помощью тензора несоответствия деформаций η_{ij} может быть представлено в виде[2]

$$\eta_{ij} \equiv e_{iqm}e_{jkl}\varepsilon_{mk,ql} = \nabla^2\varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - (\varepsilon_{ik,k})_{,j} - (\varepsilon_{jk,k})_{,i} = 0 \tag{1}$$

где e_{iqm} – тензор Леви-Чивиты, которое обычно записывается в развернутой форме в следующем виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2\varepsilon_{12,12}, \\ \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11} &= 2\varepsilon_{13,13}, \\ \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 2\varepsilon_{23,23}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,23} &= (\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1})_{,1}, \\ \varepsilon_{22,13} &= (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{31,2})_{,2}, \\ \varepsilon_{33,12} &= (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{12,3})_{,3}. \end{aligned}$$

Лемма. Если справедливо следующее условие, т.е.

$$\varepsilon_{ij,j} = 0 \tag{3}$$

Тогда, используя условие совместности (1), можно доказать, что

$$\nabla^2\varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} = 0 \tag{4}$$

Для того чтобы построить уравнения в напряжениях для анизотропных тел рассмотрим обобщенный закон Гука для ортотропных тел [25,10]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}\sigma_{33} - \frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}}\sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}}\sigma_{23} \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотренная, в случае плоских задач может быть сведена к двум уравнениям равновесия(при отсутствии объемных сил) и одного уравнения в напряжениях$(5)_1$ т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{2G_{12}(1-\nu_{12})}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{2G_{12}(1-\nu_{21})}{E_2} \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{7}$$

и,с граничными и дополнительные граничными условиями

$$(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2)|_\Gamma = S_1, \quad (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2)|_\Gamma = S_2. \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \right) \Big|_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \right) \Big|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Таким образом, уравнения (6-9) представляют плоскую краевую задачу теории упругости ортотропных тел в напряжениях (Задача А). Следуя работам[2], в краевой задаче А, продифференцируя уравнения равновесия (6) может быть получена другая плоская задача для ортотропных тел (Задача В). Сравнением результатов задач А,В по таблице 1. может быть обеспечена справедливость предложенных модельных уравнений для ортотропных тел

x=0	**y=1**	**y=0.8**	**y=0.6**	**y=0.4**	**y=0.2**	**y=0**
Задача А	0.0000	0.3600	0.6400	0.8399	0.9599	1.0000
Задача В	0.0000	0.3589	0.6380	0.8374	0.9570	0.9969
Тимошенко[4]	0.0000	0.3591	0.6374	0.8372	0.9567	0.9966

Таблица 2:

Литература

1. V. Novatsky. *The Theory of Elasticity.* – M.: Mir, 1975. – 872 p.

2. Khaldijigitov A.A., Tilovov O.U., Salomov N.O. On the numerical solution of plane problems of elasticity theory in stresses. XIII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics, St. Petersburg, 2023.

3. Samarski A.A., Nikolaev E.S. *Methods for Solving Grid Equations.* – Moscow: кSciencеньь, 1978, 592 p.

4. Timoshenko S. and Goodier J.N. *Theory of Elasticity.* McGraw–Hill, Boston, 1970.

Алгебро-Экспоненциальная Оптимальная Квадратурная Формула С Производными

[1,2]**Хаётов А.Р.,** [3]**Кулдошев Х.М.**

[1]Институт математикаи им. В.И.Романовский, Ташкент, Узбекистан
[2]Ценрально Азиатский университет, Ташкент, Узбекистан,
[3]Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан
e-mail: hayotov@mail.ru, a.hayotov@cenralasian.uz

В настоящей работе мы рассмотрим задачу построения оптимальной квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0} f(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1} f'(h\beta). \tag{1}$$

Здесь подынтегральная функция f из пространства $W_2^{(3,2)}(0,1)$ [1,2], $C_{\beta,0}$ – известные и являются коэффициентамы обобщенной формулы трапеций, $C_{\beta,1}$ – неизвестные коэффициенты, которые следует найти, $h = 1/N$, N – натуральное число.

Пространство является гильбертовым пространством функций, которые производные третьего порядка интегрируемые с квадратом и норма функций определяется следующей формулой

$$\|f\|_{W_2^{(3,2)}} = \sqrt{\int_0^1 (f'''(x) + \sigma f''(x))^2 dx},$$

где $\sigma \neq 0$.

Погрешность формулы определяется следующей разностью

$$(\ell, f) = \int_0^1 f(x)dx - \left(\sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0} f(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1} f'(h\beta) \right), \tag{2}$$

и в свою очередь этот погрешность определяет линейный непрерывный функционал ℓб который называется функционалом погрешности формулы (1).

Следуеть отметит, что для всех функций пространства $W_2^{(3,2)}(0,1)$ погрешность (2) формулы (1) оценивается сверху нормой функционала погрешности как

$$|(\ell, f)| \leq \|\ell\| \, \|f\|.$$

Оптимальной квадратурной формулой вида (1) называется квадратурная формула с коэффициентамы $\mathring{C}_{\beta,1}$, $\beta = 0, 1, ..., N$, которые предоставляют наименшее значение норме $\|\ell\|$ функционала погрешности ℓ. Кроме того, коэффициенты $\mathring{C}_{\beta,1}$ называются *оптимальными*.

В настоящей работе нами построена оптимальная квадратурная формула вида (1). Полчены явные формулы для оптимальных коэффициентов. Полученная оптимальная формула точна линейной комбинации функций 1, x и $\exp(-\sigma x)$.

Литература

1. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.: Оптимальная аппроксимация функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул в пространстве дифференцируемых функций. – Ташкент, "Muhr Press", 2022.

2. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.: Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, *Узбекский математический журнал,* – Ташкент, 2004, №.3, -С. 67-82.

Преобразование Тригонометрического Произведения В Сумму

Кангужин Б.Е.[1], Хужахметов Ж.Ж.[2]

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы , Казахстан;
kanguzhin53@gmail.com[1]
КГУ Средняя школа имени И.Шорманова, Алматы, Казахстан;
qjhmtv@gmail.com[2]

В различных областях математики специальные многочлены занимают особое место. Одними из них являются многочлены Чебышёва, которые тесно связаны с тригонометрическими функциями. Если учитывать, что для многочленов Чебышёва $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$, то они удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Если подставить $x = \cos\alpha$ и $0 < \alpha < \pi$, то ясно, что выражение

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n} a_j T_j(\cos\alpha)$$

можно записать в данной форме. Здесь числовые коэффициенты $a_j (j = 0, 1, \ldots, n)$, ранее остававшиеся неизвестными, определяются в следующей теореме.

Теорема 1. Обозначим через I_n n-мерный единичный параллелепипед, вершины которого заданы координатами $\varepsilon = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$. Здесь числа $\varepsilon_i (i = 2, 3, \ldots, n)$ принимают значения либо 0, либо 1. Тогда формула

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n} a_j T_j(\cos\alpha)$$

является верной, где $a_j = \mathrm{card}\{\varepsilon \in I_n : j = \big|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_i}\big|\}$.

Пример 1.

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon\in I_3}\cos\Big(\sum_{i=1}^{3}(-1)^{\varepsilon_i}\Big)\alpha.$$

Вершины определяются в виде $\varepsilon = \{(000), (001), (010), (011)\}$.

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}\cos((-1)^0\alpha + (-1)^0\alpha + (-1)^0\alpha) + \cos((-1)^0\alpha + (-1)^0\alpha + (-1)^1\alpha)$$

$$+ \cos((-1)^0\alpha + (-1)^1\alpha + (-1)^0\alpha) + \cos((-1)^0\alpha + (-1)^1\alpha + (-1)^1\alpha)$$

$$= \frac{1}{4}[\cos(3\alpha) + \cos(\alpha)] = \frac{1}{4}[T_3(\cos\alpha) + T_1(\cos\alpha)]$$

Для функции синуса можно получить аналогичные формулы. Однако при различных аргументах тригонометрических функций возможности метода Чебышёва оказываются ограниченными. В данной работе предложена новая формула преобразования многопеременных тригонометрических функций в сумму. Полученная формула сохраняет точность и упрощает вычисления даже для случаев с более чем тремя аргументами. Следующая теорема уточняет эти обобщённые формулы и предлагает новые методы преобразования тригонометрических функций с разными аргументами в сумму.

Теорема 2. Обозначим через I_n n-мерный единичный параллелепипед, вершины которого заданы координатами $\varepsilon = (0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$. Здесь числа $\varepsilon_i (i = 2, 3, \ldots, n)$ принимают значения либо 0, либо 1. В этом случае преобразование произведения тригонометрических функций в сумму выражается следующими формулами:

$$\prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\varepsilon\in I_n} \cos\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i\right),$$

$$\prod_{i=1}^{2k-1} \sin\alpha_i = \frac{4}{4^k} \sum_{\varepsilon\in I_{2k-1}} (-1)^{k-1+\sum_{s=1}^{2k-1}\varepsilon_s} \sin\left(\sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i\right),$$

$$\prod_{i=1}^{2k} \sin\alpha_i = \frac{2}{4^k} \sum_{\varepsilon\in I_{2k}} (-1)^{k+\sum_{s=1}^{2k}\varepsilon_s} \cos\left(\sum_{i=1}^{2k} (-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i\right).$$

Это теорема доказывается методом математическойґиндукции.

Пример 2. Представим произведение $\prod_{i=1}^{4} \sin\alpha_i$ в виде суммы. В данном случае $n = 4$ – чётное число, и $4 = 2k \Rightarrow k = 2$. Вершины определяются следующим образом: $\varepsilon = \{(0000), (0001), (0010), (0100), (0011), (0110), (0101), (0111)\}$.

$$\prod_{i=1}^{4} \sin\alpha_i = \frac{2}{4^2} \sum_{\varepsilon\in I_4} (-1)^{2+\sum_{s=1}^{4}\varepsilon_s} \cos\sum_{i=1}^{4} (-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i$$

$$= \frac{1}{8}\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4) - \cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4) - \cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$

$$+ \cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) + \cos(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4) + \cos(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4) - \cos(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4).$$

Предложенные формулы являются надёжным инструментом, упрощающим вычисления и позволяющим сократить сложные тригонометрические выражения, открывая новые возможности для научных исследований. В частности, данные методы были использованы в работах [1-3], где найдено экспоненциальное представление решения $\varphi(x, \rho)$, которое позволяет эффективно находить приближения собственных значений краевых задач оператора Штурма-Лиувилля.

Литература

1. Кангужин Б.Е., Хужахметов Ж.Ж. «Application of the Method of Decomposition into Exponential Series by the Spectral Parameter in Eigenvalue Problems». Kazakh Mathematical Journal, 2025, Т. 25, №1, Б. 6–15.

2. Кангужин Б.Е., Хужахметов Ж.Ж. «Применение метода разложения в экспоненциальные ряды по спектральному параметру в задачах на собственные значения». Вестник ОшГУ, Математика. Физика. Техника, 2024, №2(5), С. 68.

Нестационарное Вращение Жесткого Шара Вблизи Сферического Включения В Пористо-Упругом Пространстве, Насыщенной Жидкостью

Жураев Г. У.[1], Мусурмонова М. О.[2], Шукурова З. У.[3], Шукуров А. М.[4]

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека[1], Ташкент, Узбекистан;

Каршинский государственный университет[2,3,4], Карши, Узбекистан;

gjuraev@mail.ru, shukurovamon@yandex.ru, mmo_2704@mail.ru

Математическое моделирование и исследование нестационарных волновых процессов в сплошных средах представляет собой сложное и в то же время актуальное направление волновой динамики механики деформируемого тела. Актуальность проблем волновой динамики деформируемых тел обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок, а также проблемами геофизики, сейсмологии, нефтеразведки, горнодобывающей промышленности, строительство гражданских и промышленных сооружений.

Пусть в бесконечной пористо-упругой изотропной среде, насыщенной жидкостью расположен центр жесткого шара радиусом R_1 вблизи сферического включения (сферическая полость или жесткий шар) радиусом R_2, расстояние между центрами которых равно l, где $l > R_1 + R_2$. Движение среды рассматривается в двух сферических системах координат $(r_\kappa,\ \theta_\kappa,\ \vartheta_\kappa)$, начальные точки O_κ которых находятся соответственно в центрах шара и сферического включения $(\kappa = 1, 2)$.

В начальный момент $\tau = 0$ времени абсолютно жесткий шар подвергается нестационарному вращению по закону $V(\tau, \theta_1)$ вокруг оси, проходящей через центры шара и сферического включения, при полном сцеплении с окружающей средой

$$u_{\vartheta_1}|_{r_1=R_1} = V(\tau, \theta_1). \tag{1}$$

На поверхности сферического включения напряжение или смещение равно нулю

$$\sigma_{r_2\vartheta_2}|_{r_2=R_2} = 0 \qquad u_{\vartheta_2}|_{r_2=R_2} = 0. \tag{2}$$

Учитывая осевую симметрию задачи, движение среды относительно потенциала ψ описывается волновым уравнением

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \Delta_\kappa \psi - \frac{\psi}{r_\kappa^2 \sin^2 \theta_\kappa}, \tag{3}$$

$$\Delta_\kappa = \frac{1}{r_\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r_\kappa} \left(r_\kappa^2 \frac{\partial}{\partial r_\kappa} \right) + \frac{1}{r_\kappa^2 \sin \theta_\kappa} \frac{\partial}{\partial \theta_\kappa} \left(\sin \theta_\kappa \frac{\partial}{\partial \theta_\kappa} \right), (\kappa = 1, 2)$$

Начальные условия - однородные

$$\psi|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{4}$$

На бесконечности отсутствуют возмущения:

$$\lim_{r_\kappa\to\infty} \psi = 0. \tag{5}$$

Начально-краевая задача (1)–(5) решается с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени τ. В пространстве изображений потенциала ψ^L, компоненты $u^L_{\vartheta_\kappa}$ вектора смещения и $\sigma^L_{r_\kappa\vartheta_\kappa}$ тензора напряжений и заданная функция $V^L(\tau,\theta_1)$ представляются в виде бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра $C^{3/2}_{n-1}(\cos\theta_\kappa)$ [1]. Переход из одной системы в другую, и наоборот, осуществляется с помощью теоремы сложения [2] для функций Бесселя второго рода $K_{n+1/2}(x)$.

В пространстве изображений задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которую запишем в виде двух матричных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{MA}y^2 + \mathbf{F}_1\mathbf{B}x - \mathbf{F}_2\mathbf{B}xy^2 = \mathbf{q}y \\ \mathbf{NB}z^2 + \mathbf{T}_1\mathbf{A}x - \mathbf{T}_2\mathbf{A}xz^2 = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

$$\mathbf{q}(s) = \|q_1(s), q_2(s), ...\|^T, \quad \mathbf{A}(s) = \left\|A^L_1(s), A^L_2(s), ...\right\|^T, \quad \mathbf{B}(s) = \left\|B^L_1(s), B^L_2(s), ...\right\|^T$$

$$x = e^{-l\gamma s}, \quad y = e^{-R_1\gamma s}, \quad z = e^{-R_2\gamma s}.$$

Решения системы (6) ищется в виде бесконечных рядов по экспонентам

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \mathbf{a}_{jk}(s)x^i y^{-j-1}z^{-k}, \mathbf{B} = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \mathbf{b}_{jk}(s)x^i y^{-j-1}z^{-k}$$

$$\mathbf{a}_{ijk}(s) = \left\|a^{(1)}_{ijk}(s), a^{(2)}_{ijk}(s), ...\right\|^T, \quad \mathbf{b}_{ijk}(s) = \left\|b^{(1)}_{ijk}(s), b^{(2)}_{ijk}(s), ...\right\|^T.$$

Для коэффициентов рядов получены рекуррентные соотношения и начальные условия для них, что позволяет получить решение бесконечной системы без использования метода редукции. Приведены формулы для компонент вектора перемещения и тензора напряжений. Переход к оригиналам осуществляется с помощью теории вычетов [3]. Проведены численные эксперименты, результаты которых представлены в виде графиков. Результаты работы могут быть использованы в области геофизики, сейсмологии и проектных организациях при строительстве сооружений, а также при проектировании подземных резервуаров.

Литература

1. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1985.

2. Иванов Е.А., Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987.

Об Одном Методе Определение Длину Переходной Части Железной Дороги

Эргашалиев М.Й.

Ташкентский государственный транспортный университет, Аспирант (PhD).,Ташкент , Узбекистан;
ergashaliyevm@mail.ru

Сложной частью железнодорожной пути является его кривая часть [1].

Кривая часть дороги состоит из переходной частью и дугой окружности данного радиуса. Переходная часть дороги обеспечивает плавную переход состава от прямой части к дуги окружности. Важным параметром переходной части еч длина. Его длина определяется в зависимости от радиуса R – окружности и угла α – между прямыми частями.

Основное требования к кривой, являющейся переходной части, непрерывное изменение его кривизны от 0 до $\frac{1}{R}$.

Поэтому важно определять точку X_0 на переходной части, где $K(X_0) = \frac{1}{R}$. Принимаем следующую метод, определение длины где, выполняется все требования.

Пусть $x = x(t), y = y(t)$ параметрическое уравнение переходной части и $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность радиуса R. Кривизна переходной части изменяется монотонно в зависимости от его длины. Так как окружность имеет постоянную кривизну, существует некоторая точка B, где кривая переходной части и окружность пересекаются (рис.1).

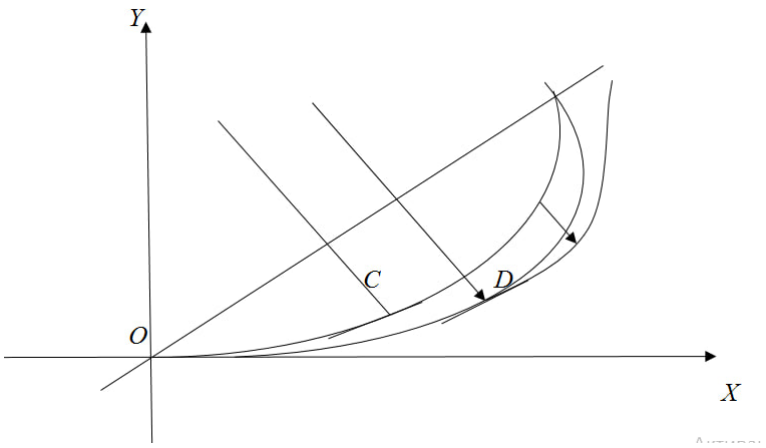


Рис.1

Если провести прямую OB, легко доказать, что существуют точка C на окружности и точка D на кривой переходной части, где касательные взасимно параллельны. Причем радиусы сопрягающихся окружностей будут параллельными. Окружность в направлении радиуса параллельно переносом до касания с точкой D.

Утверждение.

1. Оптимальное длина переходной части будет длина дуги OD – переходной части.
2. Кривизна переходной части непрерывно меняется от 0 до $\frac{1}{R}$.

Литература

1. В.А. Верило, С.С. Кожедуб Основы проектирования однопутных железных дорог. Гомель, 2018 г.

2. Савелов А.А. Плоские кривые. Специфика, свойства, применение. М. 1960 г.

Моделирование Процесса Уклонения Траекторий Квазилинейных Динамических Систем В Классах Локально-Инерционных Управлений (Тонкий Случай)

Югай Л.П.[1]

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта (Чирчик, Узбекистан)

yugailp@mail.ru

Рассматривается квазилинейная конфликтно-управляемая система, описываемая уравнениями

$$\dot{z} = Cz + f(u, v) + a, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^n$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^n$, C – $(n \times n)$ постоянная матрица, P и Q – непустые компакты, $a \in \mathbb{R}^n$ – известный вектор. Терминальное множество M – подпространство $\mathbb{R}^n$, $\dot{z}$ - производная по t. Объект z управляется двумя сторонами (игроками), имеющими противоположные цели.

Первый игрок (преследователь) действует на систему (1) выбором некоторой функции $u = u(t) \in P$, $t \geq 0$, из указанного допустимого класса функций U. Второй игрок (уклоняющийся) выбирает свое управление в виде некоторой функции $v = v(t) \in Q$ из своего допустимого класса функций V.

Рассматривается следующая задача уклонения траекторий: для каждого $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ надо указать (найти) алгоритм такого выбора управления $v^*(t) \in Q$, $v^*(\cdot) \in V$, который обеспечивает при любом допустимом противодействии преследователя, выбирающего $u = u(t) \in P$, $u(\cdot) \in U$, непопадание на M при всех $t \geq 0$ траектории $z(t)$, $z(0) = z_0$, формирующейся обоими игроками. Цель преследующего игрока – противоположная.

Такая постановка задачи уклонения восходит к работе [1], продвижения в различных направлениях изложены в [2-5].

Ниже в качестве допустимых классов управлений U и V будут использованы локально-инерционные управления, введенные, по-видимому, впервые в [5]. Эти управления более удобны при технической реализации процесса вычисления управлений, обеспечивающих уклонение траекторий конфликтно-управляемой системы (1).

В процессе исследований задачи уклонения траекторий (1) было установлено, что наиболее простые достаточные условия разрешимости задач уклонения подразделяются на два типа, характеризующих тип преимущества уклоняющегося игрока над преследователем: это так называемые кгрубый случайњ и ктонкий случайњ.

Определение 1. $L_Q(t_0, \Delta)$ – класс измеримых функций преследователя $v = v(t) \in Q$, $t \geq t_0$, таких, что на каждом отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ выполняются условия:

1) $v(t_i) = v_i \in P$;

2) $|v(t) - v(t_i)| \leq \gamma |t - t_i|^\alpha$, где $i = 1, 2, ..., p$, $p \in \mathbb{N}$, $t_i \in T = \{t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_p = t_0 + \Delta\}$, T – произвольное разбиение отрезка $[t_0, t_0 + \Delta]$, $\gamma \geq 0$, $\alpha > 0$, $\Delta > 0$ – константы.

Аналогично определяется класс $L_P(t_0, \Delta)$ локально-инерционных управлений преследующего игрока.

Пусть процесс, определяемый системой (1), начинается из точки $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$ в момент $t_0 = 0$. Обозначим через L ортогональное дополнение к M в $\mathbb{R}^n$, через W – произвольное двумерное подпространство из L, с ортогональной системой координат, $[w]_j$, $j = 1, 2$ – координаты вектора $w \in W$ относительно введенной системы координат. Далее, пусть $Df(u, v) = ([\pi c^{k_1-1} f(u, v)]_1, [\pi c^{k_2-1} f(u, v)]_2)^T$, где T – знак транспонирования.

Предположение A (тонкий случай). Существуют двумерное подпространство $W \subset L$, натуральные числа k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$, компактные множества $Q_1 \times Q_2 \subset Q$ и отображение $F : P \to Q_1$, такие, что

a) $[\pi c^i f(P, F(P), Q_2)]_j = 0$, $i = 0, 1, 2, ..., k_j - 2$, $j = 1, 2$.

b) множество $\bigcap_{u \in P} Df(u, F(u), Q_2)$ есть отрезок, не параллельный ни одной из координатных прямых $[w]_1 = 0, [w]_2 = 0$.

Теорема 1. Если для процесса (1) выполнено Предположение A (тонкий случай), то из любой начальной точки $z_0 \notin M$ разрешима задача уклонения при всех $t \geq 0$ в классах локально-инерционных управлений.

Литература

1. Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Доклады АН СССР.1969. Т.189. №4. – С. 721–723.

2. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. Тр. МИАН им. В.А, Стеклова. Москва. 1977. Т. 113. – С. 105–128.

3. Гусятинков П.Б., Югай Л.П. Об одной задаче убегания в нелинейных дифференциальных играх с терминальным множеством сложной структуры. Техническая кибернетика. Москва. 1977. №2. – С. 8–13.

4. Чикирий А.А. Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наукова Думка. 1992. –384с.

5. Yugay L.P. Avoiding of trajectories of linear conflict controlled dynamical systems in the classes of local piecewise inertial controls. Тезизы докладов Республиканской научной конфереции с участием зарубежных ученых кАктуальные проблемы динамических систем и их приложенийњ, Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, 1–3 мая, 2017, – С. 197–198.

Hilbert Fazosidagi Yarim-Normani Minimallashtiruvchi Natural Splayn

Abdullayeva G. Sh.

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston
gulruxshukurillaevna@gmail.com

Biror f funksiyaning taqribiy ko‘rinishini biror chekli fazo elementlari yordamida topish uchun bu funksiyani biror chekli sondagi x_β, $\beta = 0, 1, ..., N$ nuqtalar to‘plamidagi qiymatlaridan foydalanish mumkin. Bunda interpolyatsiya masalasini qarash mumkin. U holda x_β interpolyatsiya tugun nuqtalari deyiladi. Polinomial va splayn interpolyatsiyalari

mavjud. Ma'lumki polinom bilan yaqinlashtirish ma'lum kamchiliklarga ega. Shuning uchun splayn bilan ishlashga to'g'ri keladi.
Biz ushbu quyidagi differensial tenglamani qanoatlantiruvchi $2m$-tartibli tortilgan splaynni quramiz.

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2v^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + v^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}\right)S_\Delta(x) = 0$$

bu yerda, v - taranglik koeffisienti. Boshqacha aytganda, ushbu splayn, har bir bo'sh bo'lmagan (x_i, x_{i+1}) intervalda $v = 0$ bo'lganda $span(1, x, ..., x^{2m-1})$ da yoki $v \neq 0$ holda $span(\sinh(vx),\ \cosh(vx),\ vx\cosh(vx),\ vx\sinh(vx),\ 1,\ x, ...,\ x^{2m-5})$ da yotuvchi funksiyadir. Biz [1] ishda oltinchi tartibli algebraik-giperbolik natural tortilgan splayn qurganmiz. Endi, Biz quyidagi Hilbert fazosidagi yarim-normani minimallashtiruvchi $2m$-tartibli algebraik-giperbolik natural tortilgan splaynini quramiz:

$$K_2^v(P_{m-3}) = \{\ f : [0,1] \to R|\ f^{(m-1)} - absolyut\ uzluksiz\ va\ f^{(m)} \in L_2(0,1)\} \qquad (1)$$

ushbu fazoda$f$ va g funksyalrning skalyar ko'paytmani quyidagicha aniqlanadi:

$$< f, g >_{K_2^v(P_{m-3})} = \int_0^1 (f^{(m)}(x) - v^2 f^{(m-2)}(x))(g^{(m)}(x) - v^2 g^{(m-2)}(x))dx.$$

Ushbu fazodagi funksiya normasi skalyar ko'paytma yordamida quyidagicha kiritiladi:

$$\|f\|_{K_2^v(P_{m-3})} := \sqrt{< f, f >}. \qquad (2)$$

Bizga

$$x_0, x_1, ..., x_N$$

tugun nuqtalarida

$$Y :\ y_0, y_1, ..., y_N$$

qiymatlar berilgan bo'lsin. (1) fazoga tegishli bir nechta funksyalar ushbu tugun nuqtalardagi qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni $f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, .., N$. Biz ularning orasidan (2) normaga minimum beradigan funksiyani topish ma'salasini qaraymiz.
1-Masala. (2) yarim normaga minimum beruvchi va $x_i \in [0,1]$ tugunlarda quyidagi interpolyatsiya shartini qanoatlantiruvchi $S_\Delta(x) \in K_2^v(P_{m-3})$ funksiya topilsin,

$$S_\Delta(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, ..., N,$$

bu yerda $f \in K_2^v(P_{m-3})$.
Endi 1-masalaning yechimini keltiramiz.
1-teorema. $K_2^v(P_{m-3})$ fazodagi normaga minumum beruvchi va interpolyatsiya shartlarini qanoatlantiruvchi funksiya bu-[2] adabiyotda berilgan ta'rif asosida tariflanadigan, $2m$-tartibli algebraik giperbolik tortilgan splayndir va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$S_\Delta(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i G(x - x_i) + d_1\sinh(vx) + d_2\cosh(vx) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha x^\alpha$$

va splayn koeffitsiyentlari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

$$\sum_{i=0}^{N} C_i G(x_j - x_i) + d_1 \sinh(vx_j) + d_2 \cosh(vx_j) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} p_\alpha {x_j}^\alpha = y_j,\ j = 0, 1, ..., N$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \sinh(vx_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i \cosh(vx_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N} C_i x_i^\alpha = 0,\ \alpha = 0, 1, ..., m-3$$

bu yerda, C_i $(i = 0, 1, ..., N)$, d_1, d_2, p_α $(\alpha = 0, 1, ..., m-3)$ lar no'malumlar va $G_m(x)$ - quyidagi tenglamani qanoatlantiradi.

$$G_m^{(2m)}(x) - 2v^2 G_m^{(2m-2)}(x) + G_m^{(2m-4)}(x) = \delta(x)$$

va quyidagicha ko'rinishga ega

$$G_m(x) = \frac{sign(x)}{4v^{2m-1}} \left[vx \cosh(vx) - (2m-3) \sinh(vx) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(vx)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right],$$

bu yerda, $\delta(x)$ - Dirakning delta-funksyasi.

Adabiyotlar

1. A.R.Hayotov, F.A.Nuraliev, G.Sh.Abdullayeva, Construction of the sixth order algebraic-hyperbolic interpolation natural spline, Problems of computational and applied Mathematics. Tashkent. 4/1(59) 2024. pp.109-124.

2. J.Ahlberg, E.Nilson, J.Walsh, The theory of splines and its application, Academic press Inc., New York.

Qovushoq-Magnito-Elastik Plastinkaning Chiziqli Ko‘ndalang Tebranishlari

Sharipov M. Z.[1], Boltayev Z. I.[2], Mirzayeva G. T.[2], Jurayev Sh. I.[3]

[1]Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston;
[2]Buxoro davlat texnika universiteti, Buxoro, O‘zbekiston;
boltayev-z@mail.ru
[3]Buxoro davlat pedagogika instituti, Buxoro, O‘zbekiston;
gulimirzoyeva1992@mail.com
sjurayev509@gmail.com

Dekart koordinatalar sistemasi (x, y, z) ((x, y) tekisligi)da joylashgan plastinka, tashqi magnit maydoni ($\overrightarrow{B}_0(0, B_0, 0), B_0 = const$) ta’sirida bo‘lsin. Plastinka yumshoq ferromagnit (izotrop magnito-qovushoq elastik) materialdan yasalgan, qalinligi 2h, uzunligi 2a va eni 2b bo‘lsin. Magnit kuchlari va momentlari ta’sirida bo‘lgan plastinkaga magnit maydoni induksiyasi ta’sir etadi.

$$F_e = -c_e \triangle e = -c_e[1 - \Gamma_e^c(\omega_R) - i\Gamma_e^s(\omega_R)]\triangle e, \tag{1}$$

bunda

$$\Gamma_{\lambda,m}^c(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda,m}(\tau)\cos\omega\tau d\tau; \Gamma_{\lambda\mu}^s(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda\mu}(\tau)\sin\omega\tau d\tau,$$

F_e- plastinka tebranganda qaytaruvchi kuch Δ_e -deformatsiyalanishi; c_e- oniy elastiklik moduli [1].

Ferromagnit plastinkaning xarakat diferensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi

$$D_0\overline{\nabla}^2 w + 2\rho h\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} + \chi B_0\int_{-h}^{h}\overline{\nabla}^2\Psi dy - D_0\int_0^t\overline{\nabla}^2 w(\tau)R_d(t-\tau)d\tau = 0, \tag{2}$$

bu yerda $w(x, y, t)$- plastinkaning salqiligini ifodalovchi kattalik, $D_0 = 2EH^3/3(1 - \nu^2), \nabla^2 = \delta^2/\delta x^2 + \delta^2/\delta z^2$ -Laplas operatori va Ψ(x,y,z) - plastinka ichidagi magnit maydonining induitsirlangan potensiali bo‘lib, quyidagicha topiladi:

$$\Phi(q) - \Psi(q) = -\frac{\chi}{\mu_0\mu}B_0 w, q \in S; \frac{\delta\Psi}{\delta n} - \frac{1}{\mu}\frac{\delta\Phi}{\delta n} = 0, q \in S \tag{3}$$

Agar plastinka statik xolatda deb faraz qilinsa, u xolda yuqorida keltirilgan tenglamalar soddalashadi, ya’ni quyidagi ko‘rinishdagi tenglamalarga keladi

$$\Phi(q) - \Psi(q) = f(q), \frac{\delta\Psi}{\delta n} - \frac{1}{\mu}\frac{\delta\Phi}{\delta n} = \frac{1}{\mu}g(q), q \in S \tag{4}$$

Bu yerda Φ -magnit maydon induksiyasi $\nabla = \overline{\nabla} + \delta^2/\delta y^2$ - Laplas operatori. S - plastinkaning yuzi, μ_0 - absolyut magnit o‘tkazuvchanligi, μ - plastinka o‘tkazuvchanligi, $\chi = \mu - 1$, n- plastinka tashqi chegarasiga o‘tkazilgan normal. Agar $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ bo‘lsa, u xolda $\Phi \to 0$[2].

Ixtiyoriy o‘zgarmaslarni tanlash xisobiga $\Psi_0 = 0$ ekanligi topiladi. U xolda Φ_0 Dirixle masalasining yechimi bo‘ladi:

$$\Psi_0(r, \theta) = 0,$$

$$\Psi_m(r,\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^m(f_k - \frac{R_{gk}}{k})(\frac{r}{R})^k \cos k\theta, m = 1, 2...$$

$$\Phi_0(r,\theta) = 0,$$

$$\Phi_m(r,\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^m(f_k - \frac{R_{gk}}{k})(\frac{R}{r})^k \cos k\theta, m = 1, 2...$$

Sonli natijalar mos ravishda plastinka qalinligi $6,865 \times 10^{-5}$ sm va $6,5 \times 10^{-4}$ bo‘lgan xol uchun olindi.

Shunday qilib, magnit maydonida joylashgan plastinka tebranishlari masalasini o‘rganish metodikasi va algoritmi yaratildi.

Adabiyotlar.

1.Bagdassarian, G. Y. Belubekian, M. V. 1972 Stability of a ferromagnetic plate in gas flow in the presence of a magnetic field. Proc. Armenian Acad. Sci. Mech. 3, 18-28

2.T. L. Linnik, A. V. Scherbakov, D. R. Yakovlev, X. Liu, J. K. Furdyna, and M. Bayer. Theory ofmagnetization precession induced by a picosecond strain pulse in ferromagnetic semiconductor(Ga,Mn)As. Phys. Rev. B, 84:214432, 2011.

3. L. Thevenard, J.-Y. Duquesne, E. Peronne, H. J. von Bardeleben, H. Jaffres, S. Ruttala, J-M.George, A. Lemaitre, and C. Gourdon. Irreversible magnetization switching using surface acoustic waves. Phys. Rev. B, 87:144402, 2013.

Bessel Operatori Qatnashgan To‘lqin Tenglamasini Taqribiy Yechish

Islamov E. R.

Farg‘ona davlat universiteti, Farg‘ona, O‘zbekiston;
e.islamov@yandex.ru

$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ sohada quyidagi

$$Lu \equiv u_{tt} + \frac{2\beta}{t}u_t - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

tenglamaning

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,,\ \lim_{t\to 0} t^{2\beta}u_t\,(x,t) = \psi\,(x) \tag{2}$$

$$u\,(0,t) = u\,(l,t) = 0 \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraylik. Bu yerda $0 < \beta < \frac{1}{2}$ hamda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ berilgan funksiyalar.

(1) tenglama uchun turli masalalar [1]-[7] adabiyotlarda ko‘rib chiqilgan. [8]-[13] adabiyotlarda (1)-(2) masalaning klassik ma’nodagi yechimi, [14]-[16] adabiyotlarda esa umumlashtirilgan masalaning yechimlari olingan.

(1) ga qo‘yilgan turli masalalarni analitik usulda yechish yaxshi o‘rganilgan bo‘lishiga qaramay ularni taqribiy yechish kam o‘rganilgan. (2) boshlang‘ich shartlar singulyarlik chizig‘ida bo‘lganligi sababli to‘g‘ridan-to‘g‘ri to‘rlar usulini qo‘llash imkonsizdir.

Ushbu ishda singulyar koeffisientli (1) tenglama uchun singulyarlik chizig‘ida Koshi sharti bilan berilgan chegaraviy masalani almashtirish operatorlari yordamida taqribiy

yechish o‘rganildi. Bunda Erdelyi-Kober kasr tartibli integral operatorining Bessel operatoriga ta’siri natijasida singulyar koeffisientidan qutulish xossasidan [17]-[18] foydalanildi va natijada

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \tag{4}$$

tenglama uchun masalaga o‘tib olindi. (4) uchun hosil qilingan masalalar to‘rlar usuli yordamida taqribiy hisoblandi. Olingan natijalarga kasr tartibli Erdelyi-Kober integral operatori ta’siri hisoblandi [19] va (1)-(3) masalaning taqribiy yechimi olindi.

Usulning yaqinlashishi isbotlandi va uning yaqinlashish baxosi olinib taxlil qilindi.

Python dasturlash tilida NumPy, SciPy va math kutubxonalaridan foydalanib grafikli va jadval shakldagi natijalar olinib taxlil qilindi.

Adabiyotlar

1. Euler L. Institutiones calculi integralis, Vol. III, Petropoli. 1770. Also in: Pt. II. Ch. III, IV, V, Opera Omnia. Ser. 1. №13. Leipzig, Berlin, 1914, 212-230s.

2. Poisson S.D. Memoire sur l’integration des equations lineaires aux differences partielles, J. de L’Ecole Polytechechnique, Ser. 1823. 1.є 19. 215-248s.

3. Darboux G. Le cons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal, Vol. II., 2 ed., Paris, 1915. 188s.

4. Riemann B. On expansion of waves with finite amplitude, Collected Works, MoscowLeningrad, Gostehizdat, 1948.

5. Darboux G. Sur la theorie generale de surfaces. Chelsea, reprint, 1972

6. Copson E.T. Partial differential equations. Cambridge Univ. Press, 1975.

7. Hauser I., Ernst F.J. Initial value problem for colliding gravitational plane wave.// J. Math. Phys. 1989. 30 №4. 872–887s

8. A. Weinstein. Sur le probleme de Cauchy pour l’equation de Poisson et l’equation des ondes, C.R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 2584-2585s.

9. A. Weinstein. On the wave equation and the equation of Euler–Poisson, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. V, Wave motion and vibration theory, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1954, 137-147.

10. A. Weinstein. The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation, Summa Brasiliensis Mathematicae, 3 (1955), 125-147.

11. A. Weinstein. Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanic, Applications of the function theory to the mechanics of continuum. Transections of international symposium, vol. 2. Mechanics of liquids and gases, mathematical methods. Nauka, Moscow, 1965.

12. A. Weinstein. Selecta, Pitman Publishing, 1978.

13. F. C. Young. On a generalized EPD equation, J. Math. Mech., 18 (1969), 1167-1175.

14. D. W. Bresters. On the equation of Euler-Poisson-Darboux, SIAM J. Math. Anal., 4(1) (1973), 31-41.

15. D. W. Bresters. On a generalized Euler-Poisson-Darboux equation, SIAM J. Math. Anal, 9(5) (1978), 924-934.

16. R. W. Carroll, R. E. Showalter. Singular and Degenerate Cauchy problems, Academic Press, New York, 1976

17. А.К.Уринов, С.М.Ситник, Э.Л.Шишкина, Ш.Т.Каримов. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения). Фергана: Фаргона, 2022.

18. А.К.Уринов, Ш.Т.Каримов. Операторы Эрдейи - Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. Фергана: Фаргона, 2021.

19. Sh.T.Karimov, E.R.Islamov. Approximation of the Erdelyi–Kober Operator Using Cubic Spline Interpolation. Lobachevskii Journal of Mathematics (2024, Vol. 45, №. 9,): 4534–4547.

Gilbert Yadroli Singulyar Integral Uchun Xatolik Funksionalining Normasi

Jabborov X. X.

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O‘zbekiston

jabborovx@bk.ru

Biz quyidagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 \varphi(x)ctg\pi(x-t)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(h\beta), \tag{1}$$

bu yerda $0 < t < 1$, $C[\beta]$-koeffitsiyentlar, $h\beta$-tugun nuqtalar, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Bunda $\varphi(x)$ funksiyalar $L_2^{(m)}(0,1)$ Gilbert fazosiga tegishli bo‘lib, ushbu fazo quyidagicha aniqlanadi:

$$L_2^{(m)}(0,1) = \{\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}, \varphi^{(m-1)}(x) - \text{absolyut uzluksiz}, \varphi^{(m)}(x) \in L_2(0,1)\}.$$

Biz qarayotgan fazoda φ va ψ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha kiritiladi:

$$< \varphi, \psi >= \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\psi^{(m)}(x)dx$$

va shu fazoda φ funksiyaning normasi skalyar ko‘paytma orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\| = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Berilgan (1) kvadratur formulada integral va kvadratur yig‘indi orasidagi ayirmaga xatolik deyiladi va unga quyidagi xatolik funksionali mos keladi:

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\text{ctg}\pi(x-t) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-h\beta),$$

bu yerda, $\delta(x)$-Dirakning delta-funksiyasi.

(1) kvadratur formula xatoligining absolyut qiymati xatolik funksionalining normasi yordamida yuqoridan baholanadi. Shuning uchun xatolik funksionali normasini hisoblash muhimdir. Buning uchun quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda (1) kvadratur formula xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagiga teng:

$$\|\ell\|^2 = (-1)^m \Bigg(\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C[\beta]C[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - 2 \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] \int_0^1 \frac{|x - h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!} ctg\pi(x-t)dx -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^{2m-1}}{2(2m-1)!} ctg\pi(x-t)ctg\pi(y-t)dxdy \Bigg)$$

Adabiyotlar

1. Shadimetov Kh.M., Jabborov Kh.Kh. Optimal quadrature formula for approximate calculation of singular integrals with Hilbert kernel, // Problems of computational and applied mathematics.Tashkent. – 4/2(60) 2024. pp.5-14.

Suv Resurslarining Beqaror Harakatini Ikki O‘lchovli Fazoviy Taqsimlanishini Hisobga Olgan Holda Modellashtirishning Sonli Usuli

Seytov A. J.[1], Abduraxmonov O. N.[2], Quramboyev I. N.[3]

O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
[1]saybek868@gmail.com, [2]abduraxmonovolim915@gmail.com, [3]abdalim83@mail.ru

Kirish. Suv resurslarini beqaror harakatini 2D modellashtirish orqali suv toshqinlari kabi gidrologik jarayonlarni tushunish va bashorat qilishda muhim rol o‘ynayd. Ikki o‘lchovli sirt oqimi uchun modellashtirishda Sent-Venant tenglamalari ba’zan ularni Shallow Water (SW) tenglamalari deb atashadi. Analitik yechim sifatida Sent-Venant tenglamalarining nochiziqli ko‘rinishi murakkabligidan sirt oqimini modellashtirish uchun turli sonli usullardan foydalaniladi[1-3]. Modelda qo‘llanilgan sxema ko‘proq sayoz suv oqimlarini tahlil qilish va bashorat qilishga mo‘ljallangan bo‘lib, chuqurroq oqimlar yoki turbulent oqimlarni bashorat qilishda xatolarga olib kelishi mumkin. Shu bilan birga ushbu sxemalar oddiy va tezkor hisoblash usuli sifatida ishlatiladi.

Metodologiya. Ikki o‘lchovli gidrodinamik oqim tenglamalari Navier-Stokes tenglamalaridan kelib chiqadigan 2D Sent-Venant tenglamalari chuqurlik bo‘yicha o‘rtacha qiymatlar olish, kinematik chegaraviy shartlarni qo‘llash va ba’zi taxminlarni qabul qilish orqali hosil qilinadi[4]. 2D Sent-Venant tenglamalari suv oqimlarini boshqarish uchun ishlatiladi. Ushbu tenglamalar massa va impulsning saqlanish qonunlariga asoslanadi. Sirt oqimi uchun boshqaruvchi tenglamalar quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} z + \frac{\partial}{\partial x} zu + \frac{\partial}{\partial y} zv = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} zu + \frac{\partial}{\partial x} \left(zu^2 + \frac{gz^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} zuv = gz(S_{0x} - S_{fx}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} zv + \frac{\partial}{\partial x} zuv + \frac{\partial}{\partial y} \left(zv^2 + \frac{gz^2}{2} \right) = gz(S_{0y} - S_{fy}) \tag{3}$$

1-tenglama massa saqlanish qonuniga asoslangan uzluksizlik tenglamasi bo‘lib, 2 va 3-tenglamalar x va y yo‘nalishlaridagi impuls tenglamalaridir. Bu yerda $z(m)$ suv balandligi (chuqurlik), $u(m/s)$ va $v(m/s)$ mos ravishda x va y yo‘nalishlarida chuqurlik bo‘ylab o‘rtacha tezlik komponentlari; $g(m/s^2)$ erkin tushish tezlanishi; S_{0x} va S_{fx} x yo‘nalishida suv yuzasi gradiyenti va ishqalanish qarshiligi; S_{0y} va S_{fy} y yo‘nalishida suv yuzasi gradiyenti va ishqalanish qarshiligi; t esa vaqt qadamidir. Hosilaning ko‘paytma qoidasiga asosan (1-3) tenglamalar quyidagi shaklga keltirilishi mumkin:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

$$z\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial t} + u^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2zu\frac{\partial u}{\partial x} + gu\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial z}{\partial y} + zv\frac{\partial u}{\partial y} + zu\frac{\partial v}{\partial y} = gz(S_{0x} - S_{fx}) \tag{5}$$

$$z\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial z}{\partial t} + uv\frac{\partial z}{\partial x} + zv\frac{\partial u}{\partial x} + zu\frac{\partial v}{\partial x} + v^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2zv\frac{\partial v}{\partial y} + gz\frac{\partial z}{\partial y} = gz(S_{0y} - S_{fy}) \tag{6}$$

(4-6) tenglamalar bo‘yicha yechim olish uchun chekli ayirmali sxemalarning Lax–Wendroff usuli yordamida diskretlashtiriladi.

$$z_{i,j,n+1} = z_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{z_{i+1,j,n} - z_{i-1,j,n}}{2\Delta x}u_{i,j,n} + \frac{z_{i,j+1,n} - z_{i,j-1,n}}{2\Delta y}v_{i,j,n}\right] \tag{7}$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}\left[u_{i,j,n}^2\frac{z_{i+1,j,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i-1,j,n}}{\Delta x^2} + v_{i,j,n}^2\frac{z_{i,j+1,n} - 2z_{i,j,n} + z_{i,j-1,n}}{\Delta y^2}\right]$$

$$+2u_{i,j,n}\frac{v_{i,j+1,n} - v_{i,j-1,n}}{2\Delta y} + 2v_{i,j,n}\frac{u_{i+1,j,n} - u_{i-1,j,n}}{2\Delta x}.$$

X yo‘nalishi bo‘yicha tezlikni ifodalanishi:

$$u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{z_{i,j,n+1}}\left[\frac{z_{i,j,n+1} - z_{i,j,n}}{\Delta t} + u_{i,j,n}^2\frac{z_{i+1,j,n} - z_{i-1,j,n}}{2\Delta x} + 2u_{i,j,n}\frac{u_{i+1,j,n} - u_{i-1,j,n}}{2\Delta x}\right. \tag{8}$$

$$\left. + gz_{i,j,n}\frac{z_{i+1,j,n} - z_{i-1,j,n}}{2\Delta x} - gz_{i,j,n}(S_{0x} - S_{fx})\right].$$

Y yo‘nalishi bo‘yicha tezlikni ifodalanishi:

$$v_{i,j,n+1} = v_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{z_{i,j,n+1}}\left[\frac{z_{i,j,n+1} - z_{i,j,n}}{\Delta t} + u_{i,j,n}v_{i,j,n}\frac{z_{i+1,j,n} - z_{i-1,j,n}}{2\Delta x} + v_{i,j,n}^2\frac{z_{i,j+1,n} - z_{i,j-1,n}}{2\Delta y}\right. \tag{9}$$

$$\left. + 2v_{i,j,n}\frac{v_{i,j+1,n} - v_{i,j-1,n}}{2\Delta y} + gz_{i,j,n}\frac{z_{i,j+1,n} - z_{i,j-1,n}}{2\Delta y} - gz_{i,j,n}(S_{0y} - S_{fy})\right].$$

(7-9) tenglamalardagi u, v va z parametrlar barcha tugun nuqtalar uchun eksponensial funksiyaga bog‘liq boshlang‘ich qiymatlar beriladi, so‘ngra iterativ ravishda yechiladi. Chekli ayirmalar yaqinlashishi har bir tarmoq nuqtasida (x,y,t) bajariladi. Suv oqimi tezliklari va suv sathining balandligi har bir vaqt bosqichi va oqim kanali bo‘ylab masofa uchun hisoblanadi.

Adabiyotlar

1. C.B. Vreugdenhil Numerical Methods for Shallow-Water Flow, Kluwer Academic Publishers, 1994.

2. Seytov A., Abdurakhmanov O., Kakhkhorov A., Karimov D., Abduraimov D. Modeling of two-dimensional unsteady water of movement in open channels. In E3S Web of Conferences (2024). (Vol. 486, p. 01023). EDP Sciences.

3. A.Seytov, A.Khusanov, A.Khudayberdiev, N.Uteuliev, Sh.Yadgarov, D.Seytimbetov, O.Ergashev, O.Abduraxmanov Development of Algorithms for Solving Problems of Optimisation of Water Resource Management in Irrigation Systems. AIP Conf. Proc. 3147, 030033 (2024)

4. I.Zheleznyak and L.Byshovets A mathematical model of flood waves moving along a cascade of reservoirs on a large river, Application of Mathematical Models in Hydrology and Water Resources Systems, 1975.

Kompleks O‘zgaruvchili Ishlab Chiqarish Funksiyalarining Dinamikasi

Seydullayeva G.B.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
seydullayeva@gmail.com

Ishlab chiqarish funksiyalari iqtisodiy tahlil va resurslar boshqaruvining asosiy tayanchlaridan biri bo‘lib, ular korxonalar va milliy iqtisodiyot darajasida ishlab chiqarish jarayonlarini modellashtirish, prognoz qilish va optimallashtirish imkonini beradi. An’anaviy ishlab chiqarish funksiyalari asosan haqiqiy o‘zgaruvchilar (mehnat, kapital, yer kabi aniq o‘lchanadigan omillar) asosida qurilgan bo‘lsada, zamonaviy global iqtisodiyotning rivojlanishi bilan bir qator yangi metodologik yondashuvlar talab qilinmoqda.

Zamonaviy iqtisodiy jarayonlarning murakkab tabiati quyidagi jihatlarni hisobga olishni talab qiladi: Birinchidan resurslarning nafaqat miqdoriy, balki sifat jihatidan ham baholanishi zarur. Masalan, mehnat resursini tahlil qilishda nafaqat ishchilar soni, balki ularning malakasi, tajribasi va innovatsion qobiliyatlari ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ikkinchidan texnologik taraqqiyot va innovatsiyalarning ishlab chiqarish jarayonlariga ta’siri an’anaviy modellar bilan to‘liq ifodalab bo‘lmaydigan dinamik xususiyatlarga ega bo‘lishi. Uchinchidan global iqtisodiyot sharoitida resurslarning o‘zaro bog‘liqligi va ta’sirlashuvi tobora murakkablashib bormoqda. Aynan shu muammolarni hal qilish uchun kompleks o‘zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyalari keng qo‘llanila boshladi.

Kompleks o‘zgaruvchilar yordamida mehnat resurslarining miqdoriy (haqiqiy qism) va sifat jihatlari (mavhum qism)ni bir vaqtning o?zida ifodalash mumkin. Buning natijasida innovatsion omillarning ishlab chiqarish jarayonlariga ta’sirini dinamik tarzda modellashtirish imkoniyati paydo bo‘ladi. Natijada resurslarning o‘zaro ta‘sirini va ularning vaqt bo‘yicha evolutsiyasini aniqroq aks ettirish mumkin.

Masalan, kompleks ishlab chiqarish funksiyasi yordamida korxonaning malakali kadrlar bilan ta’minlanish darajasi (mavhum qism) nafaqat ishlab chiqarish hajmiga, balki boshqa resurslardan (masalan, asbob-uskunalardan) foydalanish samaradorligiga ham ta’sirini aniqlash mumkin. Bu esa an’anaviy modellar bilan qiyin yoki umuman imkonsiz bo‘lgan tahlillarni amalga oshirish imkonini beradi.

Kompleks o‘zgaruvchilarga asoslangan yondashuv ayniqsa quyidagi sohalarda samarali natijalar beradi:

1. Innovatsion korxonalarning faoliyatini modellashtirish;
2. Malakali ishchi kuchining iqtisodiy ta?sirini baholash;
3. Texnologik progressning uzoq muddatli oqibatlarini prognozlash;
4. Resurslarning optimal taqsimoti strategiyalarini ishlab chiqish.

Shunday qilib, kompleks o‘zgaruvchilarga asoslangan ishlab chiqarish funksiyalari zamonaviy iqtisodiyotning murakkab talablariga javob bera oladigan yangi metodologik yondashuv hisoblanadi.

Kompleks ishlab chiqarish funksiyasi $Q(z)$ uchun quyidagi matematik modelni ko‘rib chiqamiz.

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha Q(z) + \beta \frac{dz}{dt}.$$

Bu yerda $\alpha Q(z)$ – ishlab chiqarish hajmining avtonom o‘sishi ya’ni resurslar samaradorligi, $\beta \frac{dz}{dt}$ – resurslarning dinamik o‘zgarish ta’siri (masalan, investitsiyalar yoki mehnat bozori o‘zgarishlari), $z(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t)$ – haqiqiy resurs (masalan, kapital), $y(t)$ – mavhum komponent (masalan, innovatsion potentsial).

Bu model innovatsion faoliyat olib boruvchi korxonada investitsiyalar va texnologik risklarning ishlab chiqarish dinamikasiga ta’sirini o‘rganadi.

Adabiyotlar

1. Ahlfors L.V. (1979). *Complex Analysis.*
2. Sydsæter K., Hammond P. (2012). *Essential Mathematics for Economic Analysis.*
3. Boyd S., Vandenberghe L. (2004). *Convex Optimization.*

Impuls Ta’siriga Ega Kechiguvchi Argumentli Differensial Tenglamalar Uchun Asosiy Boshlang‘ich Masalalar

Qurbanbaev O‘.O.[1], Askarova D.B.[2]

Qoraqalpoq davlat universiteti, Nukus, Qoraqalpog‘iston;
Otebay58@mail.ru, askarovadilafruz95@gmail.com

Fizika va mexanikaning, shuningdek boshqa sohalarning ko‘plab masalalari impuls ta’siriga ega differensial tenglamalar bilan bir qatorda kechiguvchi argumentga ega differensial tenglamalar uchun asosiy boshlang‘ich masalalar nazariyasini o‘rganishga olib kelinadi [1,2].

Bu maqolada kechiguvchi argumentga ega va shuning bilan birga impuls ta’siriga uchraydigan differensial tenglamalar qaraladi.

Faraz qilaylik, $E_0[-\tau, 0]$ boshlang‘ich to‘plamda $x = \varphi(t)$ boshlang‘ich funksiyaga ega $t - \tau$ kechiguvchi argumentli va shuning bilan birga $t = t_{ki} \in ((k-1)\tau, k\tau)$, $i, k = 1, 2, ...$ nuqtalarda impuls ta’siriga uchraydigan

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \neq t_{ki}, \quad i, k = 1, 2, ..., \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=t_{ki}} = x(t_{ki} + 0) - x(t_{ki} - 0) = h_{ki}, \quad i, k = 1, 2, ... \tag{2}$$

differensial tenglamasi berilgan bo‘lsin, bu yerda $\tau > 0$ va h_{ki} lar berilgan o‘zgarmaslar. Impuls ta’siriga ega kechiguvchi argumentli (1),(2) asosiy boshlang‘ich masalaning yechimi qadamlar usuli bo‘yicha Dirakning $\delta(t)$ funksiyasi yordamida birinchi qadamda, ya’ni $t \in [0, \tau)$ oraliqda

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \varphi(t-\tau)) + \sum_{i=1}^{m_1} h_{1i}\delta(t - t_{1i}), \;\; x(0) = \varphi(0)$$

turidagi Koshi masalasi bilan almashtirilib, bu Koshi masalasini yechish

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \varphi(s-\tau))ds + \sum_{i=1}^{m_1} h_{1i}\theta(t - t_{1i})$$

integral tenglamani yechishga olib kelinadi, bu yerda m_1 deganimiz birinchi qadamdagi impuls nuqtalarinig soni, demak $0 < t_1 < t_2 < ... < m_1 < \tau$.

Agar impuls ta’siriga ega (1),(2) asosiy boshlang‘ich masalaning n qadamdagi yechimini $x = x_n(t)$ deb belgilab, jarayonni davom ettirsak, berilgan masalaning n qadamdagi, уавГЄni $(n-1)\tau \le t < n\,\tau$ oraliqdagi yechimini topish masalasi

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x_{n-1}(t-\tau)) + \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} h_{ni}\delta\left(t - t_{ni}\right),$$

$$x((n-1)\tau) = x_{n-1}((n-1)\tau)$$

turidagi Koshi masalasini yechishga olib kelinadi va bu masalaning yechimi

$$x(t) = x_{n-1}((n-1)\tau) + \int_{(n-1)\tau}^t f(s, x(s), x_{n-1}(s-\tau))ds + \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} h_{ni}\theta\left(t - t_{ni}\right),$$

yoki

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^\tau f(s, x_1(s), \varphi(s-\tau))ds + \sum_{i=1}^{m_1} h_{1i}\theta(\tau - t_{1i}) +$$

$$+ \int_\tau^{2\tau} f(s, x_2(s), x_1(s-\tau))ds + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} h_{2i}\theta\left(t - t_{2i}\right) + ...$$

$$... + \int_{(n-1)\tau}^t f(s, x(s), x_{n-1}(s-\tau))ds + \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} h_{ni}\theta\left(t - t_{ni}\right) =$$

$$= \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(s, x_k(s), x_{k-1}(s-\tau))ds +$$

$$+\int\limits_{(n-1)\tau}^{t} f(s,x(s),x_{n-1}(s-\tau))ds+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_n} h_{ki}\theta\left(t-t_{ki}\right)$$

turidagi integral tenglamaning noma'lum $x=x_n(t)$ yechimini topishga olib kelinadi, bu yerda $x_0(t)=\varphi(t)$.

Adabiyotlar

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев. Вища шк. 1987.

2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1971. –231 с.

Trigonametrik Funksiyalarga Aniq Hosilali Kvadratur Formula

Turdiyev Sh. R.[1]

Renessans ta'lim universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
shodmon_turdiyev@mail.ru

Ushbu ishda biz $K_2(P_3)$ chiziqli fazoda trigonometrik funksiyalarga aniq bo'lgan

$$\int\limits_0^1 f(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta\cdot f(h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0}\cdot f'(h\beta) \tag{1}$$

ko'rinishdagi hosilali kvatratur formula qurish masalasini qaraymiz.

Bunda $C_{\beta,0}$, $\beta=\overline{0,N}$ trapetsiya formulasining koeffitsiyentlari, ya'ni $C_{0,0}=\frac{h}{2}$, $C_{\beta,0}=h$, $\beta=\overline{1\,,\,N-1}$, $C_{N,0}=\frac{h}{2}$ ga teng.

Shuningdek,

$$K_2(P_3)=\{f:[0,1]\to R\,|f''-\text{absolyut uzluksiz},\, f'''\in L_2(0,1)|\}$$

Gilbert fazo bo'lib, bu yerda u fazo $P_3(\frac{d}{dx})=\frac{d^3}{dx^3}+\omega^2\frac{d}{dx}$, $\omega\neq 0$ operator bilan aniqlanadi va unda skalyar ko'paytma quyidagicha beriladi:

$$(f,g)=\int\limits_a^b (f^{(3)}(x)+\omega^2 f^{(1)}(x))(g^{(3)}(x)+\omega^2 g^{(1)}(x))dx.$$

Biror f funksiyaning shu skalyar ko'paytmaga mos normasi

$$\|f\|_{K_2^3(P_3))}=\sqrt{\int\limits_a^b \left(f^{(3)}(x)+\omega^2 f^{(1)}(x)\right)^2 dx}$$

formula orqali yoziladi. Bunda $\|f\|=0$ bo'ladi faqat va faqat quyidagi tenglik bajarilsa:

$$f^{(3)}(x)+\omega^2 f^{(1)}(x)=0.$$

Ma'lumki

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0} \cdot f(h\beta) \tag{2}$$

ko'rinishdagi formulalar orasida $L_2^{(1)}(0,1)$ fazodagi optimali bu trapetsiyalar formulasi bo'lib, u formula har qanday chiziqli funksiyaga aniqdir.

Ushbu ishda biz (1) ko'rinishdagi formulalar orasidan $1\,, \sin(\omega x)$ va $\cos(\omega x)$ larning chiziqli kombinatsiyasiga aniq bo'ladigan formulani quramiz. (1) – formula xatoligi quyidagi ayirmadir

$$(l,f) = \int_0^1 f(x)dx - (\sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0} \cdot f(h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1} \cdot f'(h\beta)\,)$$

Bunda

$$l(x) = \varepsilon_{[0.1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,0} \cdot \delta(x-h\beta) + \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,1} \cdot \delta'(x-h\beta).$$

Biz (1) ko'rinishdagi formulani $N = 1$ holini qaraymiz, unda $h = 1$ va formula quyidagicha bo'ladi

$$\int_0^1 f(x)dx \cong C_{0,0}f(0) + C_{1,0}f(1) + C_{0,1}f'(0) + C_{1,1}f'(1)$$

ko'rinishga keladi, bu yerda $C_{0,0} = \frac{1}{2}, \quad C_{0,0} = \frac{1}{2}$ ga teng. Biz $C_{0,1}\,, \quad C_{1,1}$ koeffitsiyentlarni quyidagi sistemadan topamiz

$$\left\{\begin{array}{l} (l, \sin\omega x) = \int\limits_0^1 \sin\omega x dx - \sum\limits_{\beta=0}^{1} C_{\beta,0}\sin(\omega h\beta) - \sum\limits_{\beta=0}^{1} C_{\beta,1}\omega\cos(\omega h\beta) = 0 \\ (l, \cos\omega x) = \int\limits_0^1 \cos\omega x dx - \sum\limits_{\beta=0}^{1} C_{\beta,0}\cos(\omega h\beta) + \sum\limits_{\beta=0}^{1} C_{\beta,1}\omega\sin(\omega h\beta) = 0 \end{array}\right\}.$$

Bu sistemaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} C_{1,1} = \frac{\omega\cdot(1+\cos\omega)-2\sin\omega}{2\cdot\omega^2\sin\omega}, \\ C_{0,1} = \frac{2\sin\omega-\omega\cdot(1+\cos\omega)}{2\cdot\omega^2\sin\omega}. \end{cases}$$

Bundan (1) ko'rinishdagi formulani $N = 1$ bo'lganda $1, \sin(\omega x)$ va $\cos(\omega x)$ funksiyalarga aniq kvadratur formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{2\sin\omega - \omega\cdot(1+\cos\omega)}{2\cdot\omega^2\sin\omega}\cdot(f'(0) - f'(1))$$

Adabiyotlar

1. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р.: Оптимальная аппроксимация функционалов погрешностей квадратурны и интерполяционных формул пространстве дифференцируемых функций. – Ташкент, Muhr Press, 2022.

Iqtisodiy O‘sishni Prognoz Qilishning Matematik Modeli

Xamidullayeva X.G‘.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
xamidullayevaxonzoda@gmail.com

Korrupsiya davlat boshqaruvi va iqtisodiy tizimga salbiy ta’sir qiluvchi omillardan biri bo‘lib, u iqtisodiy o‘sishni sekinlashtiradi, ishsizlik darajasini oshiradi va investitsion muhitga zarar yetkazadi. Iqtisodiy o‘sishga salbiy ta’sir etuvchi omillarni samarali bartaraf etish uchun, iqtisodiy inqiroz yoki barqarorsizlik alomatlari paydo bo‘lishi bilanoq tegishli iqtisodiy choralarni kuchaytirish zarur. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, davlat tomonidan amalga oshiriladigan investitsiyalar va barqarorlikka yo‘naltirilgan iqtisodiy islohatlar iqtisodiy o‘sishni qo‘llab-quvvatlashda muhim rol o‘ynaydi.

Shuning uchun, iqtisodiy muammolar darajasiga muvofiq qo‘shimcha iqtisodiy islohotlar joriy etish, ish o‘rinlarini ko‘paytirish va innovatsion loyihalarni moliyalashtirish iqtisodiy o‘sishni ta’minlash uchun samarali strategiya bo‘lib xizmat qiladi.

Ko‘pgina iqtisodiy muammolar tizimli tarzda bir-biri bilan bog‘liq bo‘lib, epidemik jarayonlarga o‘xshab bir sohadan boshqasiga ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Ommaviy axborot vositalarida iqtisodiy islohotlar va barqarorlikka oid xabardorlikning oshirilishi muhim rol o‘ynaydi, garchi bu iqtisodiy inqirozlarni to‘liq bartaraf etuvchi omil bo‘lmasa ham, jiddiy e’tibor talab etadigan masalalardan biridir. Iqtisodiy inqirozlarning tarqalishi va ularni boshqarishni o‘z ichiga olgan iqtisodiy modellar bo‘yicha ko‘plab ilmiy tadqiqotlar mavjud [1]-[4].

Ushub ishda, korrupsiyaning iqtisodiyotga ta’siri matematik modellar yordamida o‘rganiladi va iqtisodiy prognozlashni ta’lim va tarbiya, diniy targ‘ibot, ochko‘zlik, kambag‘allik, vijdon uyg‘onish parametri, islohatlar natijasida korrupsiyaga qarshi immunitet hosil qilganlar ulushi kabi faktorlarga e’tibor qaratamiz.

Matematik model tavsifi. Korrupsiya jarayoni quyidagi to‘rtta iqtisodiy parametrlar orqali ifodalanadi:

1. S (Moyil shaxslar)–korrupsiyaga moyil bo‘lganlar;
2. C (Korrupsionerlar)–korrupsiya bilan shug‘ullanayotgan shaxslar;
3. R (Gumondorlar)–korrupsiya uchun jazolanish ehtimoli bo‘lganlar;
4. I (Ma’rifatlilar)–korrupsiyaga qarshi immunitetga ega bo‘lganlar.

Model quyidagi differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -(k+v)SC + a(1-S) - bS \\ \frac{dC}{dt} = (k+v)SC - pC - (a+b)C \\ \frac{dR}{dt} = pC - \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \gamma R \end{cases}$$

Bu yerda:

a – ta’lim va tarbiyaning ta’siri;

b – diniy targ‘ibot ta’siri;

p – vijdon uyg‘onish parametri;
k – ochko‘zlik ta’siri;
v – kambag‘allik ta’siri;
γ – islohotlar natijasida korrupsiyaga qarshi immunitet hosil qilganlar ulushi.
Matematik model sonli usullar bilan yechilib, quyidagi natijalar olindi:
C – (Korrupsionerlar) kamayganda iqtisodiy o‘sish oshadi;
S – (Moyil shaxslar) kamayganda iqtisodiy o‘sish barqaror bo‘ladi;
I – (Ma’rifatlilar) ortganda iqtisodiy o‘sish jadallashadi.
Iqtisodiy o‘sishni barqaror qilish uchun quyidagi parametrlar optimallashtirilishi kerak:
a, b, p, γ – yuqori bo‘lishi lozim (ta’lim va islohotlarni kuchaytirish);
k, v – past bo‘lishi lozim (ochko‘zlik va kambag‘allikni kamaytirish).

Adabiyotlar

1. A.K. Misra, Modeling the effect of police deterrence on the prevalence of crime in the society, Appl. Math. Comput. 237 (2014), 531-545.

2. M.B. Gordon, A random walk in the literature on criminality: a partial and critical view on some statistical analyses and modelling approaches. Eur. J. Appl. Math. 21 (2010), 283-306.

3. J. Crane. The epidemic theory of ghettos and neighborhood effects on dropping out and teenage childbearing. Amer. J. Social. 96 (1991), 1226-1259.

4. F. Brauer, P. van den Driessche. Models for transmission of disease with immigration of infectives, Math. Biosci. 171 (1995), 143-154.

Ikki Komponentali Muhitda Yutiluvchan Manba Va O‘zgaruvchan Zichlikka Ega Nodivergent Kross-Diffuziya Masalasining Global Yechimlari

Xasanov J.[1], Muminov S.[2], Jabbarov O.[3]

[1]Urganch davlat pedagogika instituti, Urganch, O‘zbekiston;
jamshid_2425@mail.ru
ORCID: 0000-0002-3712-4635
[2]Mamun universiteti, Xiva, O‘zbekiston;
sokhibjan.muminov@mamunedu.uz
ORCID: 0000-0003-2471-4836
[3]Qarshi davlat universiteti, Qarshi, O‘zbekiston;
oybekjabborov1987@mail.ru
ORCID: 0000-0002-5644-1513

Biz $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ sohada aniqlangan quyidagi, manbaga ega nodivergent parabolik tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz:

$$|x|^n \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\alpha_i} \nabla \left(u_{3-i}^{m_{3-i}-1} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \right) - |x|^n u_i^{\beta_i} \tag{1}$$

$$u_i(0, x) = u_{0,i}(x), \quad x \in R^N \tag{2}$$

Bu yerda $\alpha_i, k, \beta_i > 0, p \geq 2, m_i \geq 1, (i = 1, 2)$ sonli parametrlar, $u_i = u_i(x, t) \geq 0$ izlanayotgan yechimlar. (1) sistema buziluvchan ekani ma’lum. Shuni ta’kidlash lozimki,

$u_i(t,x) = 0$ yoki $\nabla u_i = 0$ bo‘lganda sistema klassik ma’noda yechimga ega emas. Shuning uchun biz $u_i = u_i(t,x) \geq 0$, $u_{3-i}^{m_{3-i}-1} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \in C\left(R_+^N \times (0,+\infty)\right)$ xossaga ega bo‘lgan zaif yechimni ko‘rib chiqamiz va bu yechim (1) sistemani integral ayniyat ma’nosida qanoatlantiradi. (1) sistema ko‘plab fizik hodisalarni ifodalaydi [1-4]. Bu shuni ko‘rsatadiki, bu turdagi tenglamalar va tenglamalar sistemasini o‘rganishga talab yuqori.

Teorema (Globallik shartlari). Faraz qilaylik, $\gamma_i > 0$,

$$\gamma_{i+2} A_i^{\alpha_i + k(p-2)} \cdot A_{3-i}^{m_{3-i}-1} |\gamma_i|^{p-2} = \frac{1}{p+n}, \tag{3}$$

$$\psi_i \left(A_i^{\beta_i - 1} \alpha^{\gamma\beta_i - \gamma_i} - \frac{1}{1-\beta_i} \right) \geq \frac{\gamma_i (N+n)}{\gamma_{i+2}(p+n)}. \tag{4}$$

U holda (1)-(2) masala uchun Q sohada global yechim mavjud va uning uchun quyidagi baholashlar o‘rinli bo‘ladi.

$$u_i(t,x) \leq u_{i+}(t,x) = (T+t)^{\frac{1}{1-\beta_i}} f_i(\xi). \tag{5}$$

Adabiyotlar

1. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov, J.O. and Bobokandov M.M. *Mathematical modeling of double nonlinear problem of reaction diffusion in not divergent form with a source and variable density.* J. Phys.: Conf. Ser, 2021, 2131 032043. DOI: 10.1088/1742-6596/2131/3/032043.

2. Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. *Explicit estimate and global solution of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form* // Ilm sarchashmalari. 2022. –5. P. 23–32.

3. Aripov M., Matyakubov A. S., Khasanov J. O. *Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-diffusion parabolic system in non-divergent form with a source and variable density* // Bull. Inst. Math. 2022. P.5, –4. Pr. 22–31.

4. Khasanov J. O. *Mathematical modeling of processes described by cross-diffusion source and variable density* // Hisoblash va amaliy matematika muammolari. 2022. – 6(45). P. 39–47.

5. Aripov M., Matyakubov A.S., Xasanov J.O. *Nodivergent kross-diffuzion parabolik tenglamalar sistemasini sonli modellashtirish* // 2022-yil, 5-son (135). P. 84–91.